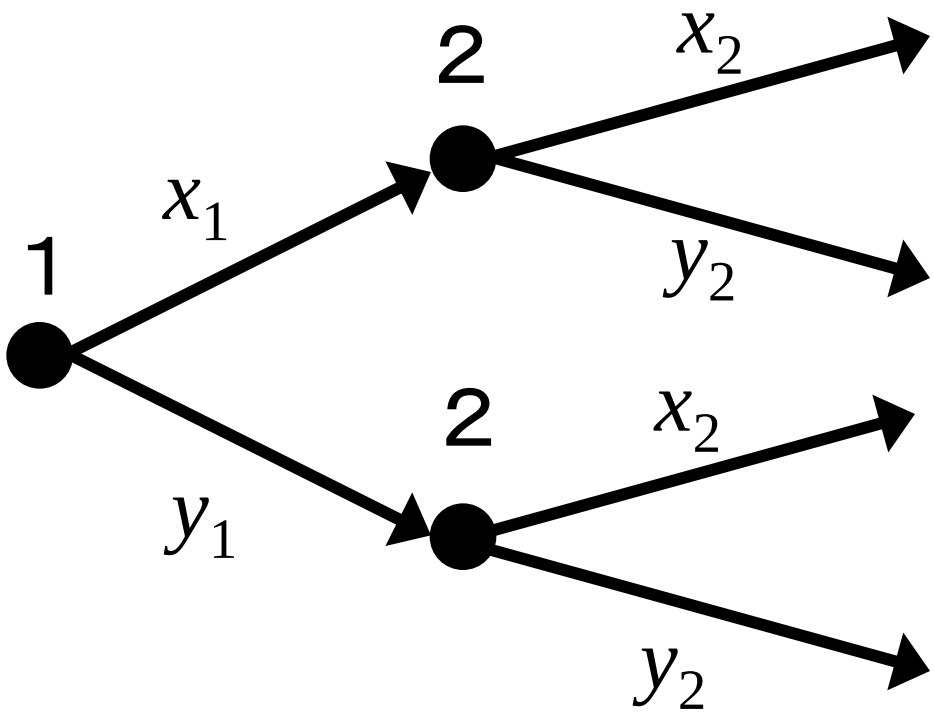
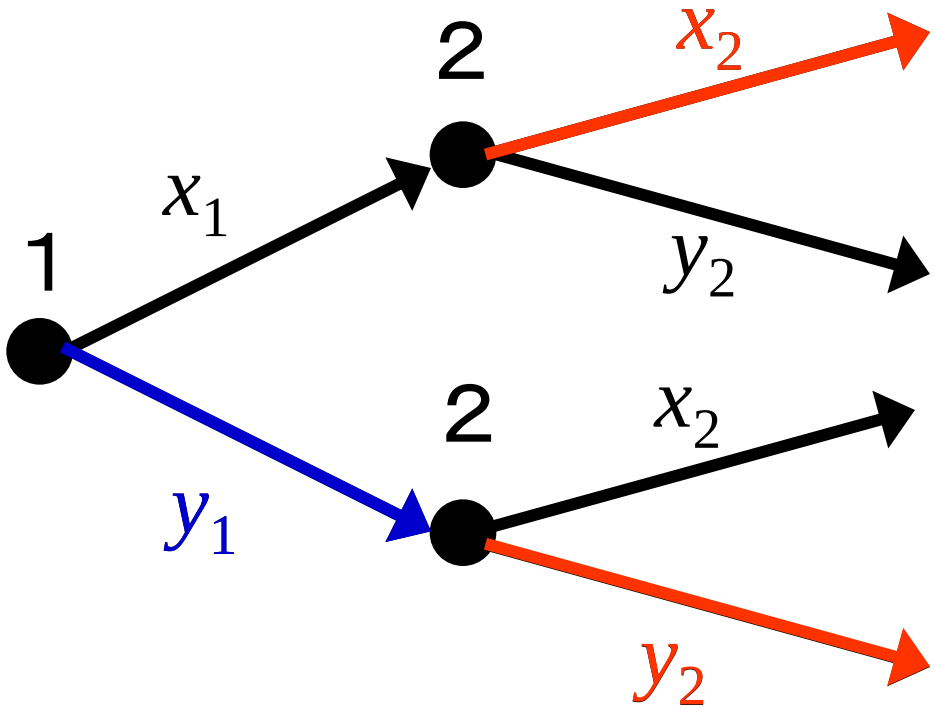
# 7. 一般の展開形ゲーム

# 復習（1）：　展開型ゲームはバックワードインダクションで解く




| プレイヤー1 | プレイヤー2 |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 6 | 3 |
| 1 | 2 |
| 3 | 6 |

# 復習（1）：　展開型ゲームはバックワードインダクションで解く




| プレイヤー1 | プレイヤー2 |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 6 | 3 |
| 1 | 2 |
| 3 | 6 |

# 一般の展開形ゲームを表現する

情報集合による表現

# 不完全情報の展開形ゲーム

- これまで習った展開形ゲーム
  - どのプレイヤーも自分より前に行動したプレイヤーのその行動が観察できる

→ **完全情報ゲーム**

- 一般には
  - 自分より前に行動したプレイヤーの行動が観察できないプレイヤーが存在する

→ **不完全情報ゲーム**

# 先のプレイヤーの行動が観察できない

- 戦略形ゲームは不完全情報ゲーム
  - 2人が同時に行動する戦略形ゲーム
  - 2人が交互に行動するが，先手の行動が後手には分からない展開形ゲーム

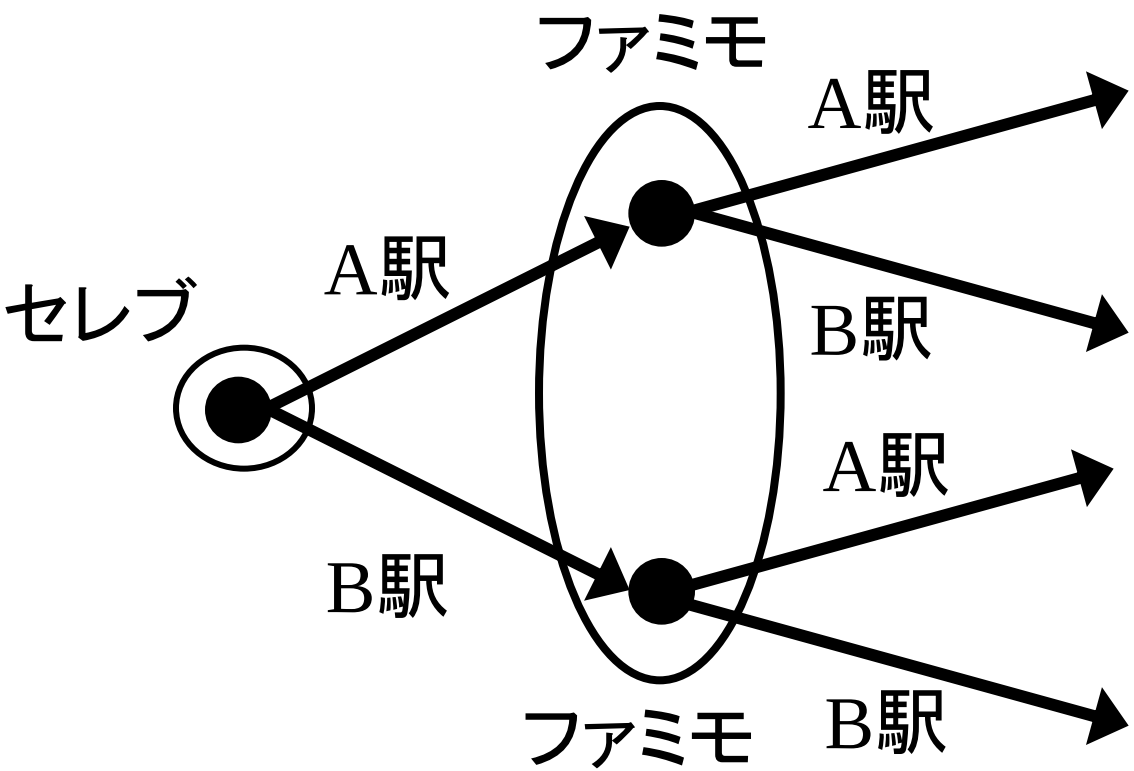
- 2つは同じゲームと考えることができる
  - 例)「面倒なじゃんけん」
  - 先手がグー，チョキ，パーを紙に書いて，後手がそれを見ずにじゃんけん

I市コンビニ戦争PART2を展開形ゲームで表してみよう

# モデル24　I市コンビニ戦争PART5

| ファミモ / セレブ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| A駅 | ( 300,300) | ( 600,400) |
| B駅 | ( 400,600) | (200,200) |

# 展開形ゲームで表現する




| セレブ | ファミモ |
|---|---|
| 300 | 300 |
| 600 | 400 |
| 400 | 600 |
| 200 | 200 |

意思決定点がグループ化され
線で囲まれている

→ **情報集合**

# 情報集合（information set）

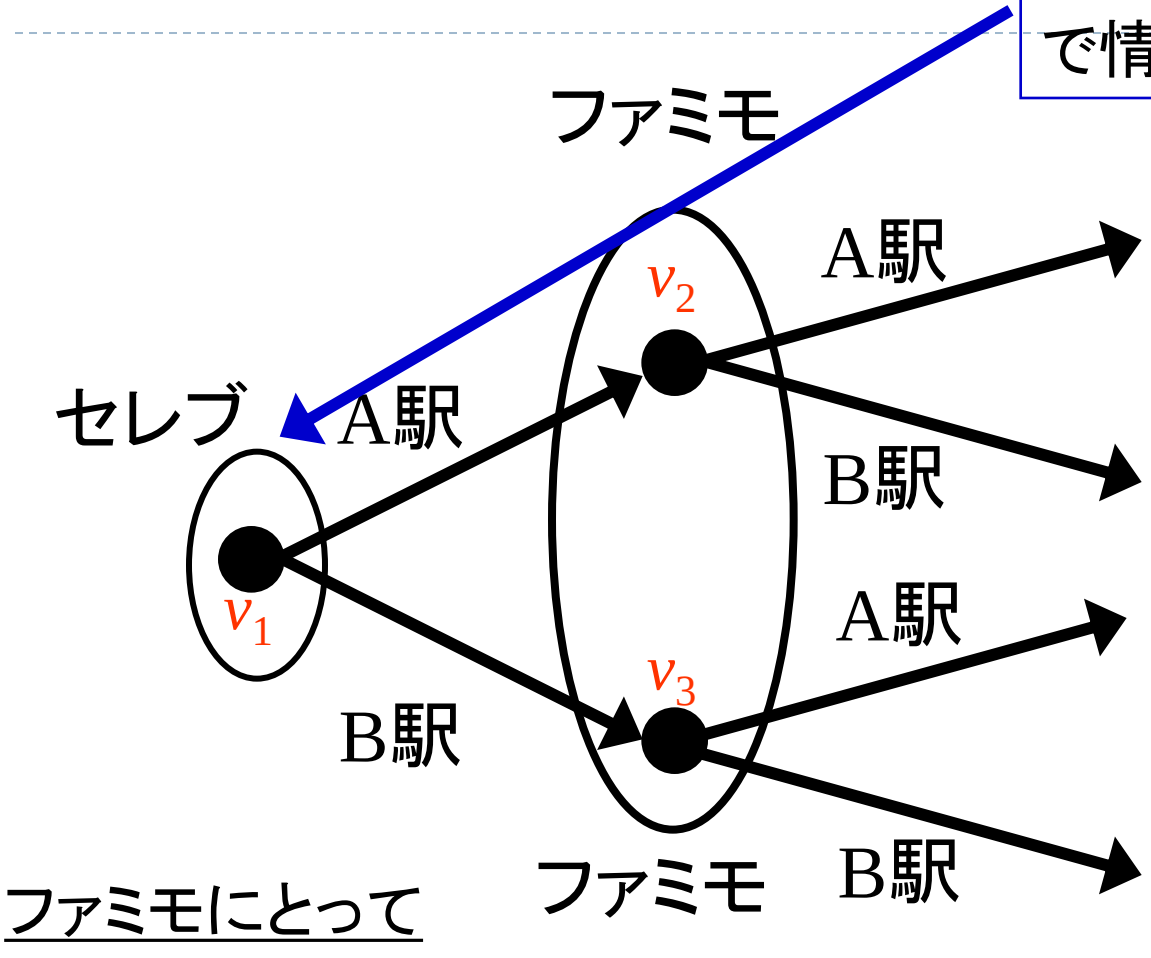
- 相手の行動が観察できない

＝自分がどの意思決定点にいるか識別できないと考える

- 識別できない点をグループ化して1つの集合と考える
- これを情報集合と呼ぶ

# 情報集合による表現

$v1$と識別できない点はないので情報集合に点は1つ




| セレブ | ファミモ |
|---|---|
| 300 | 300 |
| 600 | 400 |
| 400 | 600 |
| 200 | 200 |

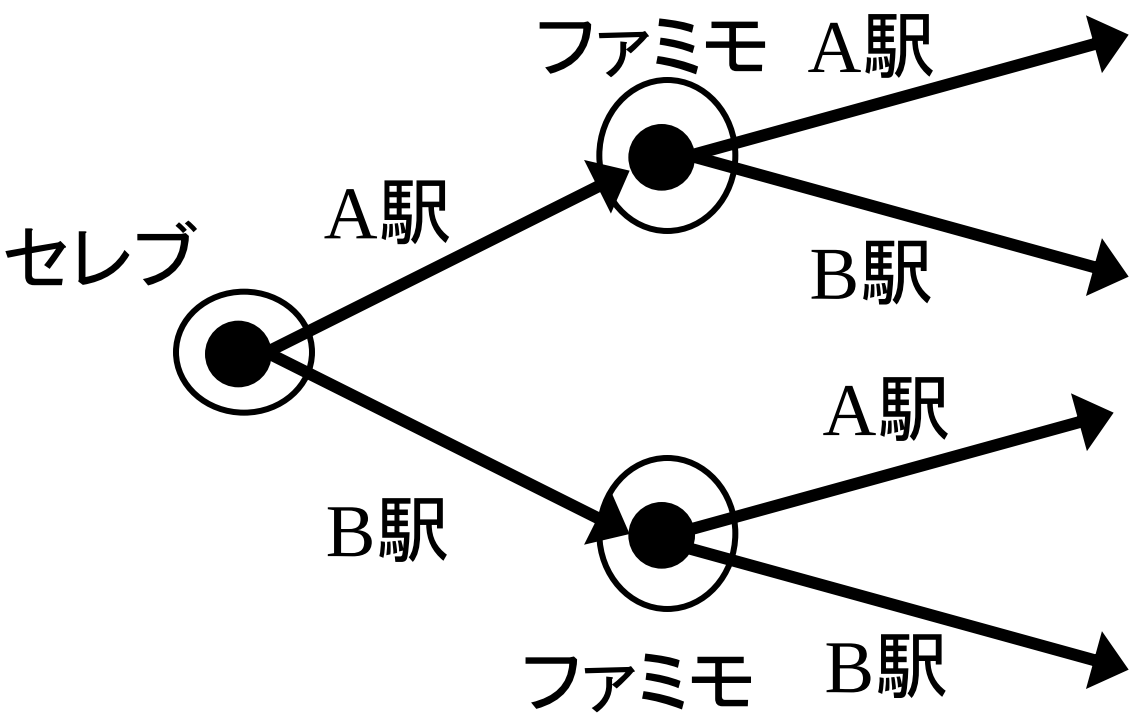
ファミモにとって

セレブがA駅を選んだのか，B駅を選んだのか観察できない

自分が$v_2$にいるのか，$v_3$にいるのか識別できない

# これまでの完全情報の展開形ゲームは？

面倒なときはこれからも
情報集合を省略します




| セレブ | ファミモ |
|---|---|
| 300 | 300 |
| 600 | 400 |
| 400 | 600 |
| 200 | 200 |

情報集合に点が
1つしかない

それ以前のプレイヤーの行
動は全て観察できる

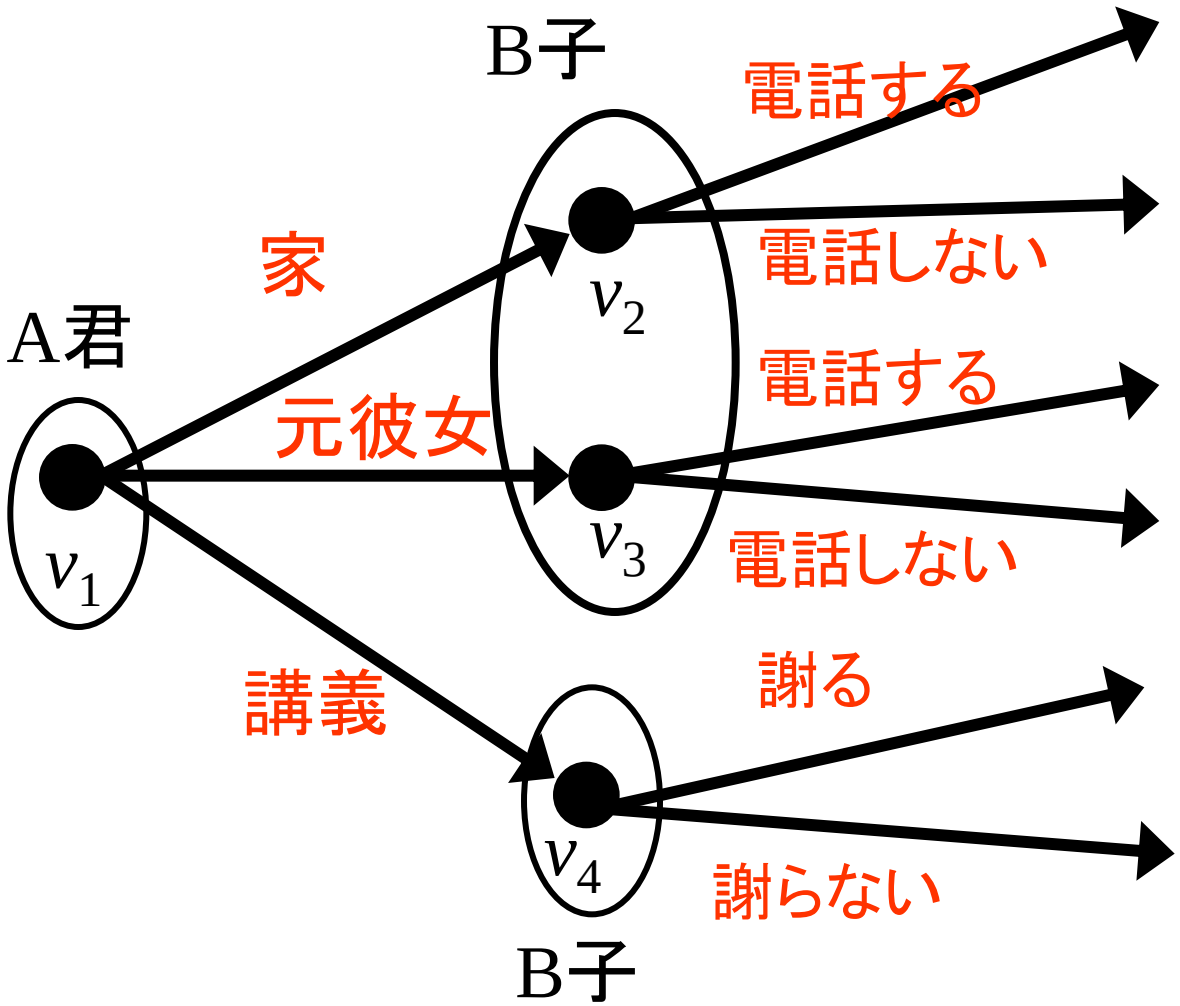
# 情報集合のルール

- 同じプレイヤーの意思決定点をグループ化したものでなければいけない
- 同じ情報集合の点に前後の関係があってはいけない
- 同じ情報集合の意思決定点から出る枝の代替案は全て同じでなければならない（当然，枝の数は同じでなければならない）
- この授業では情報集合には$H_1$, $H_2$や$H_{11}$, $H_{12}$などの記号が用いられる

# 同時とも交互とも言えないゲーム

- 同じクラスのA君とB子さんは，恋人同士
- 昨日喧嘩をした2人，B子さんは講義に出て彼を待つ
- B子さんはA君が講義に来たならば，彼に謝るか，謝らないかを決めようと思っている
- 一方，A君は，講義に出てB子さんに会おうか，元カノの所へ行こうか，1人で家にいようか迷っている
- 講義に来なかった場合，B子さんはA君に電話をするか，しないか決める
- ただそのとき彼がどちらに（家にいるかC子に会っているか）は重要な問題だが，B子はそれを分からない！

# 同時と交互とも言えないゲーム




情報集合を用いれば,

同時とも交互とも言えないような,様々なゲームを表現することができる

# 展開形ゲーム⇒戦略形ゲームの変換

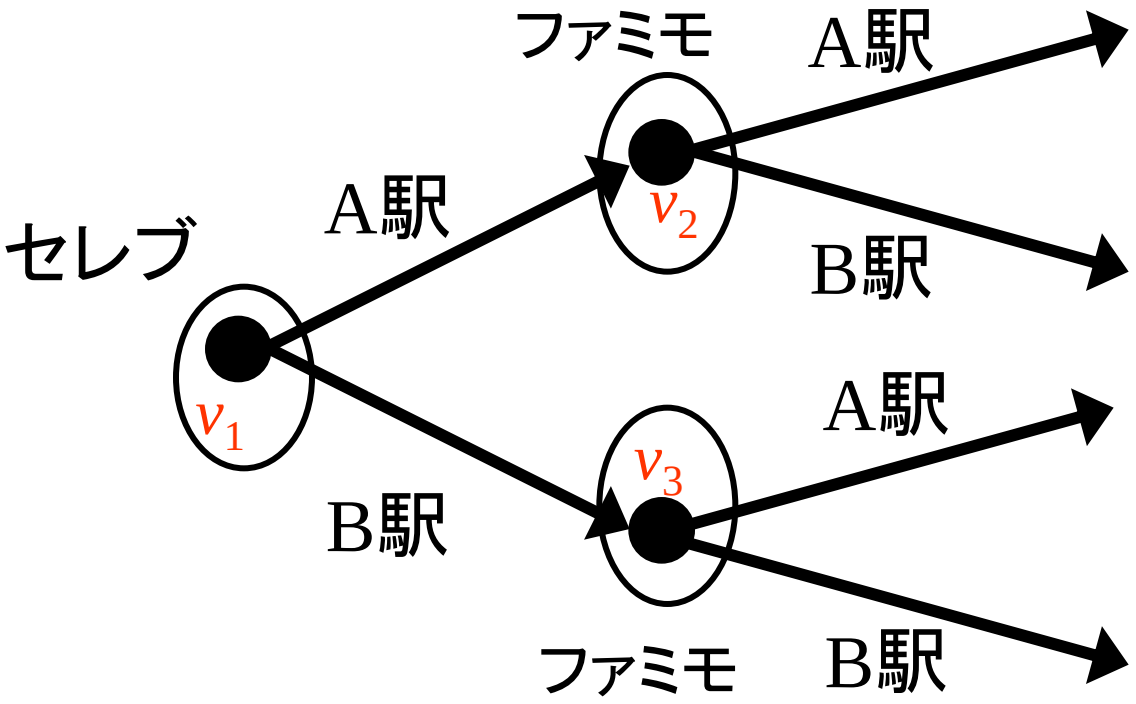
# 展開形ゲームの戦略とは？

- 戦略形ゲーム
  - プレイヤーが選択する行動が戦略
- 完全情報の展開形ゲームでは？
  - 完全情報ゲームの解
    - 各プレイヤーが，各意思決定点で，どの代替案を選択するか，を明らかにしたもの
  - そうだとすれば，各プレイヤーの戦略とは，どの意思決定点でどの行動を選ぶか，であると考えられる

# 完全情報展開形ゲームの戦略

セレブの戦略

「A駅」か「B駅」か？




| セレブ | ファミモ |
|---|---|
| 300 | 300 |
| 600 | 400 |
| 400 | 600 |
| 200 | 200 |

ファミモの戦略　ー　$v_2$ と $v_3$ で，それぞれどういう代替案を選択をするのか？

# 展開形ゲームの戦略（完全情報ゲーム）

- 展開形ゲームでは，「どの意思決定点でどの代替案を選ぶか」を詳細に示したものを戦略と呼ぶ
- 完全情報展開形ゲームでの戦略
- セレブの戦略「A駅」「B駅」の2つ
- ファミモの戦略・・・4つ

テキストでは行動戦略と名づけているが，講義では単に戦略と呼ぶことにする

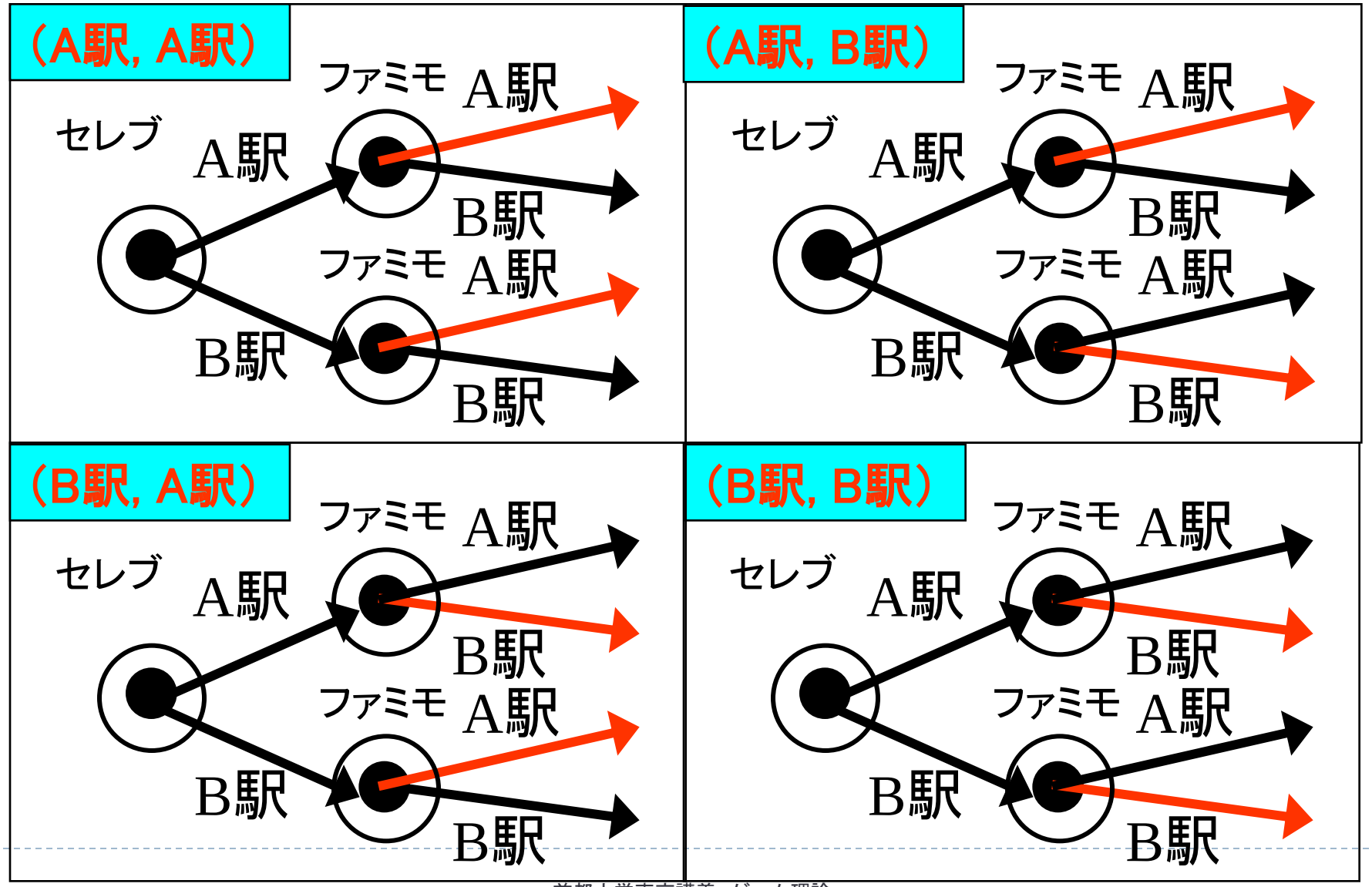
（A駅, A駅） $v_2$ でA駅を選び $v_3$ でもA駅を選ぶ

（A駅, B駅） $v_2$ でA駅を選び $v_3$ でB駅を選ぶ

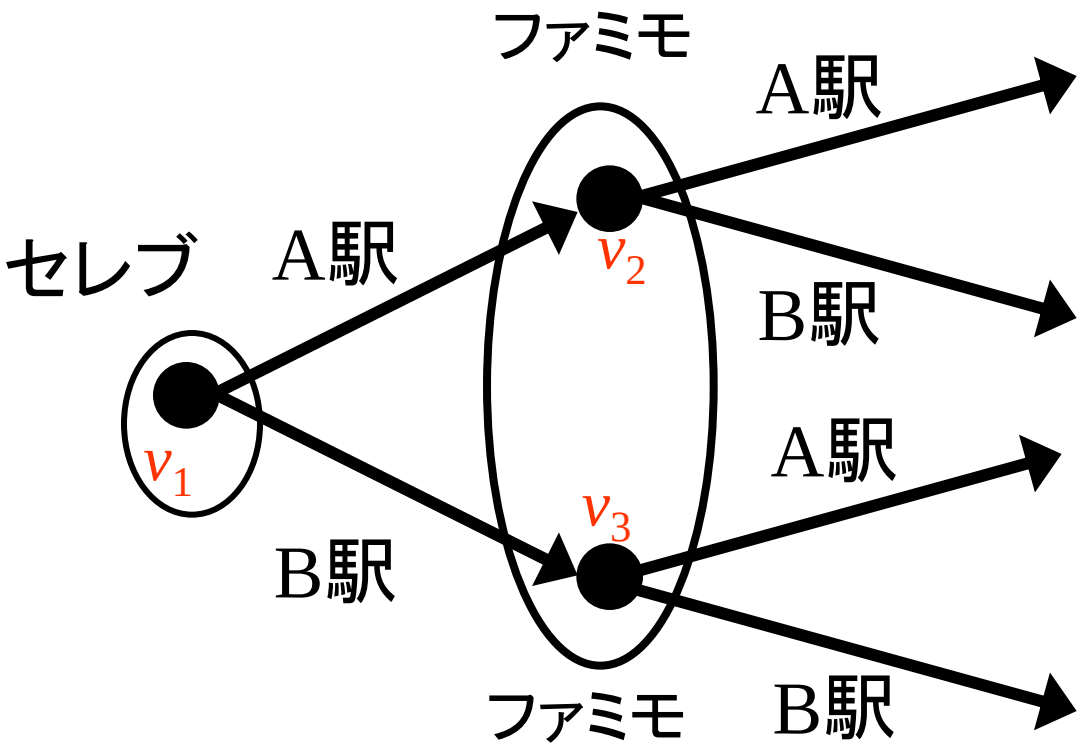
（B駅, A駅） $v_2$ でB駅を選び $v_3$ でA駅を選ぶ

（B駅, B駅） $v_2$ でB駅を選び $v_3$ でもB駅を選ぶ

# ファミモの4つの戦略


（A駅, A駅）
セレブ
A駅
ファミモ
A駅
B駅
ファミモ
A駅
B駅
B駅
（A駅, B駅）
セレブ
A駅
ファミモ
A駅
B駅
ファミモ
A駅
B駅
B駅
（B駅, A駅）
セレブ
A駅
ファミモ
A駅
B駅
ファミモ
A駅
B駅
B駅
（B駅, B駅）
セレブ
A駅
ファミモ
A駅
B駅
ファミモ
A駅
B駅
B駅

# 不完全情報の展開形ゲームでは？




| セレブ | ファミモ |
|---|---|
| 300 | 300 |
| 600 | 400 |
| 400 | 600 |
| 200 | 200 |

ファミモは$v2$と $v3$のどちらにいるか区別できない

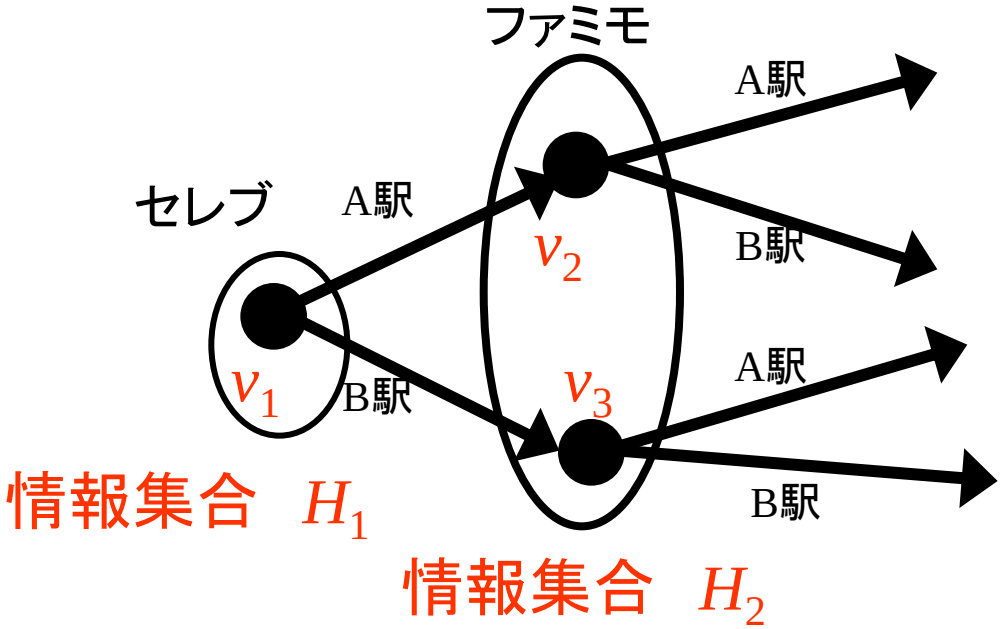
ファミモは$v2$と $v3$で，異なる代替案を選ぶのはおかしい！

# 一般の展開形ゲームの戦略

- 完全情報ではない一般の展開形ゲームでは，意思決定点ごとに行動を選べない⇒情報集合ごとに選ぶ
- 一般の展開形ゲームにおける各プレイヤーの戦略は，どの情報集合で，どの行動を選ぶか，をすべて示したものと考えられる
- セレブの戦略・・・情報集合H1で「A駅」「B駅」のどちらを選ぶかの2つ
- ファミモの戦略・・・情報集合H2で「A駅」「B駅」のどちらを選ぶかの2つ

# 戦略（一般の展開形ゲーム）

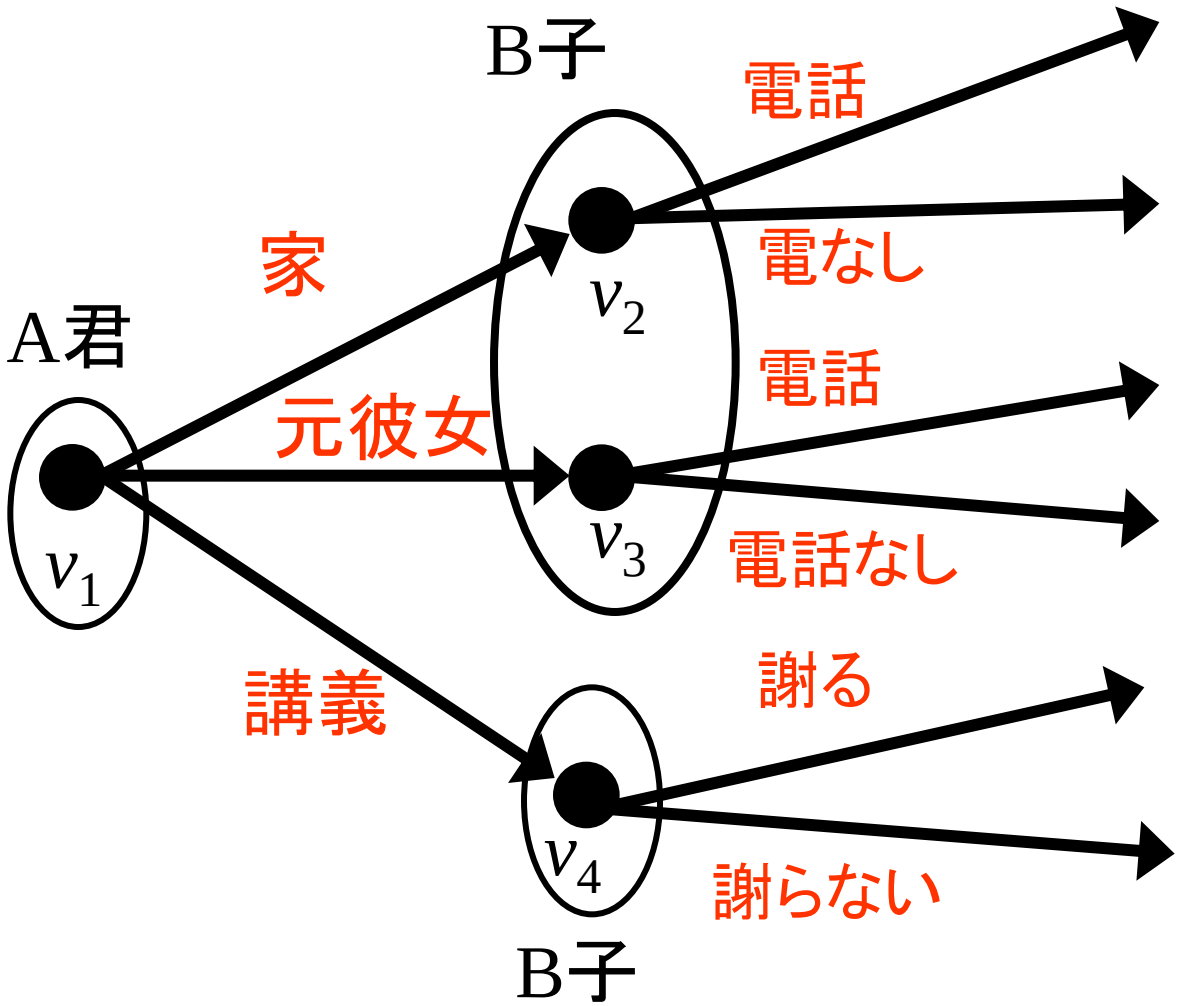
- 各プレイヤーが，「どの情報集合で，どの代替案を選ぶか」を示したものを，そのプレイヤーの戦略と呼ぶ
- セレブの戦略・・・情報集合H1で「A駅」「B駅」のどちらを選ぶかの2つ
- ファミモの戦略・・・情報集合H2で「A駅」「B駅」のどちらを選ぶかの2つ




各情報集合でどの代替案を選ぶかがプレイヤーの戦略

最重要！

# 演習：各プレイヤーの戦略




各プレイヤーの戦略を記せ

各プレイヤーの戦略は，何個あるか

# 戦略は「いつ」決める？

- 合理的なプレイヤー
  - 結果を観察しなくても，全ての場合にあらかじめどのような行動をするか考えておく
  - 相手の全ての行動に対して，起きうる全ての場合に対して，最適な行動を選択しておく
- 戦略はゲームが始まる前に立てる
  - 相手の行動を観察してからではない
  - 相手の行動が決まったら，あらかじめ決めた戦略に従って，粛々と行動する

# 展開形ゲーム⇒戦略形ゲーム

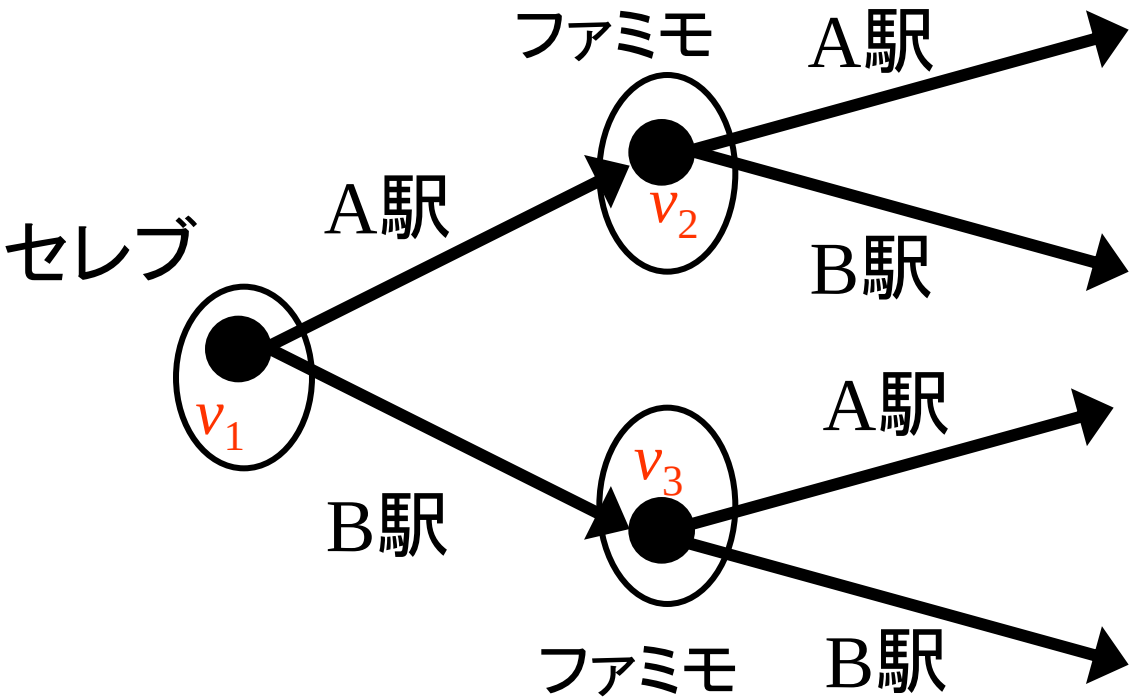
- そう考えると．．．合理的なプレイヤーは
  - ゲームが始まる前にあらかじめ
  - 全ての情報集合で，どのような行動をするかを
  - 綿密に考え，決めておく
- このとき相手がどの点で何をするかも徹底的に考える
- 相手もそうするはずだ

- すべてのプレイヤーは，ゲームが始まる前に，どの情報集合で何をするかを同時に決める戦略形ゲームをしていることになる！

↓

展開形ゲームは戦略形ゲームに変換できる！

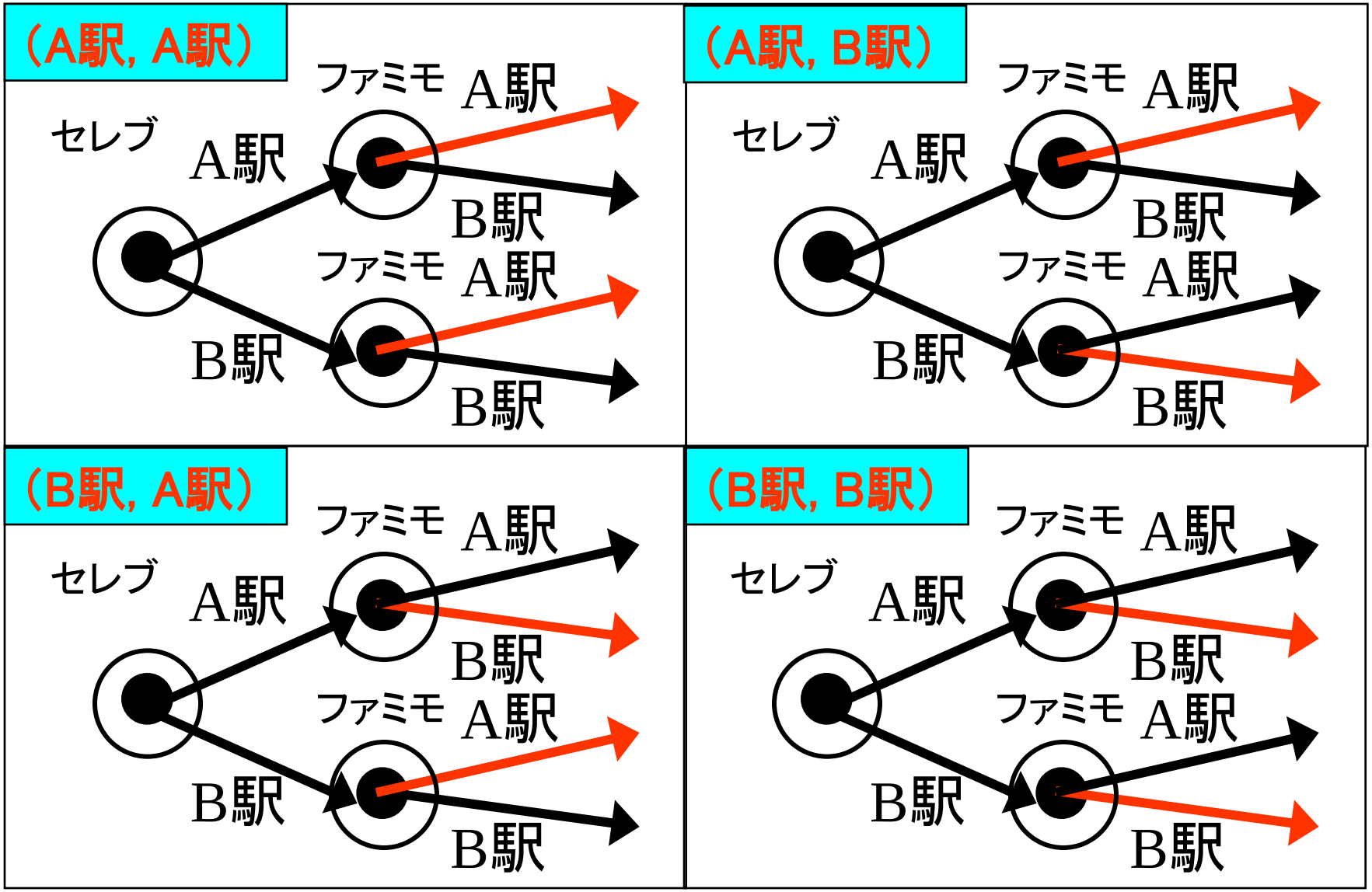
# 展開形ゲーム⇒戦略形ゲーム：例1




| | セレブ | ファミモ |
|---|---|---|
| | 300 | 300 |
| | 600 | 400 |
| | 400 | 600 |
| | 200 | 200 |

この完全情報の展開形ゲームを戦略形ゲームに変換してみよう

# ファミモの戦略を確認：例1



# 展開形ゲーム⇒戦略形ゲーム：例1

| ファミモ / セレブ | (A駅,A駅) | (A駅,B駅) | (B駅,A駅) | (B駅,B駅) |
|---|---|---|---|---|
| A駅 | (300,300) | (300,300) | (600,400) | (600,400) |
| B駅 | (400,600) | (200,200) | (400,600) | (200,200) |

利得行列の見方

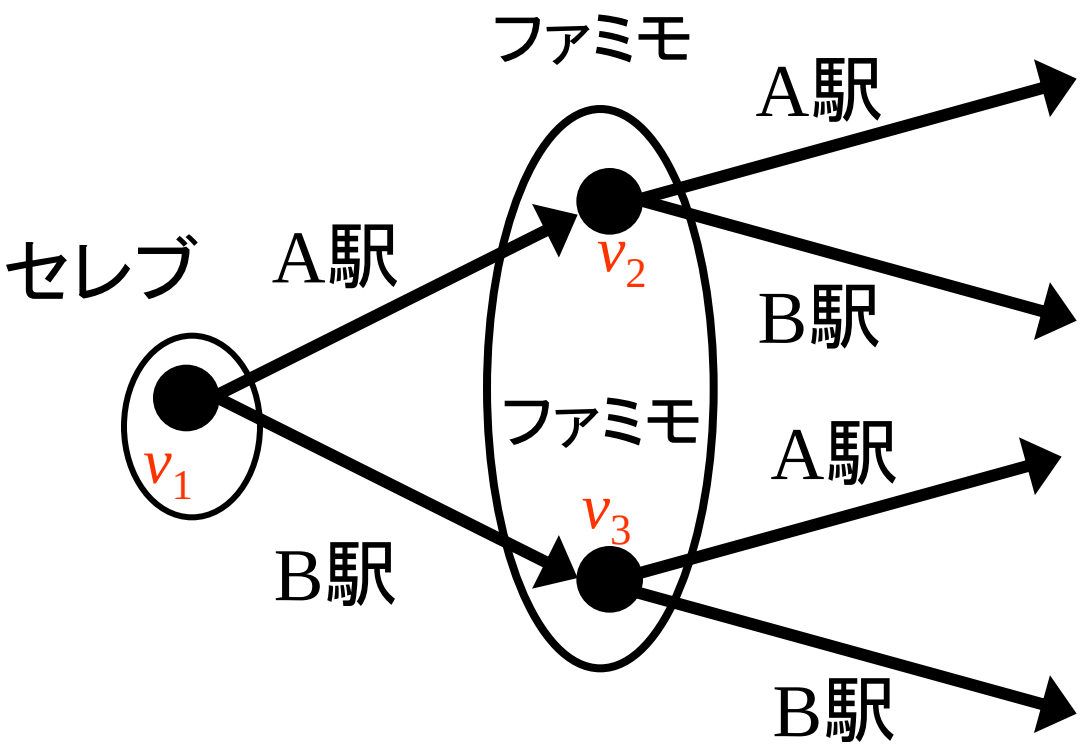
セレブがA駅，ファミモが (A駅,B駅)を選んだとき

(A駅,B駅) → ファミモはセレブがA駅を選んだならA駅を，セレブがB駅を選んだらB駅を選ぶ

結果はセレブがA駅，ファミモもA駅を選ぶ →利得は(300,300)

(A駅,B駅)の右側しか影響しないことに注意

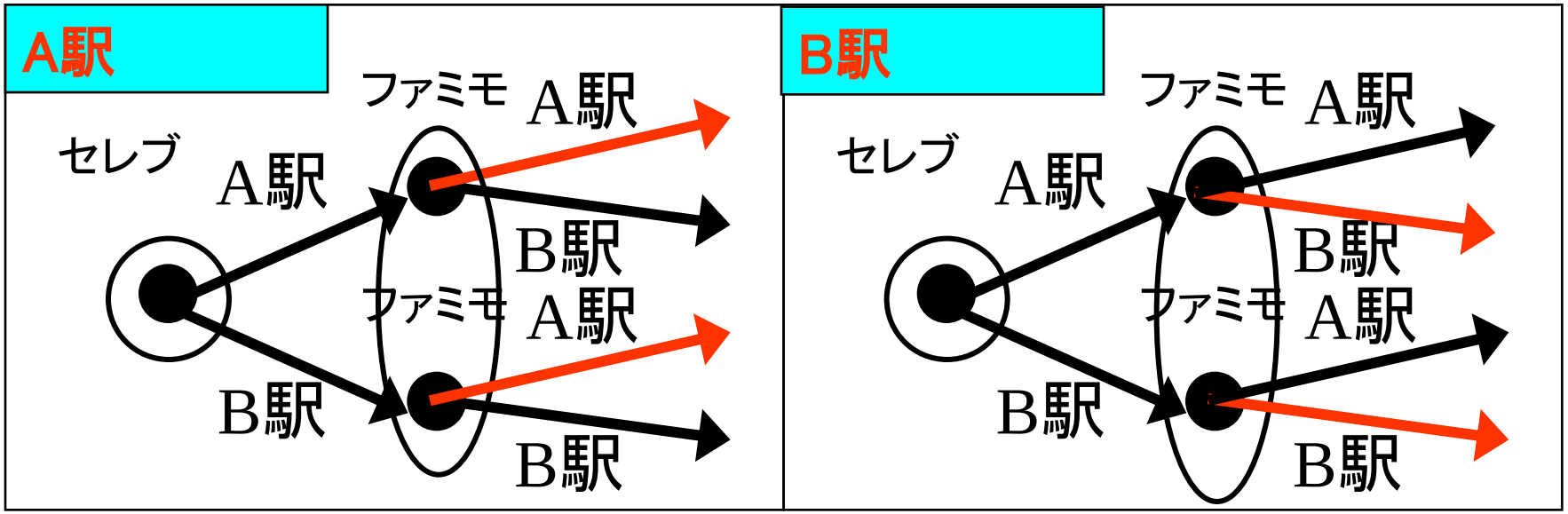
# 展開形ゲーム⇒戦略形ゲーム：例2




| | セレブ | ファミモ |
|---|---|---|
| A駅 | 300 | 300 |
| B駅 | 600 | 400 |
| A駅 | 400 | 600 |
| B駅 | 200 | 200 |

今度はこの不完全情報の展開形ゲームを戦略形ゲームに変換してみよう

# ファミモの戦略を確認：例2



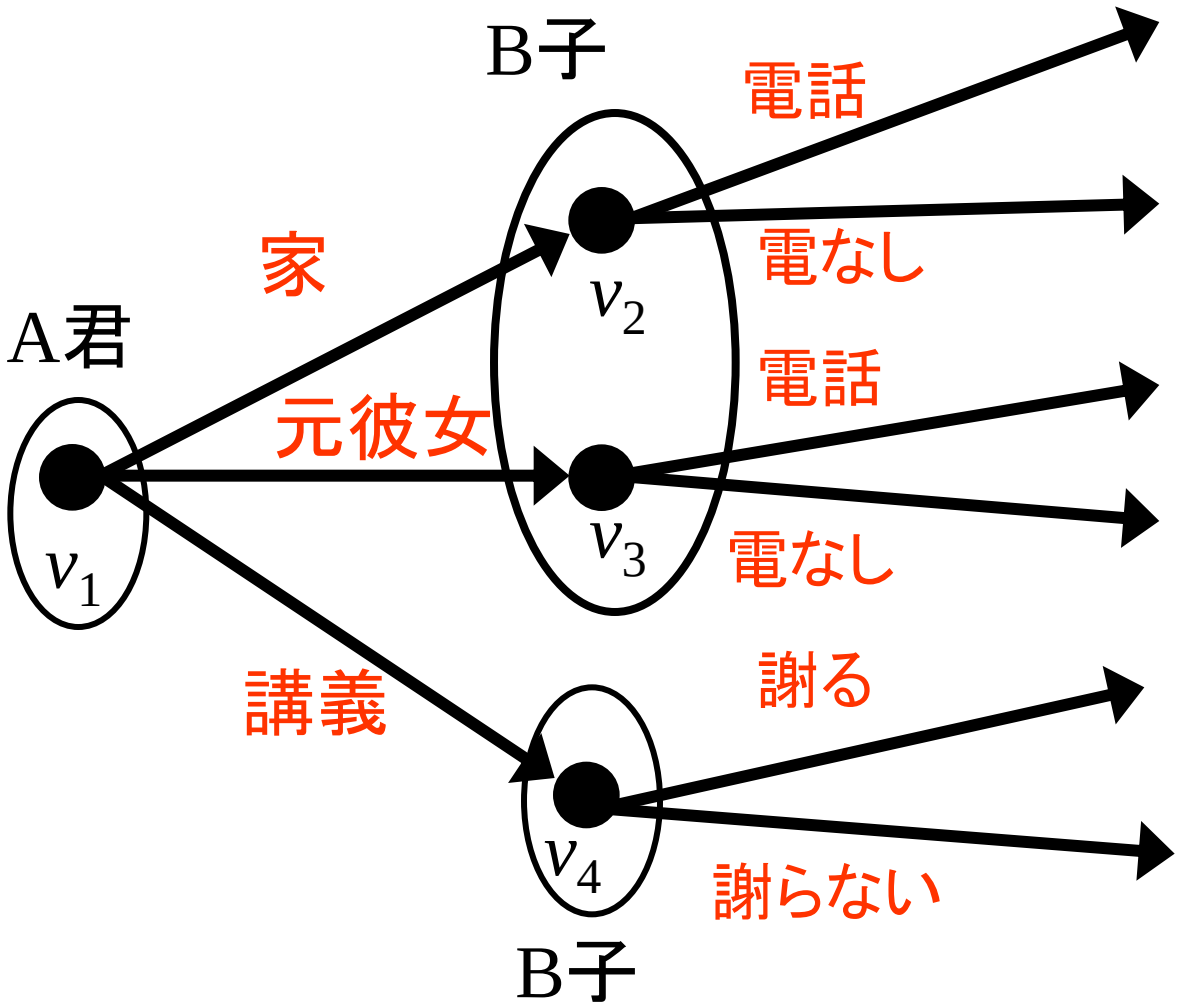

今度は，戦略は2つ

# 展開形ゲーム⇒戦略形ゲーム：例2

| ファミモ ＼ セレブ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| A駅 | ( 300,300) | ( 600,400) |
| B駅 | ( 400,600) | (200,200) |

もともとの戦略形ゲームである！

# 演習１:A君とB子のゲーム




| A君 | B子 |
|---|---|
| 3 | 3 |
| 0 | 0 |
| −3 | −3 |
| 1 | −1 |
| 4 | 1 |
| −2 | −2 |

戦略形ゲームに変換せよ

# A君とB子のゲーム

| B子 / A君 | (電話,謝る) | (電話,非謝) | (非電,謝る) | (非電,非謝) |
|---|---|---|---|---|
| 家 | ( 3 , 3 ) | ( 3 , 3 ) | | |
| 元カノ | ( -3, -3) | | | |
| 講義 | ( 4 , 1 ) | | | |

- B子の戦略は,「A君が講義に来ない時」(家か，元彼女を選んだとき)をカッコの左に,「A君が講義に来た時」をカッコの右に書く.

# A君とB子のゲーム：kibaco入力用

| B子 / A君 | (電話,謝る) | (電話,非謝) | (非電,謝る) | (非電,非謝) |
|---|---|---|---|---|
| 家 | (3, 3) | (a, b) | (c, d) | (0, 0) |
| 元カノ | (-3, -3) | (-3, -3) | (e, f) | (1, -1) |
| 講義 | (4, 1) | (g, h) | (4, 1) | (-2, -2) |

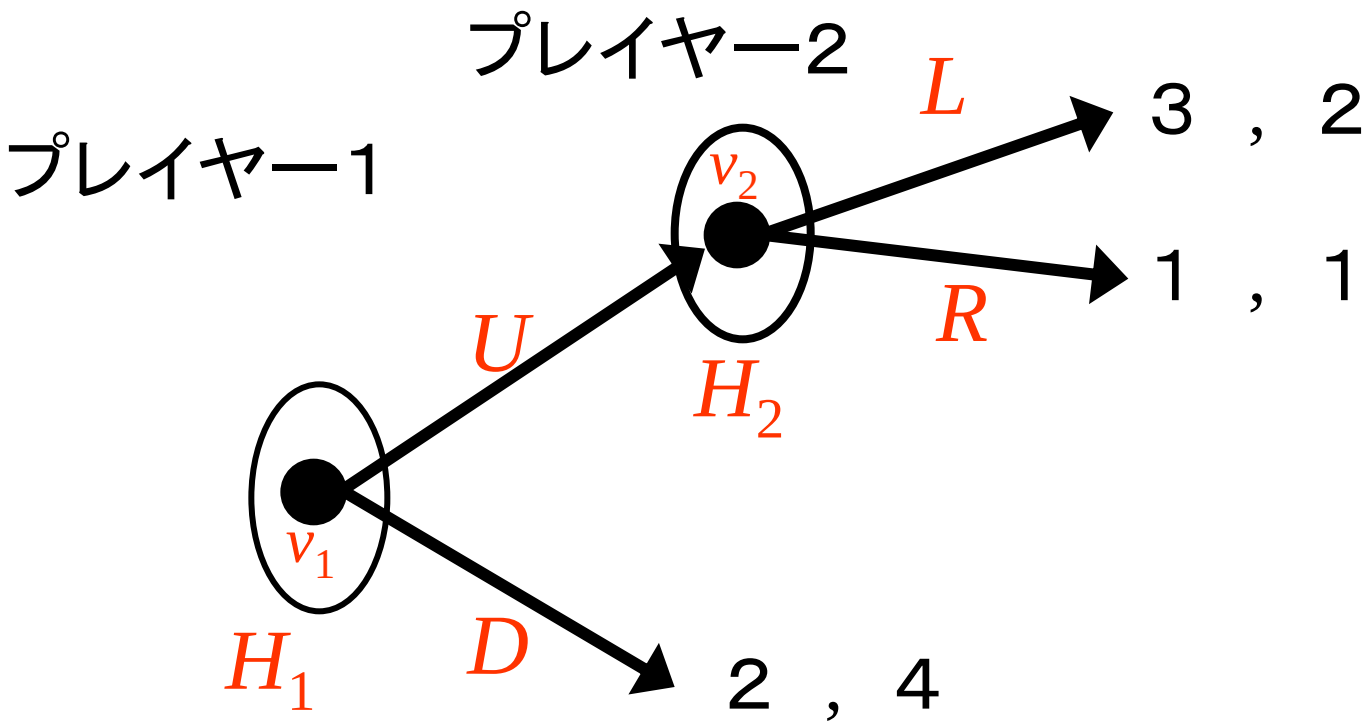
- B子の戦略は，「A君が講義に来ない時」（家か，元彼女を選んだとき）をカッコの左に，「A君が講義に来た時」をカッコの右に書くものとする.

# A君とB子のゲーム

| A君＼B子 | (電話,謝る) | (電話,非謝) | (非電,謝る) | (非電,非謝) |
|---|---|---|---|---|
| 家 | (3, 3) | (3, 3) | (0, 0) | (0, 0) |
| 元カノ | (-3, -3) | (-3, -3) | (1, -1) | (1, -1) |
| 講義 | (4, 1) | (-2, -2) | (4, 1) | (-2, -2) |

早く解きたい！

# 演習2:戦略形ゲームへの変換2



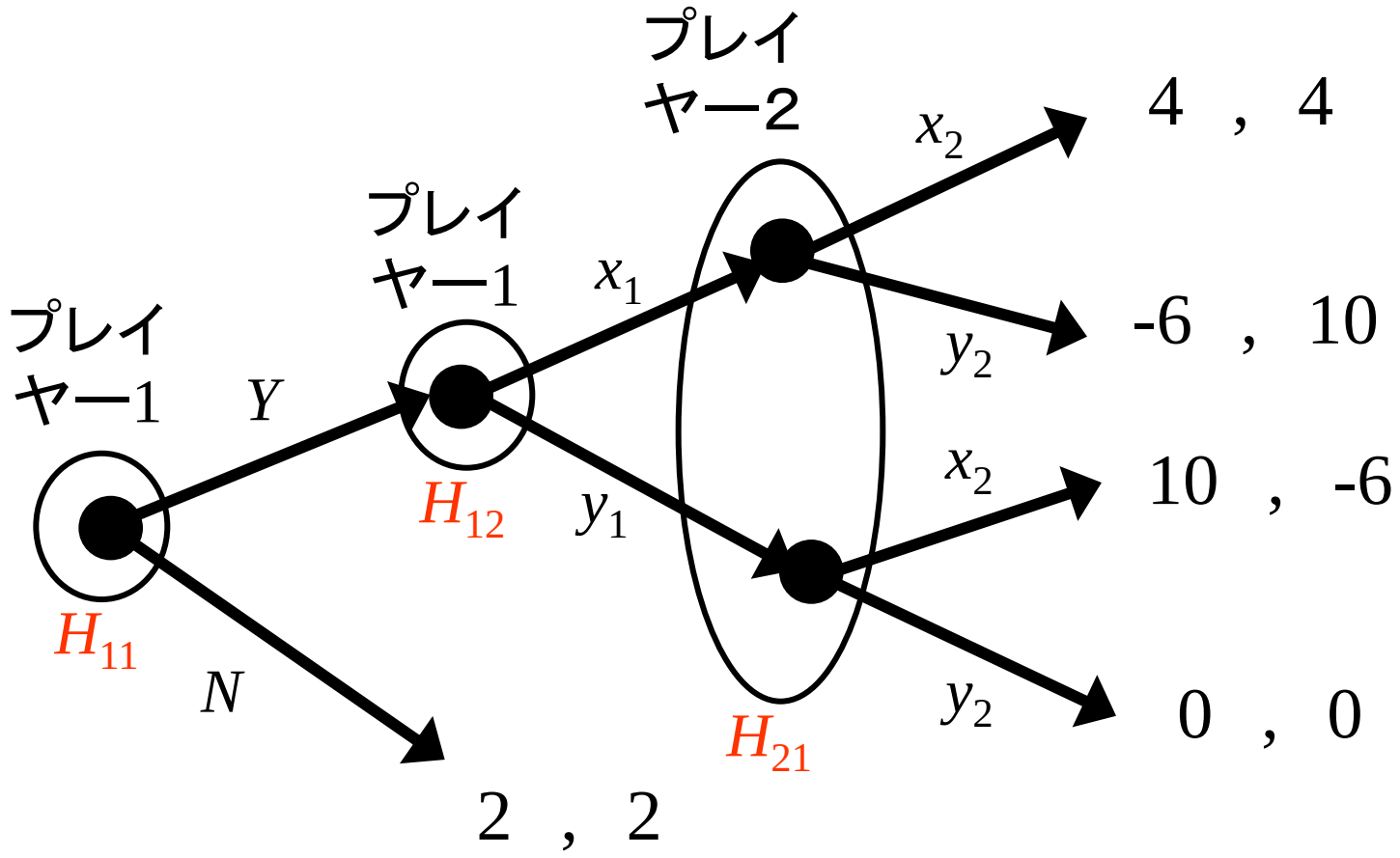

戦略形ゲームに直せ

# 演習２:戦略形ゲームへの変換２

| プレイヤー２ / プレイヤー１ | L | R |
|---|---|---|
| U | ( 3 , 2 ) | ( 1 , 1 ) |
| D | ( 2 , 4 ) | ( 2 , 4 ) |

もともとの戦略形ゲームである！

# 宿題　ゲーム1：戦略形ゲームへの変換




- プレイヤー1は，$H_{11}$と$H_{12}$で選ぶ戦略をカッコに並べて書くものとする．
- 例えば，$H_{11}$で$Y$，$H_{12}$で$x_1$を選ぶ戦略は$(Y, x_1)$

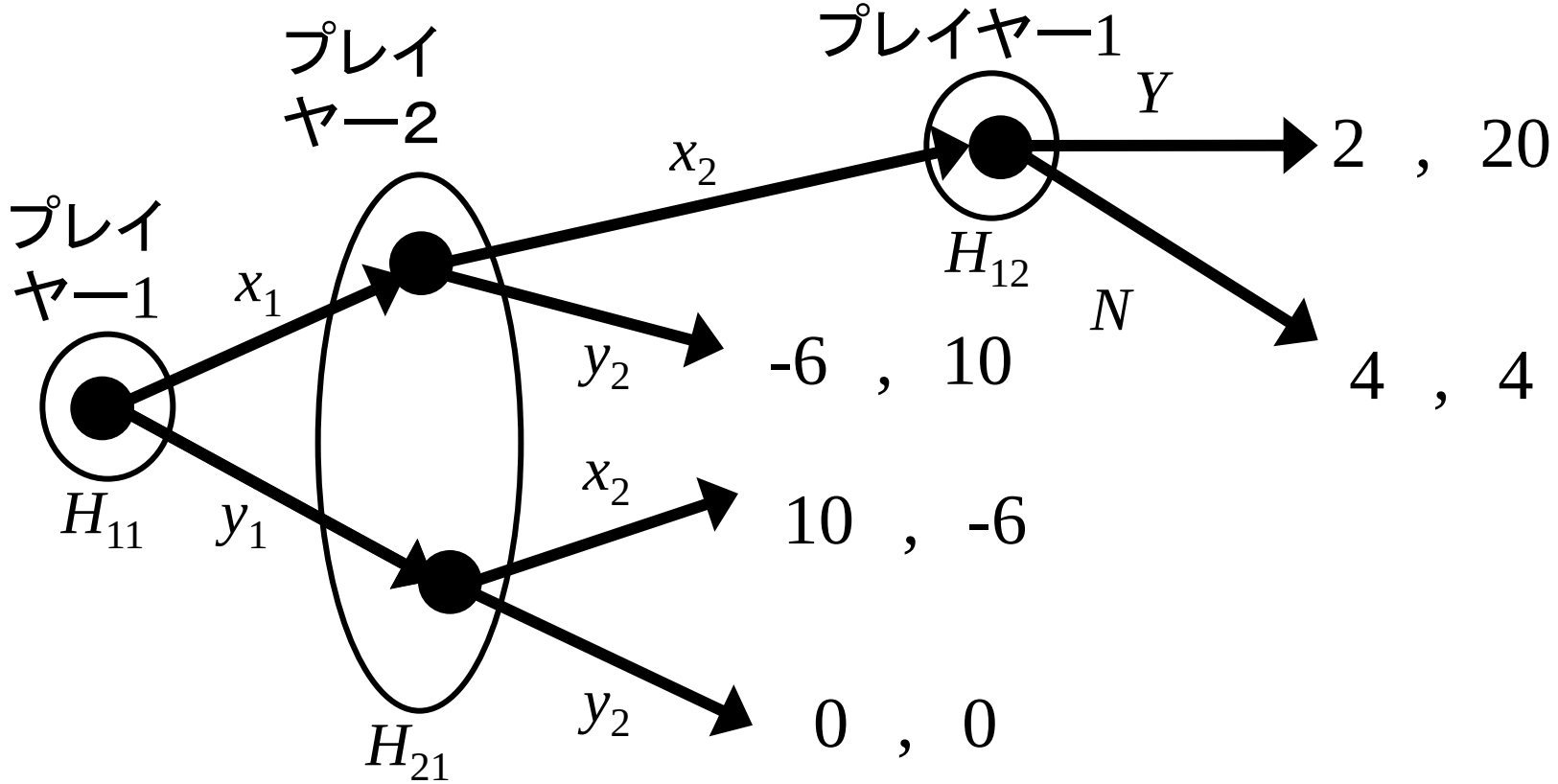
# 宿題　ゲーム1：戦略形ゲームへの変換

| 1 \ 2 | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $(Y, x_1)$ | ( a , b ) | ( c , d ) |
| $(Y, y_1)$ | ( 10 , -6 ) | ( e , f ) |
| $(N, x_1)$ | ( g , h ) | ( 2 , 2 ) |
| $(N, y_1)$ | ( 2 , 2 ) | ( 2 , 2 ) |

# 宿題　ゲーム1：戦略形ゲームへの変換

| 1 \ 2 | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $(Y, x_1)$ | ( 4 , 4 ) | ( -6 , 10 ) |
| $(Y, y_1)$ | ( 10 , -6 ) | ( 0 , 0 ) |
| $(N, x_1)$ | ( 2 , 2 ) | ( 2 , 2 ) |
| $(N, y_1)$ | ( 2 , 2 ) | ( 2 , 2 ) |

# 宿題　ゲーム2:戦略形ゲームへの変換




- プレイヤー1は，$H_{11}$と$H_{12}$で選ぶ戦略をカッコに並べて書くものとする.
- 例えば，$H_{11}$で$x_1$，$H_{12}$で $Y$ を選ぶ戦略は$(x_1, Y)$

# 宿題　ゲーム2:戦略形ゲームへの変換

| 1 \ 2 | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $(x_1, Y)$ | ( 2 , 20 ) | ( -6 , 10 ) |
| $(x_1, N)$ | ( a , b ) | ( c , d ) |
| $(y_1, Y)$ | ( e , f ) | ( g , h ) |
| $(y_1, N)$ | ( 10 , -6 ) | ( 0 , 0 ) |

# 宿題　ゲーム2:戦略形ゲームへの変換

| 1 \ 2 | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $(x_1, Y)$ | ( 2 , 20 ) | ( -6 , 10 ) |
| $(x_1, N)$ | ( 4 , 4 ) | ( -6 , 10 ) |
| $(y_1, Y)$ | ( 10 , -6 ) | ( 0 , 0 ) |
| $(y_1, N)$ | ( 10 , -6 ) | ( 0 , 0 ) |

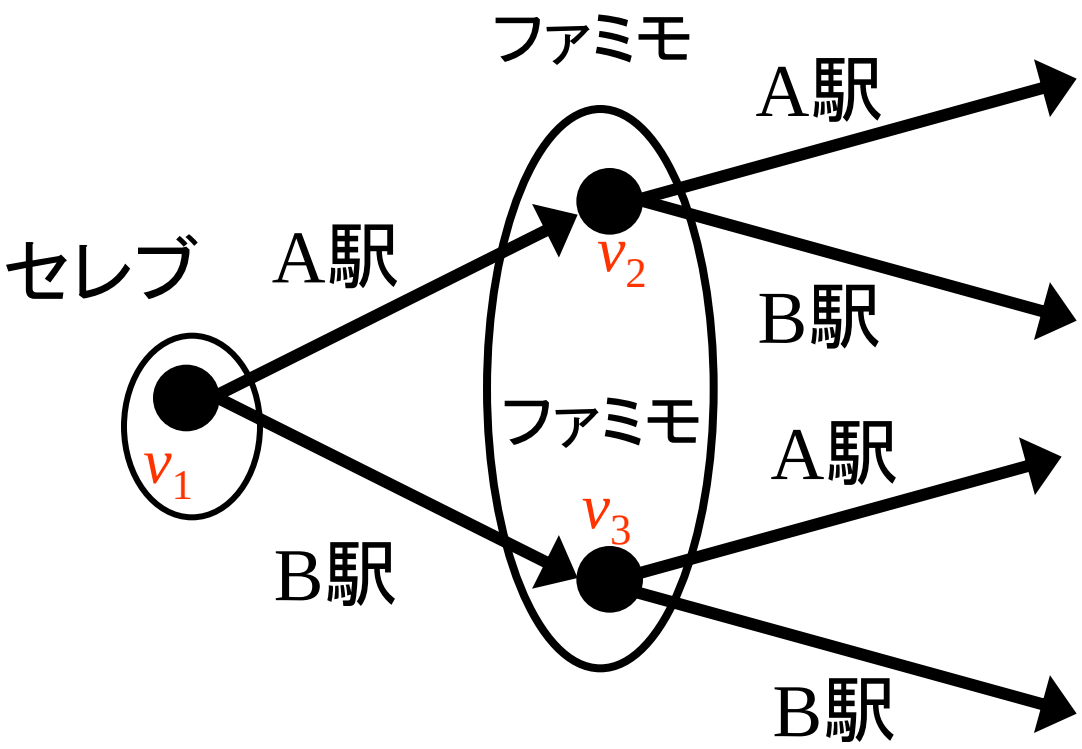
# 一般の展開形ゲームを解く

ナッシュ均衡と部分ゲーム完全均衡

# ゲームの解はやっぱりナッシュ均衡

- このように
  - 戦略をゲームの始まる前に決めておき
  - 展開形ゲームも戦略形ゲームに変換できるならば
- お互いがゲームの開始前にたどりつくゲームの解はナッシュ均衡になるはず！
- 戦略形ゲームも展開形ゲームもすべて統一した原理で解くことができる！

# 展開形ゲームの解を求める：例2




| セレブ | ファミモ |
|---|---|
| 300 | 300 |
| 600 | 400 |
| 400 | 600 |
| 200 | 200 |

このゲームの解は？

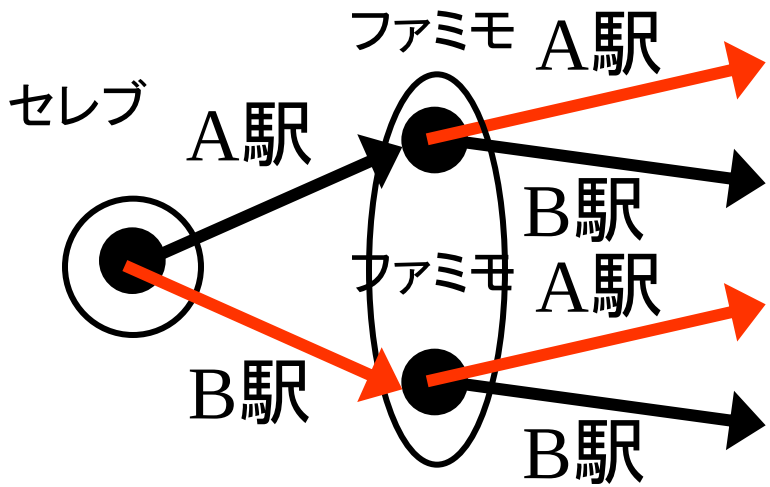
# 例2の解

| セレブ＼ファミモ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| A駅 | ( 300,300) | ( 600,400) |
| B駅 | ( 400,600) | (200,200) |

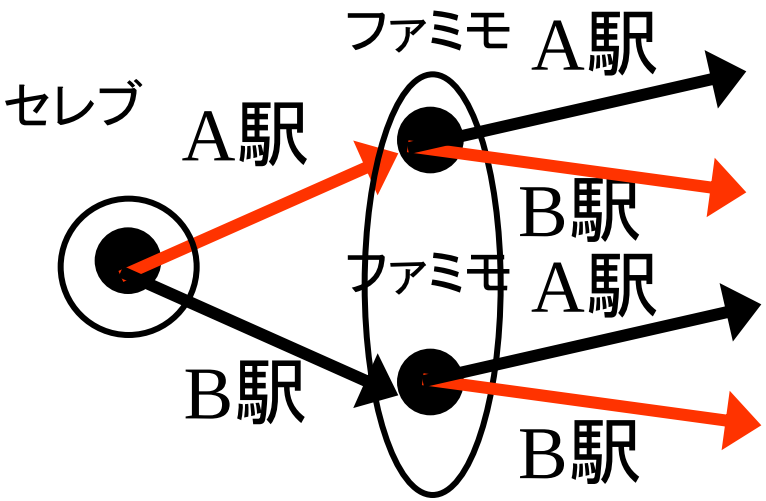
ナッシュ均衡は2つ

# 展開形ゲームの解を求める：例2

**ナッシュ均衡1**




**ナッシュ均衡2**




２つのナッシュ均衡を表現

# 展開形ゲームの解を求める:例1の場合

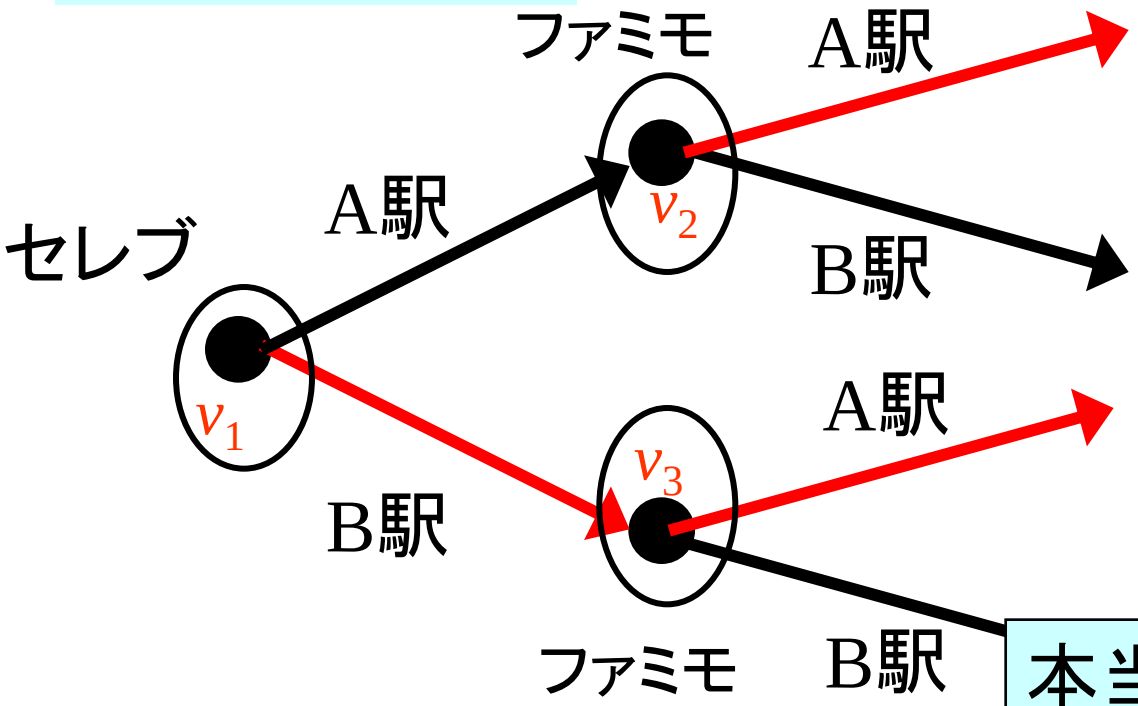
| ファミモ / セレブ | (A駅,A駅) | (A駅,B駅) | (B駅,A駅) | (B駅,B駅) |
|---|---|---|---|---|
| A駅 | (300,300) | (300,300) | (600,400) | (600,400) |
| B駅 | (400,600) | (200,200) | (400,600) | (200,200) |

ナッシュ均衡は3つ

？この3つは本当に適切なゲームの解か？

# ナッシュ均衡は3つある

(B駅,(A駅,A駅))




| セレブ | ファミモ |
|---|---|
| 300 | 300 |
| 600 | 400 |
| 400 | 600 |

本当？

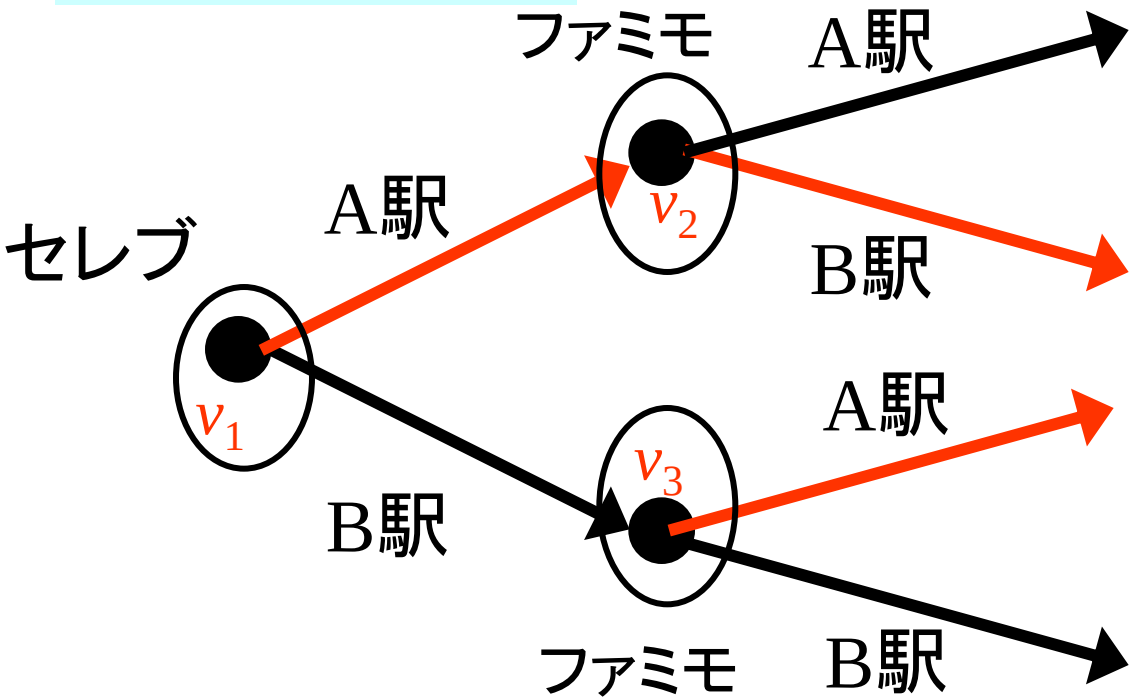
先読み解ではない！？

セレブはA駅に戦略を変えても利得

ファミモは(A駅,B駅) (B駅,A駅) (B駅,B駅)に変えても利得は高くならない　**確かにナッシュ均衡**

# 先読み解はナッシュ均衡

(A駅,(B駅,A駅))



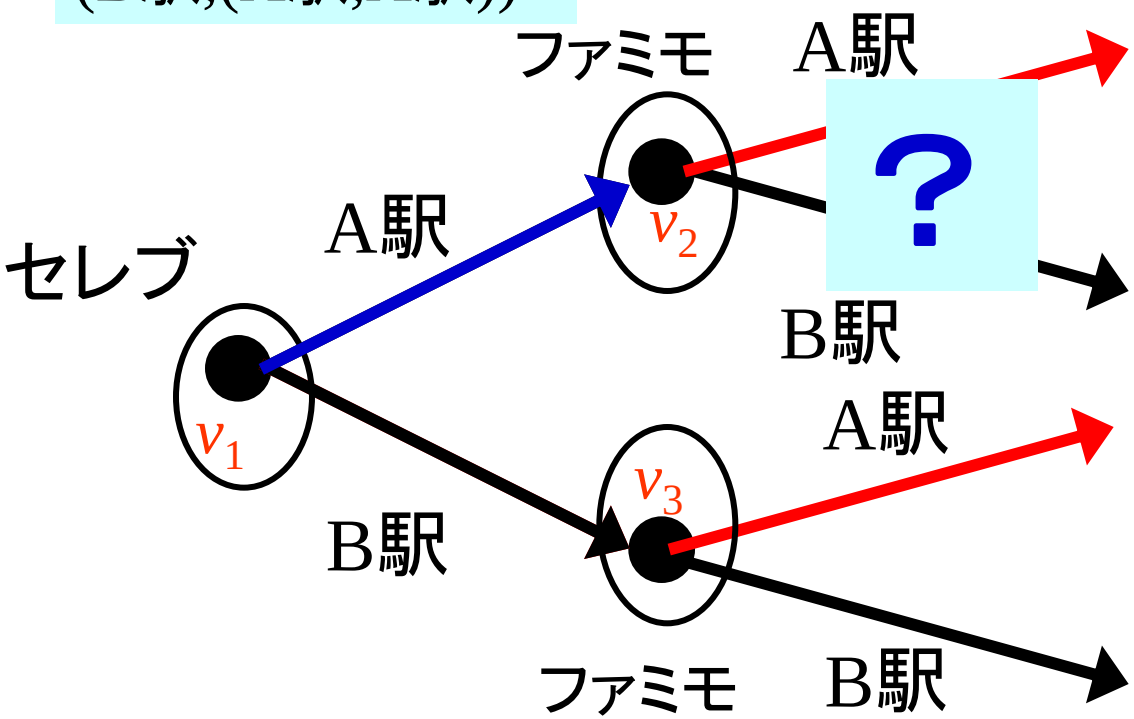

| セレブ | ファミモ |
|---|---|
| 300 | 300 |
| 600 | 400 |
| 400 | 600 |
| 200 | 200 |

セレブはB駅に戦略を変えても利得は高くならない

ファミモは(A駅,B駅) (A駅,A駅) (B駅,B駅)に変えても利得は高くならない

# もしもセレブがB駅に戦略を変えれば？

(B駅,(A駅,A駅))




| セレブ | ファミモ |
|---|---|
| 300 | 300 |
| 600 | 400 |
| 400 | 600 |
| 200 | 200 |

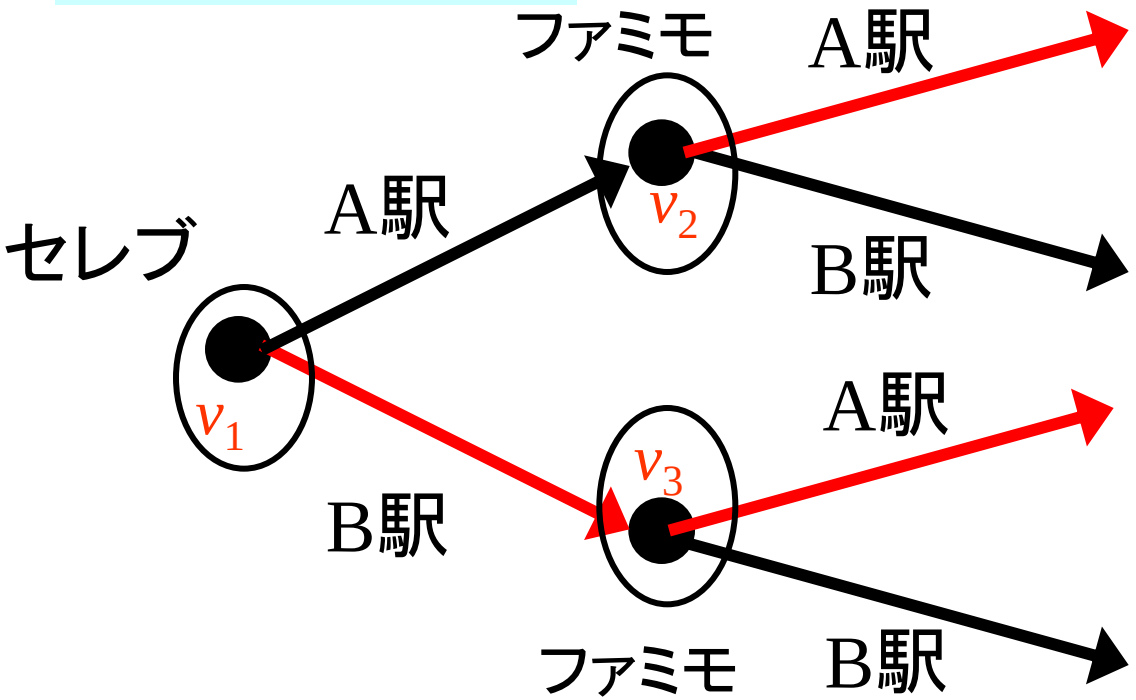
セレブはA駅に戦略を変えても利得は高くならない　本当？

もし，セレブがA駅に戦略を変えれば，それを観察したファミモは？

もはやA駅を選択しないはず

# 信憑性のない脅し

(B駅,(A駅,A駅))




| セレブ | ファミモ |
|---|---|
| 300 | 300 |
| 600 | 400 |
| 400 | 600 |
| 200 | 200 |

(A駅,A駅)という戦略は，「信憑性のない脅し」「拘束力のない口約束」と同じ構造を持っている･･･もし本当に$v_2$で意思決定する機会が来れば，ファミモはA駅を選ばない

# 先読みの概念の必要性

- 展開形ゲームを戦略形ゲームに直して考えるだけではいけない
  - セレブがA駅を選択することになっていれば，ファミモのB駅の選択はファミモには関係ないので，何を選んでも良い
  - しかし，その選択はセレブには影響する
  - 望ましくないナッシュ均衡を導く可能性
- 「先読み」の概念を入れて，展開形ゲームのナッシュ均衡を精緻化する必要がある

# 展開形ゲームの解を求める：例1の場合

| ファミモ<br>セレブ | (A駅,A駅) | (A駅,B駅) | (B駅,A駅) | (B駅,B駅) |
|---|---|---|---|---|
| A駅 | (300,300) | (300,300) | (600,400) | ~~(600,400)~~ |
| B駅 | ~~(400,600)~~ | (200,200) | (400,600) | (200,200) |

ナッシュ均衡3つの中には，良いナッシュ均衡と悪いナッシュ均衡がある

先読み解を選んでナッシュ均衡を精緻化する！

NABENAVI .net

# ポイント44

先読み解は，ナッシュ均衡を精緻化したものである

# それならもう習った？

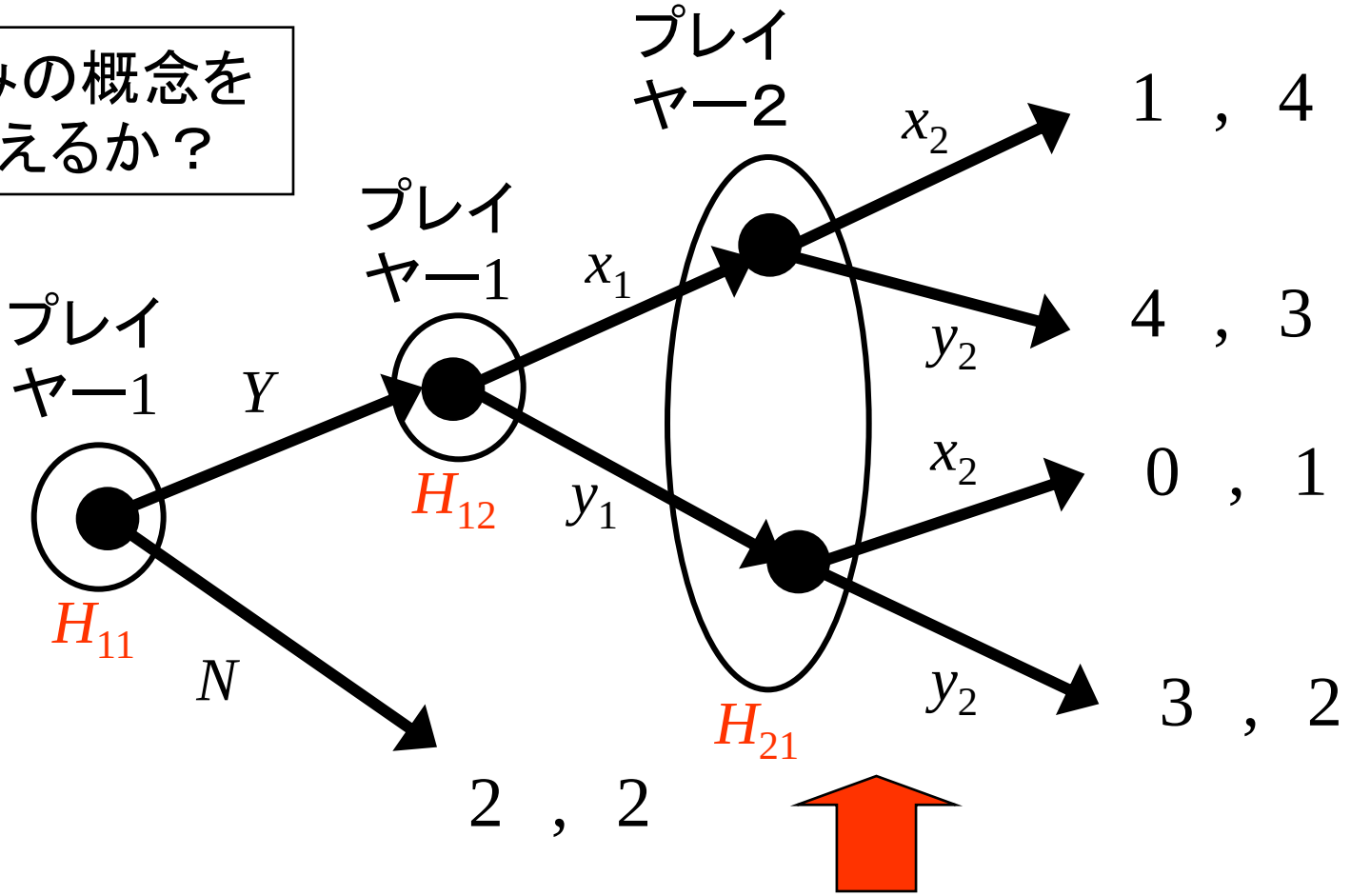
- 結局，先読み解がゲームの解！
  - それは既に習った？？

- 完全情報でなければ，どうすれば良いかはまだ習っていない
- 完全情報でなければ，単純には後ろから解けない

ナッシュ均衡の概念と先読みの概念を合わせて考えなければならない！

# 先読みの概念を一般のゲームに加える

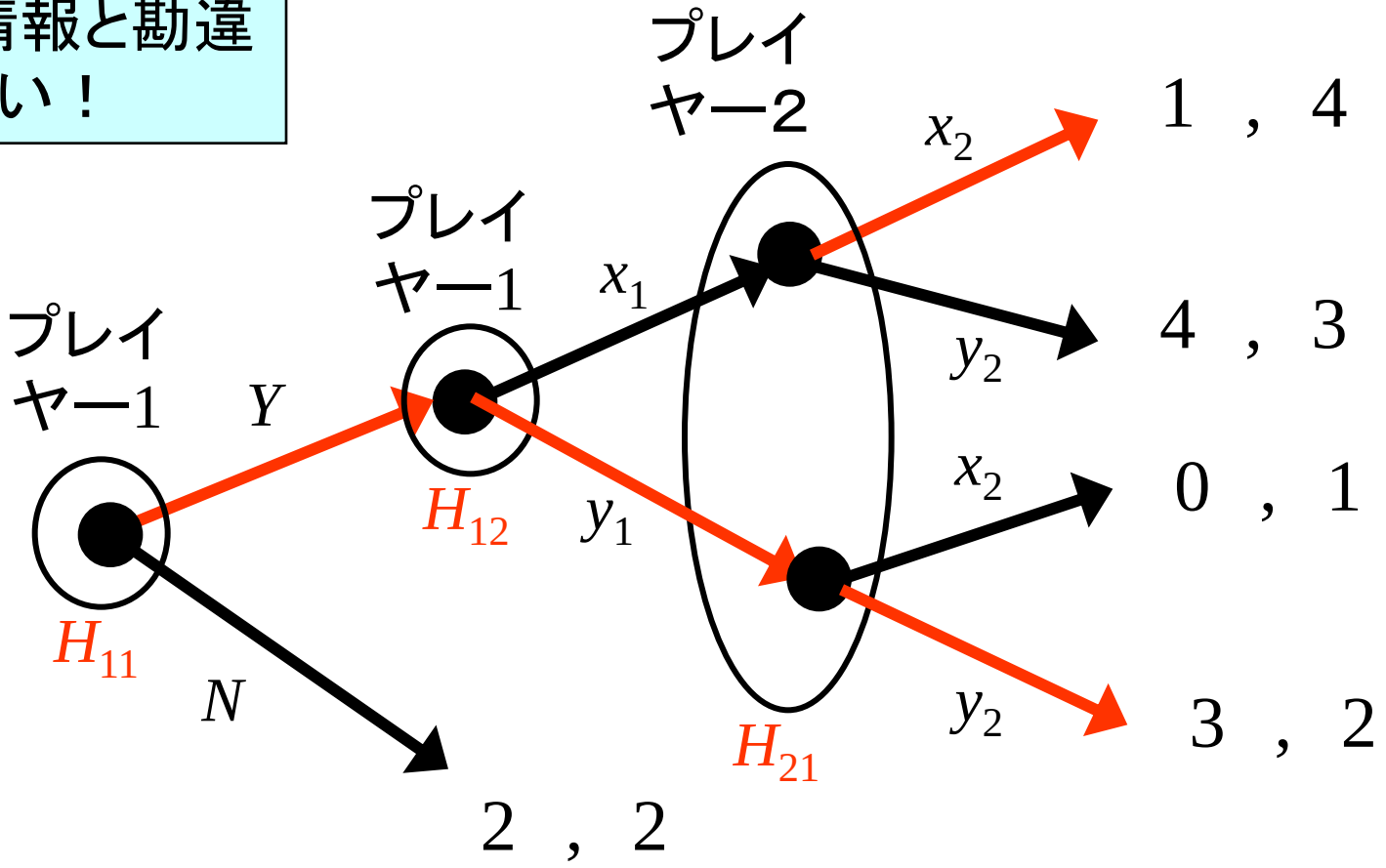
先読みの概念を
どう加えるか？




**一番先のプレイヤー2の行動だけを決めることはできない！**

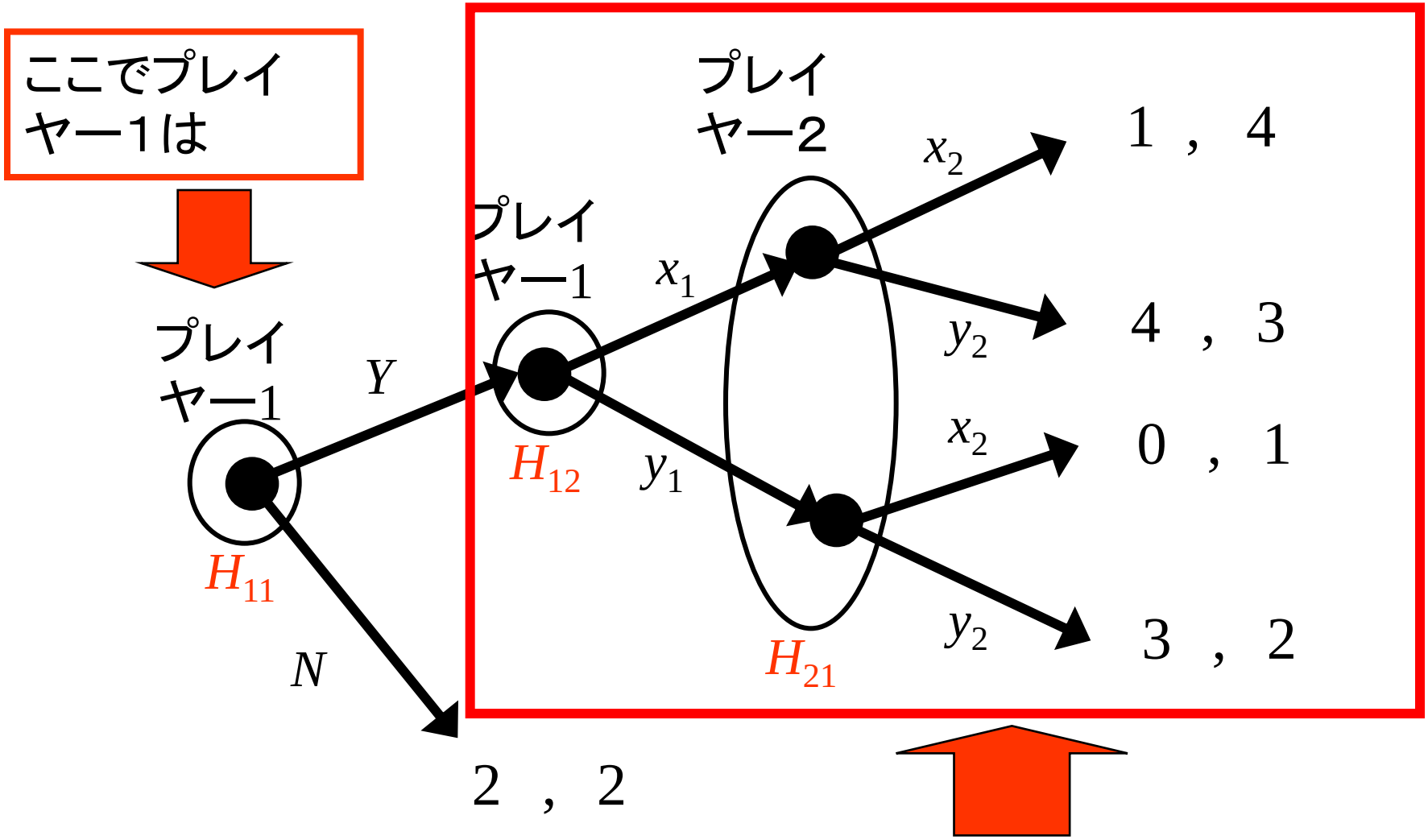
# 念を押すけど，こんな先読みは厳禁！

完全情報と勘違いしない！




同じ情報集合内で異なる代替案は選べない

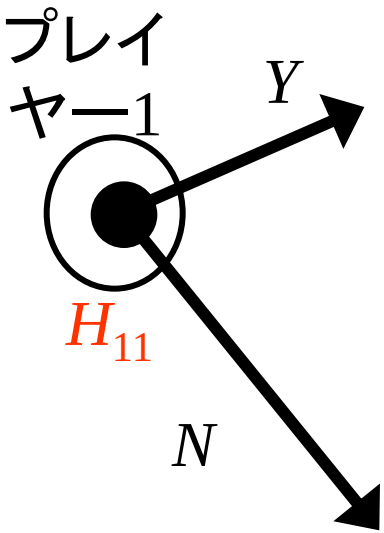
# 先読みの概念を一般のゲームに加える




Yを選択したならば，このゲームで何が起きるか先読みする

# 先読みの概念を一般のゲームに加える

イメージ




| 1 \ 2 | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | ( 1, 4 ) | ( 4 , 3 ) |
| $y_1$ | ( 0, 1 ) | ( 3, 2 ) |

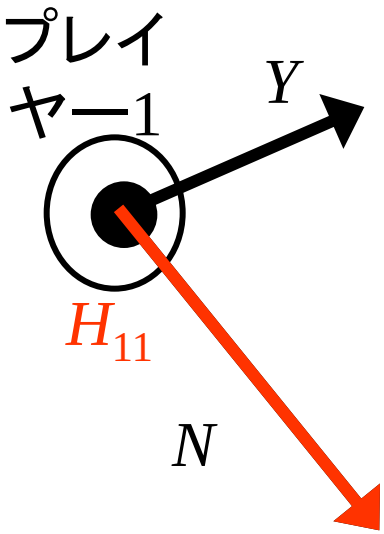
**起きる結果はナッシュ均衡**

2 , 2

未来に起きるのは戦略形ゲーム

# 先読みの概念を一般のゲームに加える

イメージ




| 1 \ 2 | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | （ 1, 4 ） | （ 4 , 3 ） |
| $y_1$ | （ 0, 1 ） | （ 3, 2 ） |

ナッシュ均衡を先読みすれば

2 , 2

先に起きるのは戦略形ゲーム

結果はこうなる！

# 戦略形ゲームで考える

| 1 \ 2 | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $(Y, x_1)$ | ( 1 , 4 ) | ( 4 , 3 ) |
| $(Y, y_1)$ | ( 0 , 1 ) | ( 3 , 2 ) |
| $(N, x_1)$ | ( 2 , 2 ) | ( 2 , 2 ) |
| $(N, y_1)$ | ( 2 , 2 ) | ( 2 , 2 ) |

ナッシュ均衡は2つ

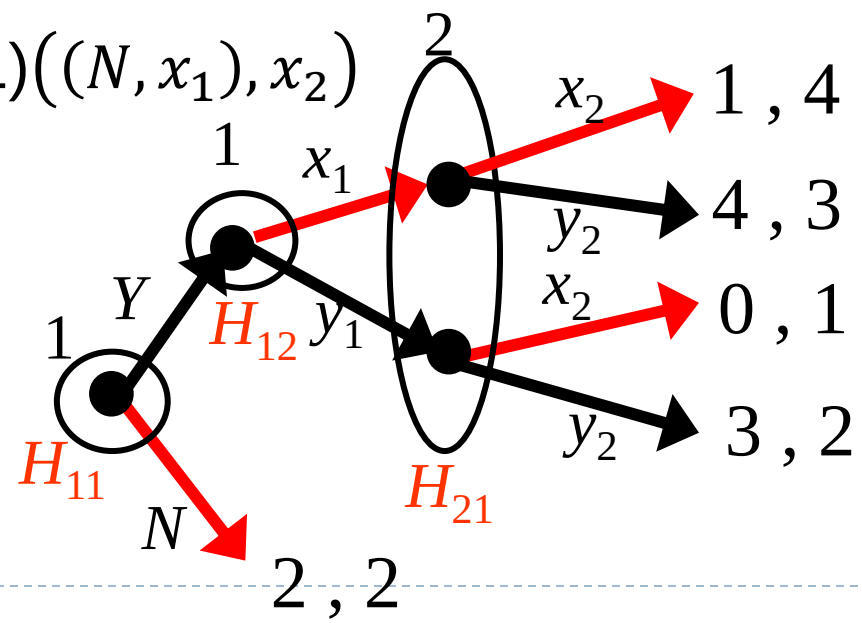
（1）$((N, x_1), x_2)$

（2）$((N, y_1), x_2)$

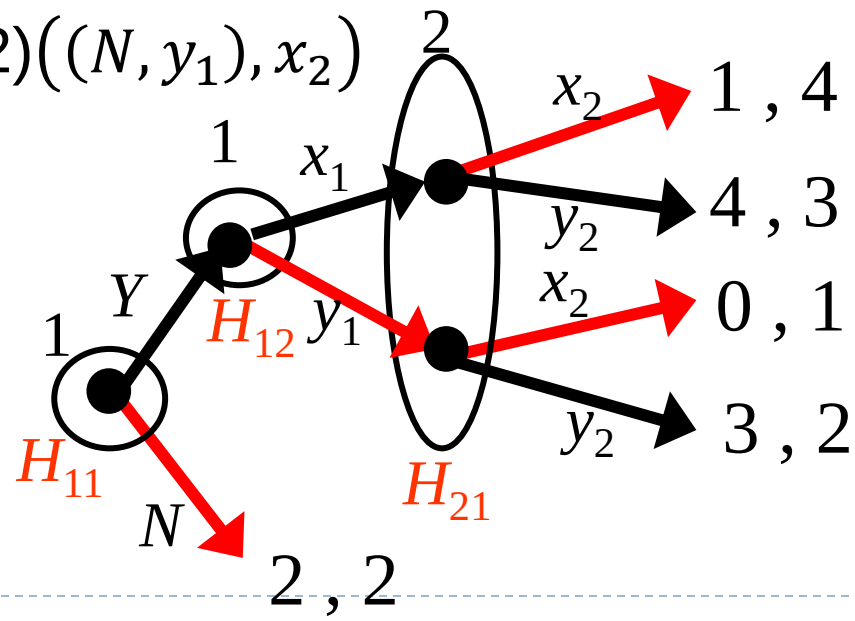
部分ゲーム完全均衡は1つ

$((N, x_1), x_2)$

(1)$((N, x_1), x_2)$




(2)$((N, y_1), x_2)$



# 部分ゲームとは？

- 元のゲームの枝と点の部分集合を取り出したもの
- 取り出されたすべての点に関して，後ろに続くすべての点と枝が取り出されてなければならない
- 取り出された点が属する情報集合に関して，その中のすべての点は取り出されていなければならない

適切な部分ゲームとは，部分ゲームの中で初期点が1つのもの

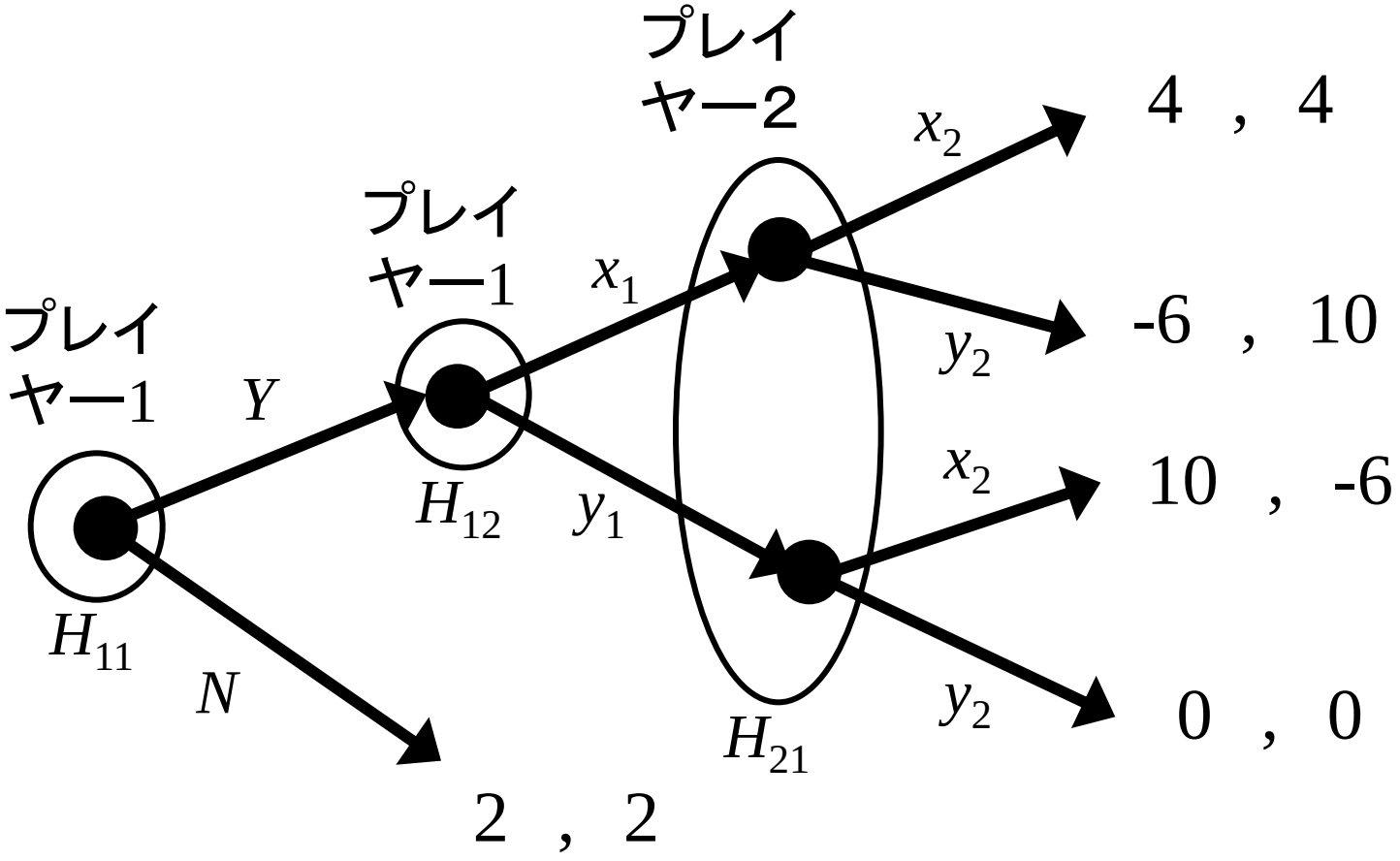
# 部分ゲーム完全均衡点

- 「先読み」の概念を一般の展開形ゲームに入れるには？
  - 先に続いているゲームを**適切な部分ゲーム**で分解し，先読みしていかなければならない
- 全ての適切な部分ゲームがナッシュ均衡である戦略の組み合わせ

部分ゲーム完全均衡

一般の展開形ゲームの解

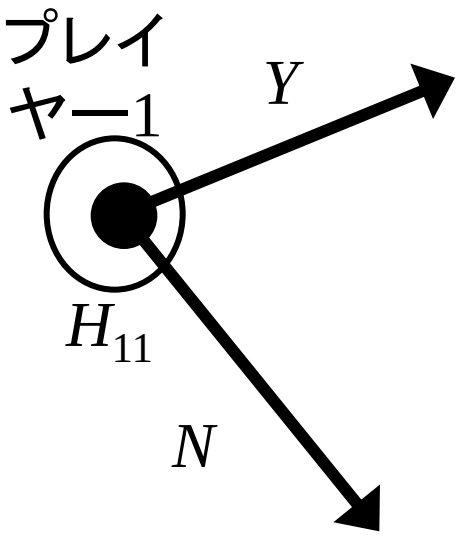
# 部分ゲーム完全均衡を確認しようー＃1



# 部分ゲーム完全均衡を確認しようー＃1

適切な部分ゲームでナッシュ均衡でなければならない

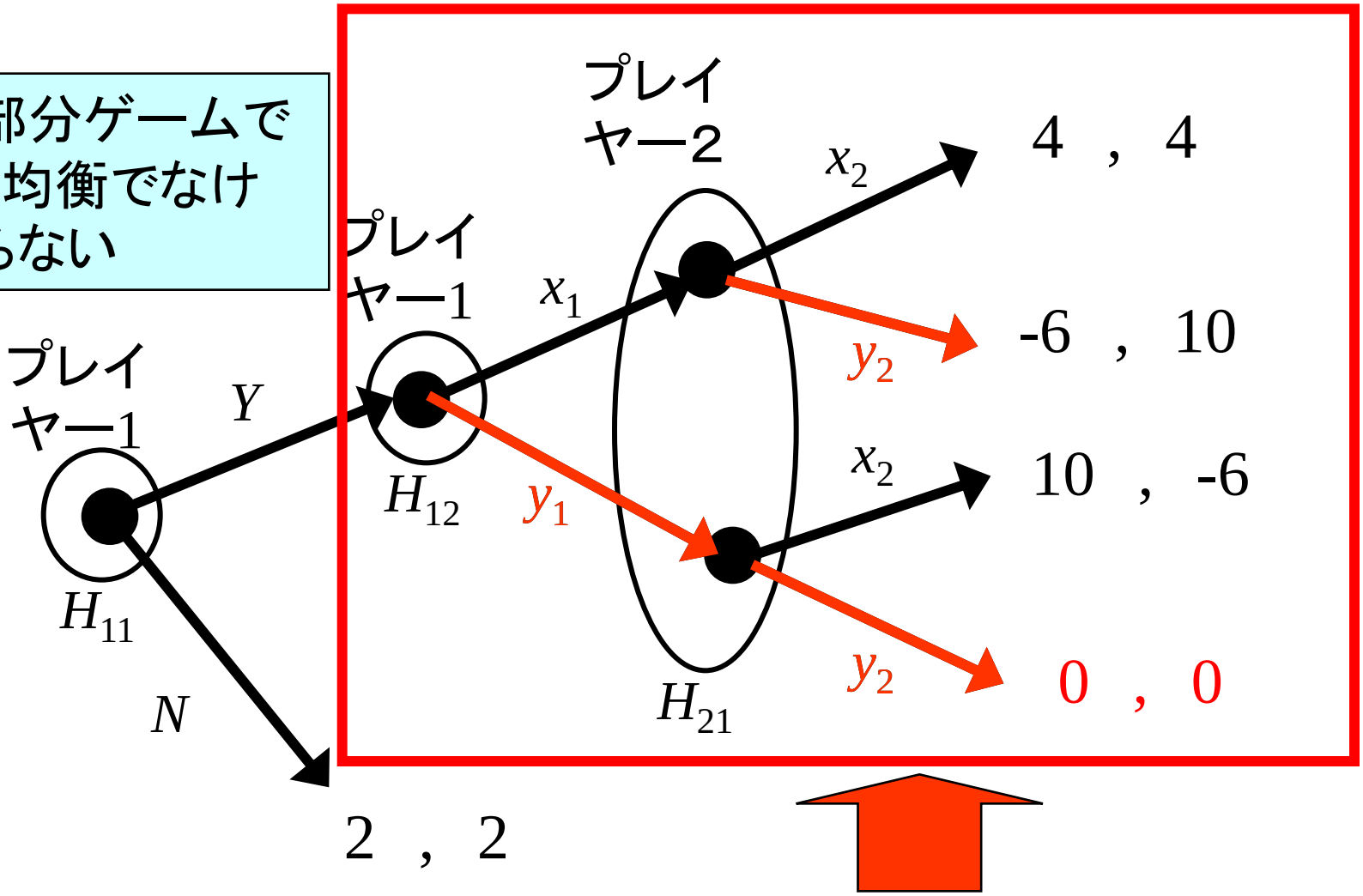
| 1 \ 2 | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | ( 4 , 4 ) | (-6 , 10) |
| $y_1$ | (10, -6 ) | ( 0, 0) |




2 , 2

# 部分ゲーム完全均衡を確認しようー＃1

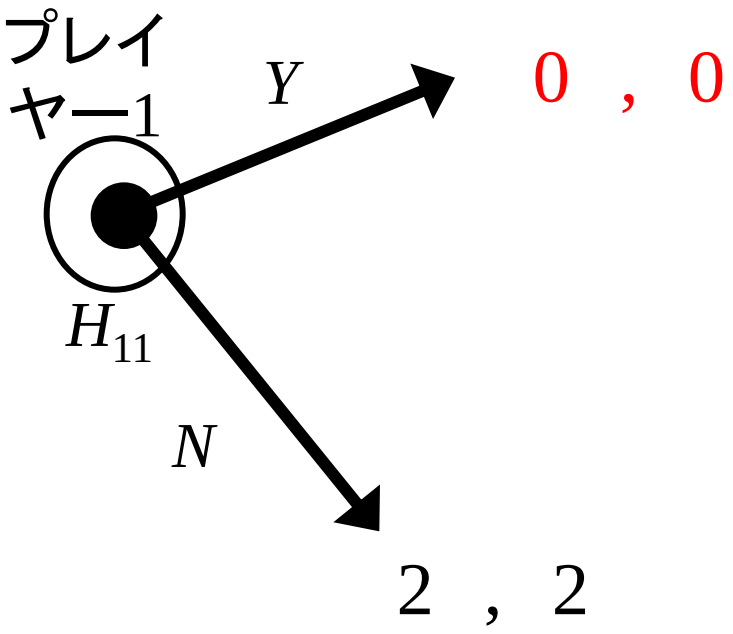
適切な部分ゲームでナッシュ均衡でなければならない



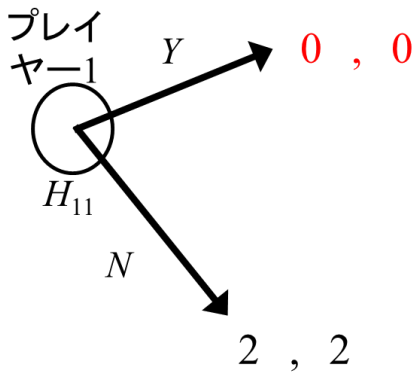

適切な部分ゲーム

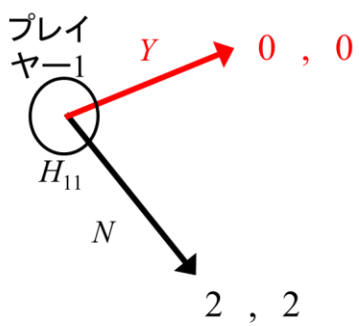
# 部分ゲーム完全均衡を確認しようー＃1

後ろの適切な部分ゲームで，どのような利得になるのか先読みできるので，それを用いてゲームを縮約する

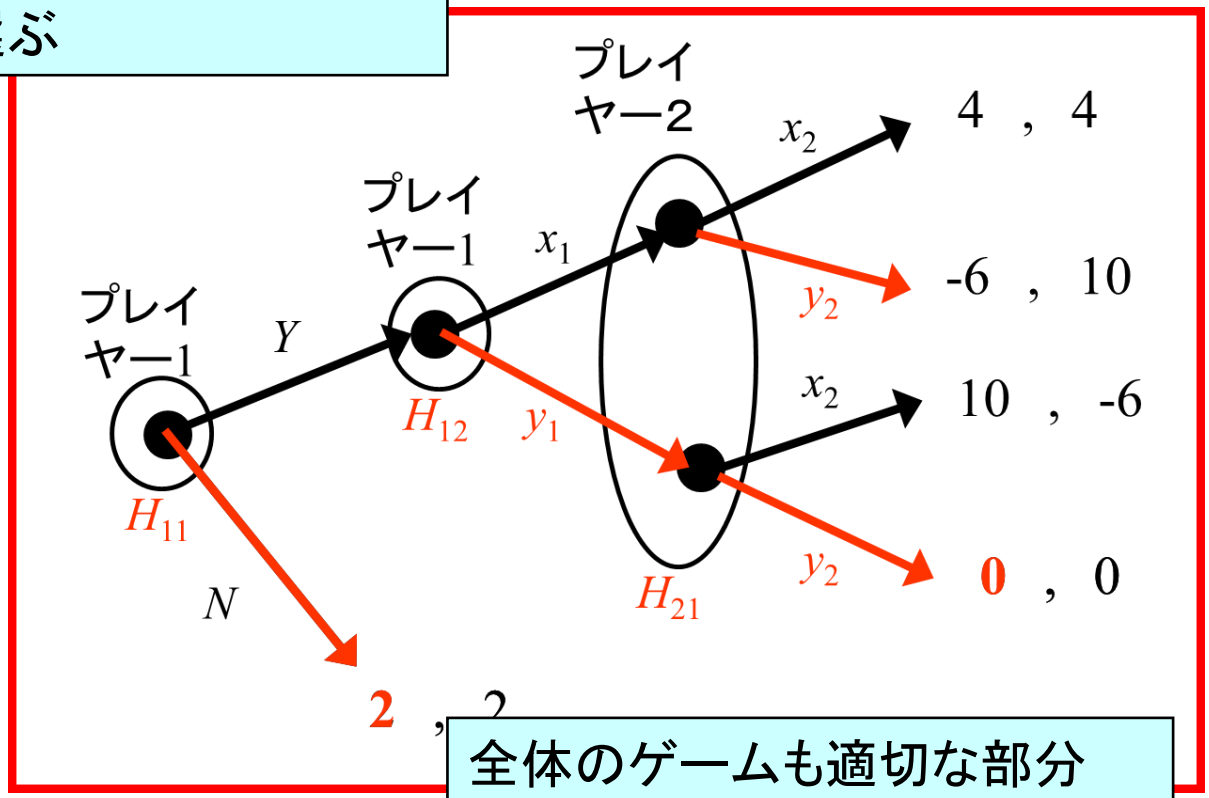


# 部分ゲーム完全均衡を確認しようー＃1




ナッシュ均衡ではNを選ぶ




全体のゲームも適切な部分ゲーム

# 戦略形ゲームで考える

| 1 \ 2 | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $(Y, x_1)$ | ( 4 , 4 ) | ( -6, 10 ) |
| $(Y, y_1)$ | ( 10, -6 ) | ( 0 , 0 ) |
| $(N, x_1)$ | ( 2 , 2 ) | ( 2 , 2 ) |
| $(N, y_1)$ | ( 2 , 2 ) | ( 2 , 2 ) |

ナッシュ均衡は2つ

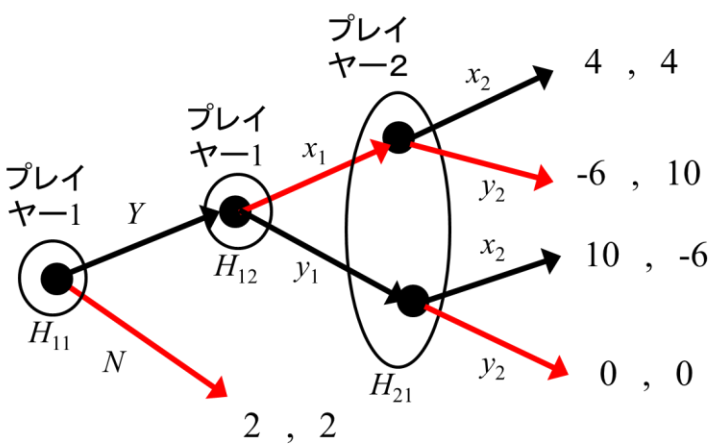
（1）$((N, x_1), y_2)$

（2）$((N, y_1), y_2)$

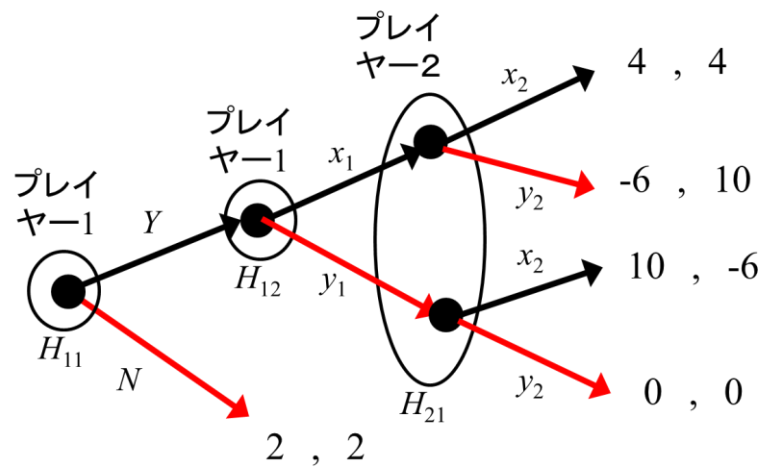
2つのナッシュ均衡は同じ結果だけど

**部分ゲーム完全均衡は1つ**
**$((N, x_1), y_2)$**

(1)$((N, x_1), y_2)$



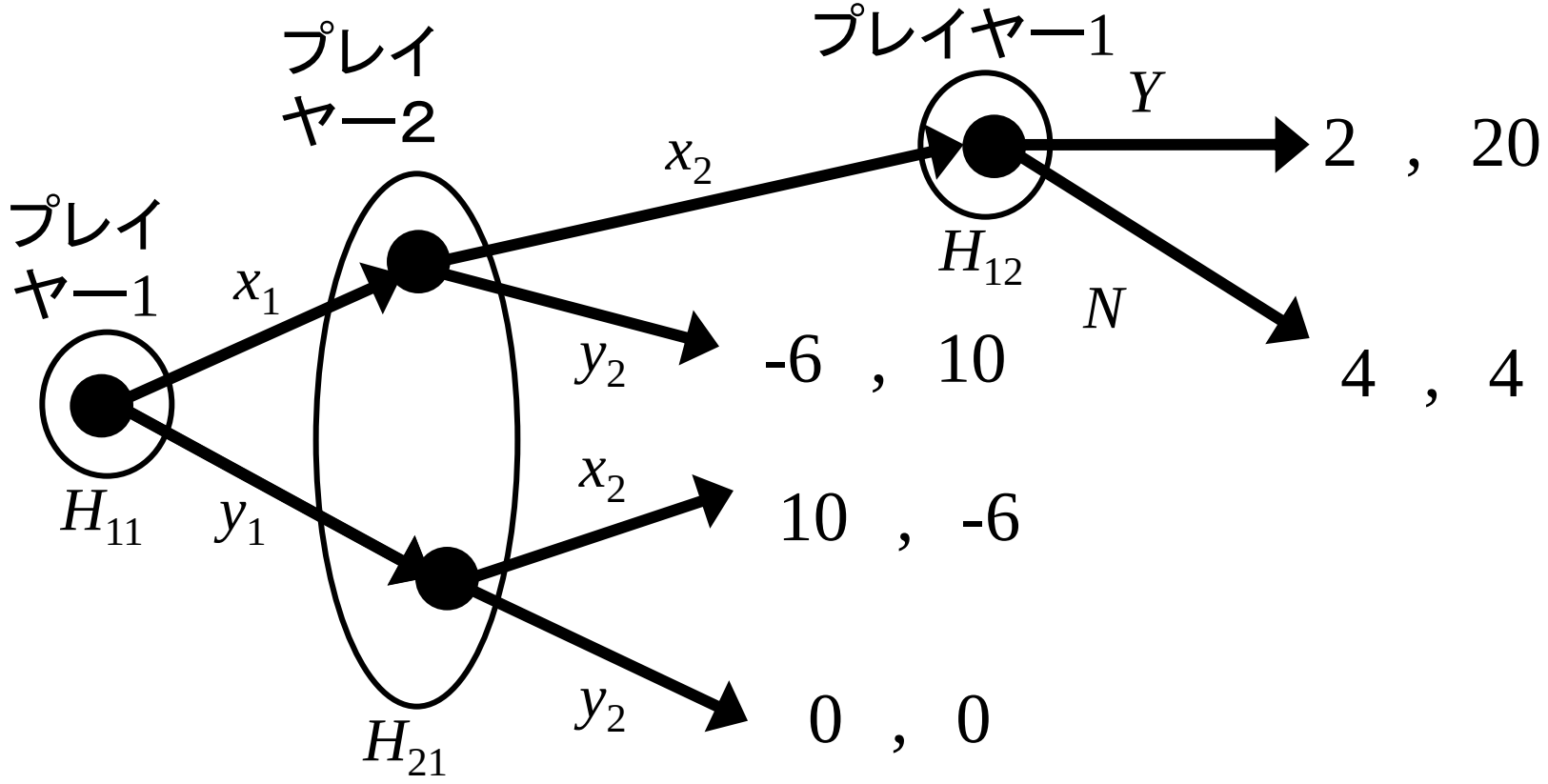

(2)$((N, y_1), x_2)$



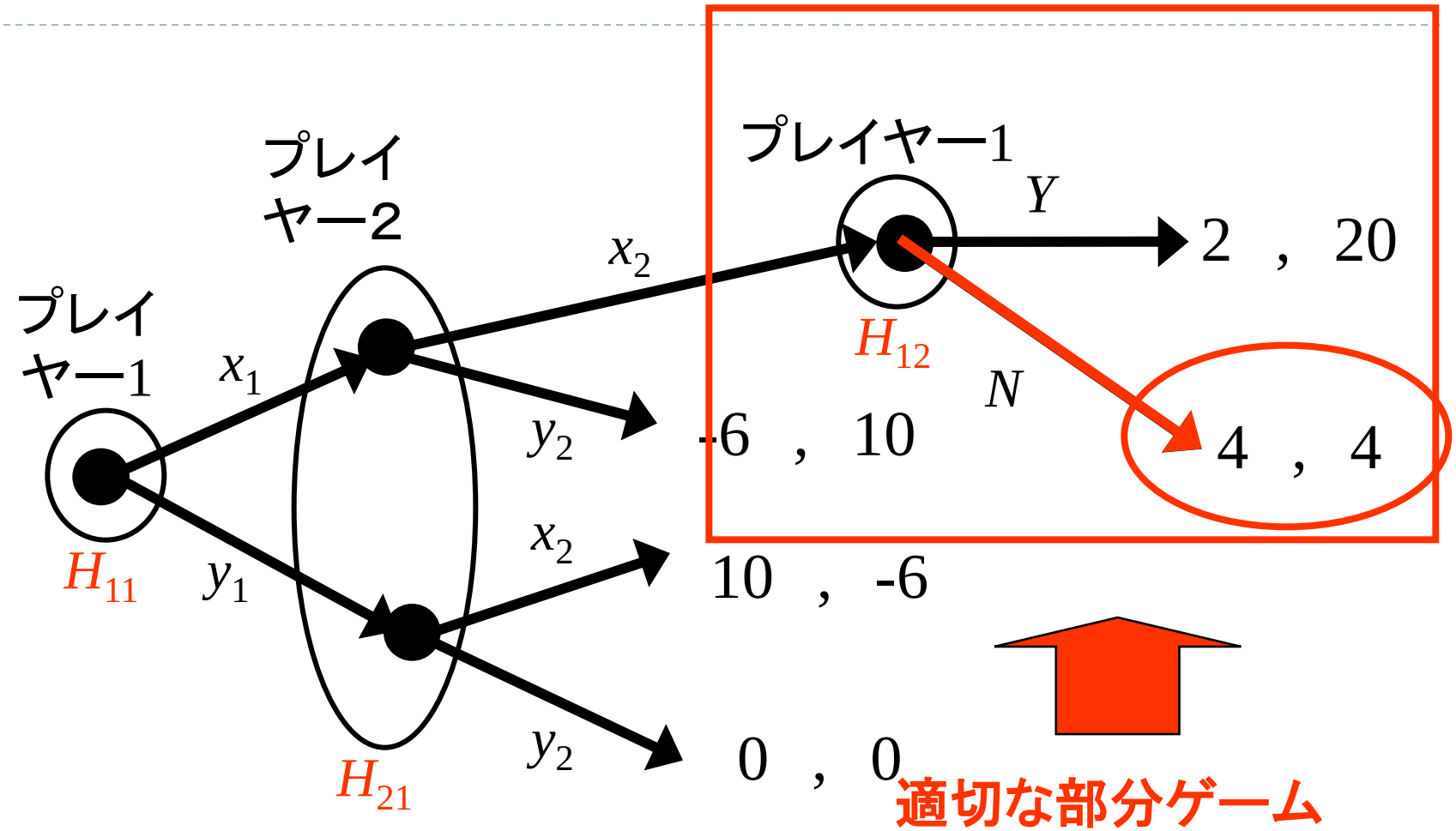
# 部分ゲーム完全均衡点：2つの考え方

- 展開形ゲーム的に考える
  - バックワードインダクションの考え方
  - まず最後の部分ゲームを解く.
  - その部分の利得を確定し，縮約した新たな展開形ゲームを作り，それを同じように解いてゆく
- 戦略形ゲーム的に考える
  - 戦略形ゲームに変換する
  - ナッシュ均衡を求める
  - 部分ゲームを考え，その部分ゲームのナッシュ均衡の戦略を用いていないナッシュ均衡を外す

# 部分ゲーム完全均衡を確認しようー＃２



# 部分ゲーム完全均衡を確認しようー＃2



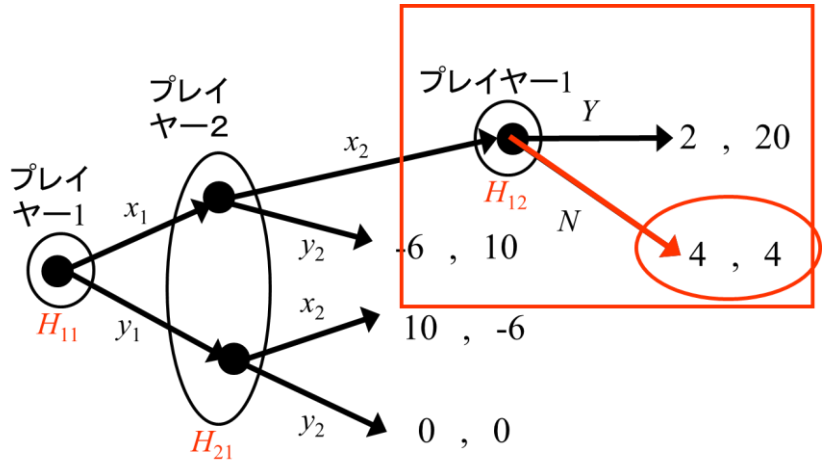

適切な部分ゲーム

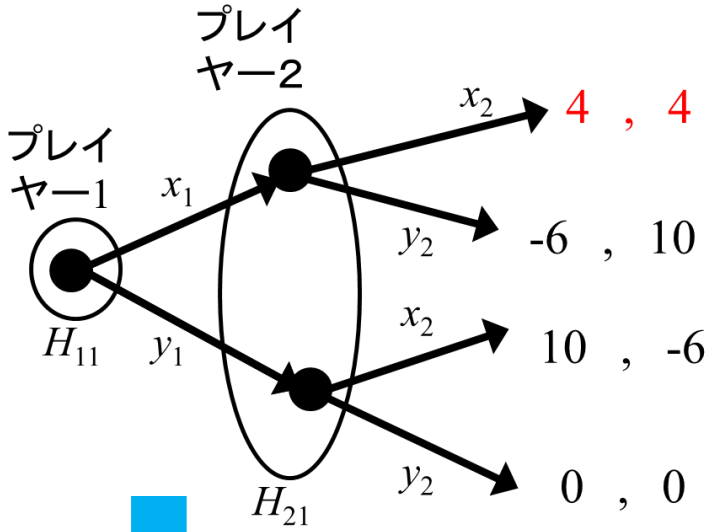
適切な部分ゲームでナッシュ均衡でなければならない

プレイヤーが1人

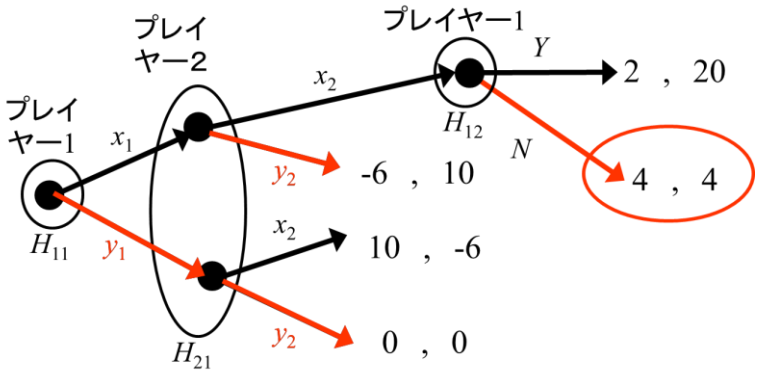
ナッシュ均衡＝最適戦略

# 部分ゲーム完全均衡を確認しようー＃2

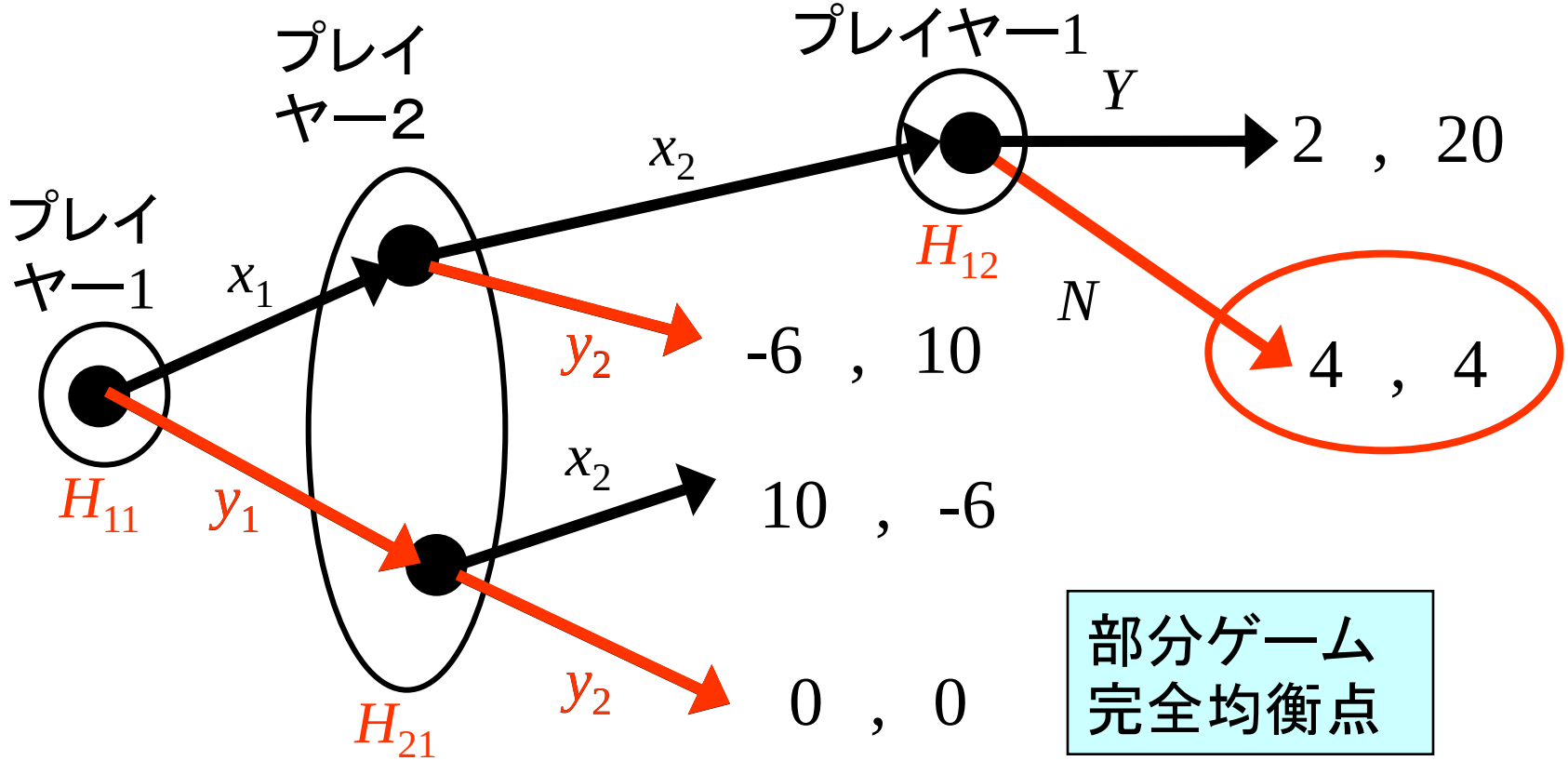



| 1 \ 2 | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | ( 4 , 4 ) | ( -6, 10 ) |
| $y_1$ | ( 10, -6 ) | ( 0 , 0 ) |



# 部分ゲーム完全均衡を確認しようー＃2




全体のゲームは何度も出てきた囚人のジレンマと同じ…

# 戦略形ゲームで考える

| 1 \ 2 | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $(x_1, Y)$ | ( 2 , 20 ) | ( -6, 10 ) |
| $(x_1, N)$ | ( 4 , 4 ) | ( -6, 10 ) |
| $(y_1, Y)$ | ( 10, -6 ) | ( 0 , 0 ) |
| $(y_1, N)$ | ( 10, -6 ) | ( 0 , 0 ) |

ナッシュ均衡は2つ

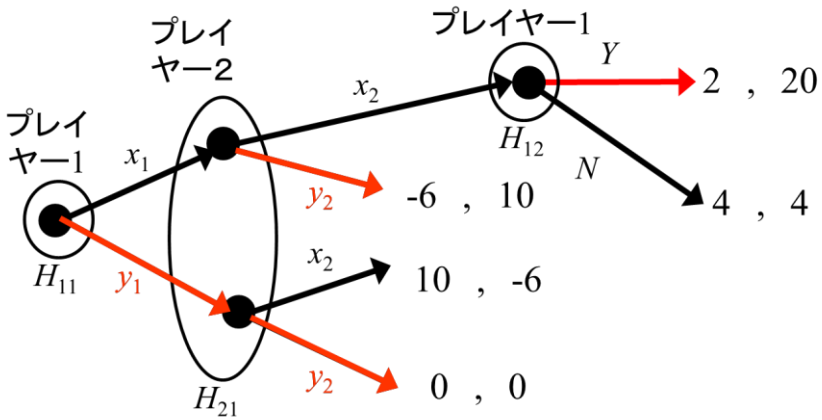
（1）$((y_1, Y), y_2)$

（2）$((y_1, N), y_2)$

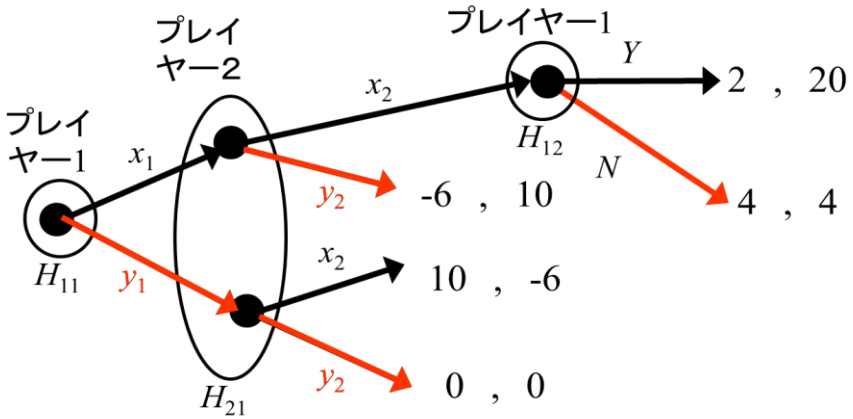
2つのナッシュ均衡は同じ結果だけど

**部分ゲーム完全均衡は1つ**
**$((y_1, N), y_2)$**

(1)$((y_1, Y), y_2)$




(2)$((y_1, N), x_2)$

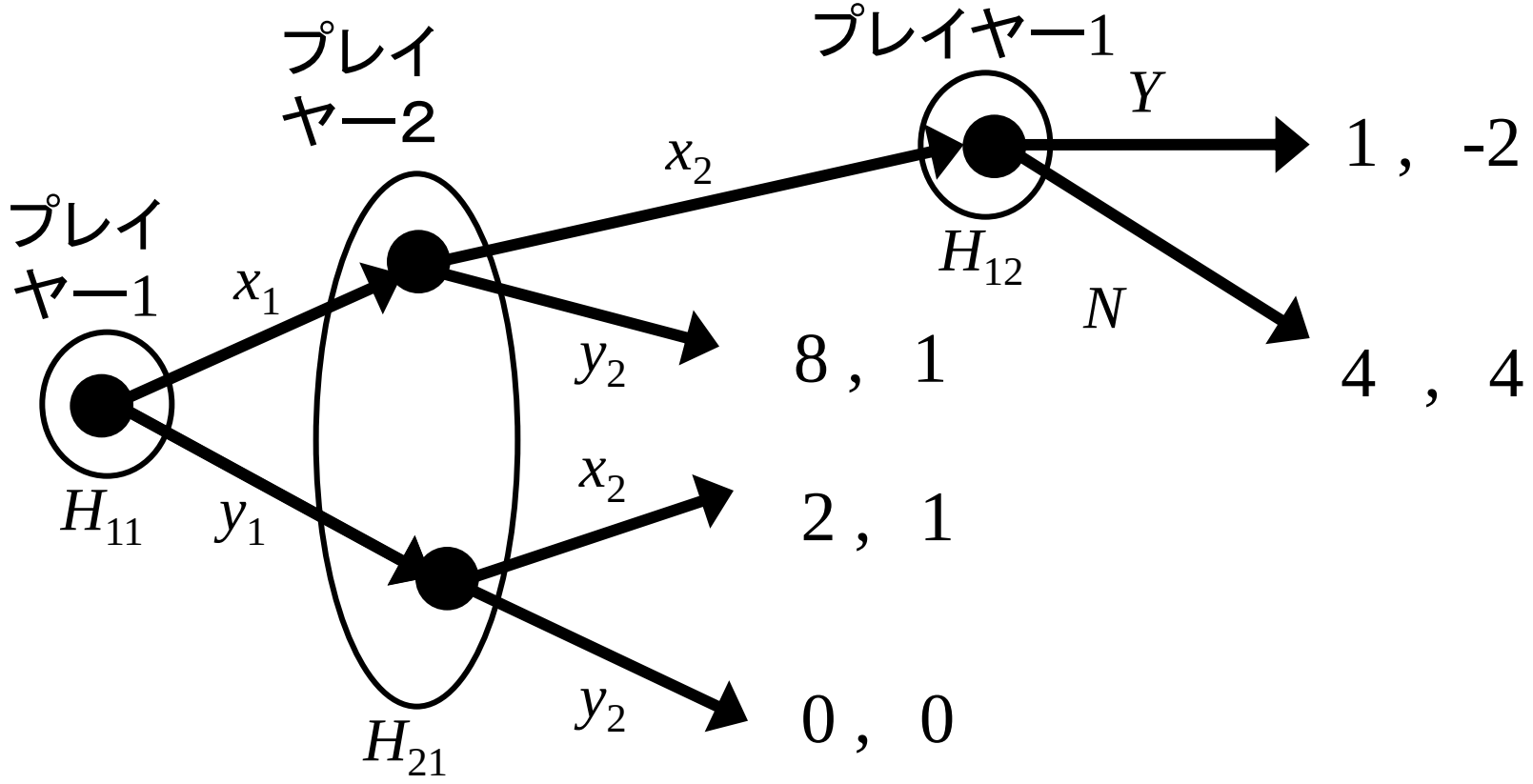


# 部分ゲーム完全均衡点：2つの考え方（再掲）

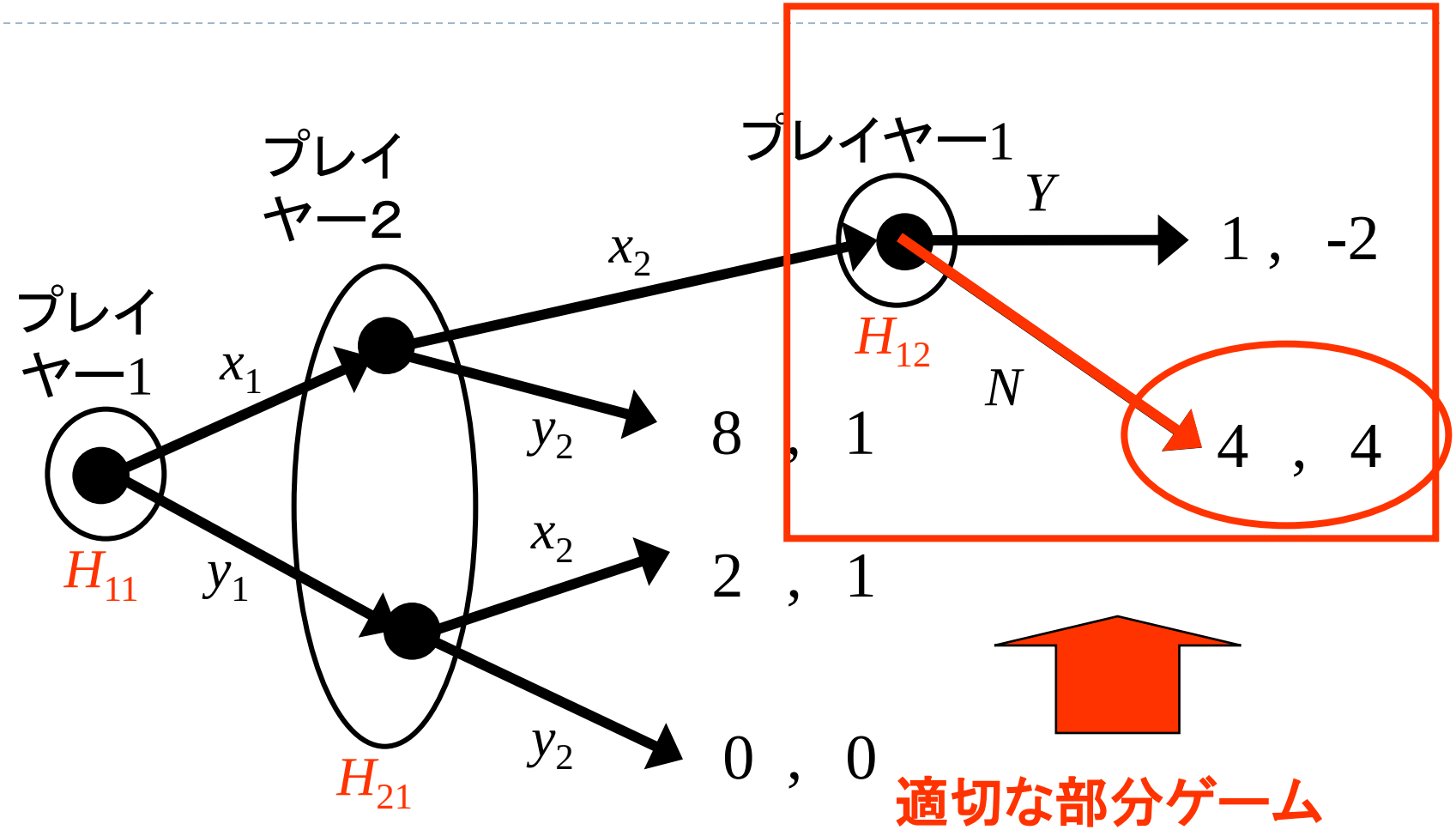
- 展開形ゲーム的に考える
  - バックワードインダクションの考え方
- 戦略形ゲーム的に考える
  - 戦略形ゲームに変換し，ナッシュ均衡を求める
  - 部分ゲームを考え，その部分ゲームのナッシュ均衡の戦略を用いていないナッシュ均衡を外す

- ここまでの2つの例では，ナッシュ均衡は2つあったが，戦略の組は違っても同じ結果であった．
  - 部分ゲーム完全均衡とナッシュ均衡は同じ結果．
- ナッシュ均衡が複数あって異なる結果となるときもある．
  - このときは，部分ゲーム完全均衡が威力を発揮する
  - もともと完全情報ゲームの例はそうであった．

# 部分ゲーム完全均衡を確認しようー＃3



# 部分ゲーム完全均衡を確認しようー＃3

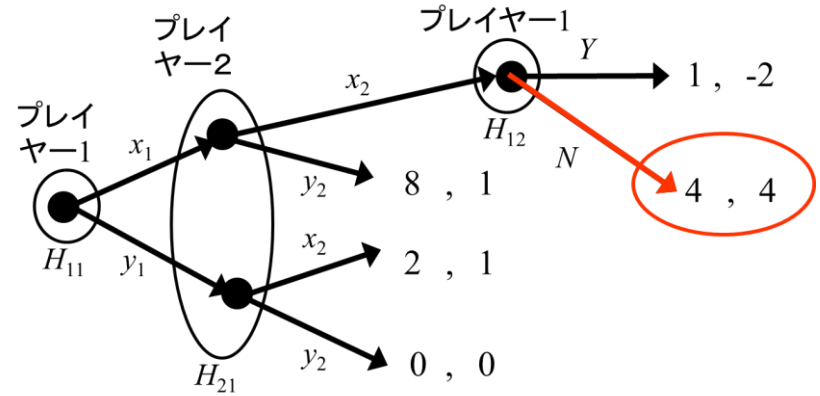


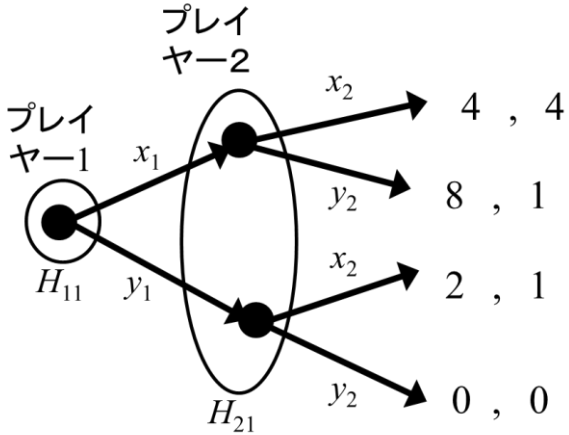

適切な部分ゲームでナッシュ均衡でなければならない

プレイヤーが1人

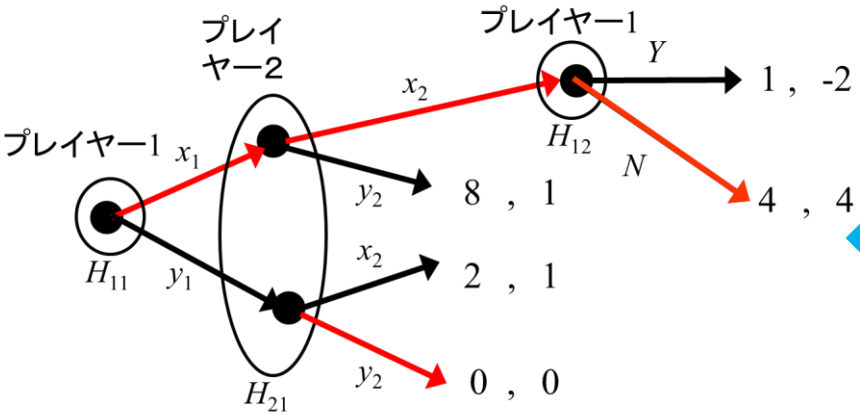
ナッシュ均衡＝最適戦略

# 部分ゲーム完全均衡を確認しようー＃3

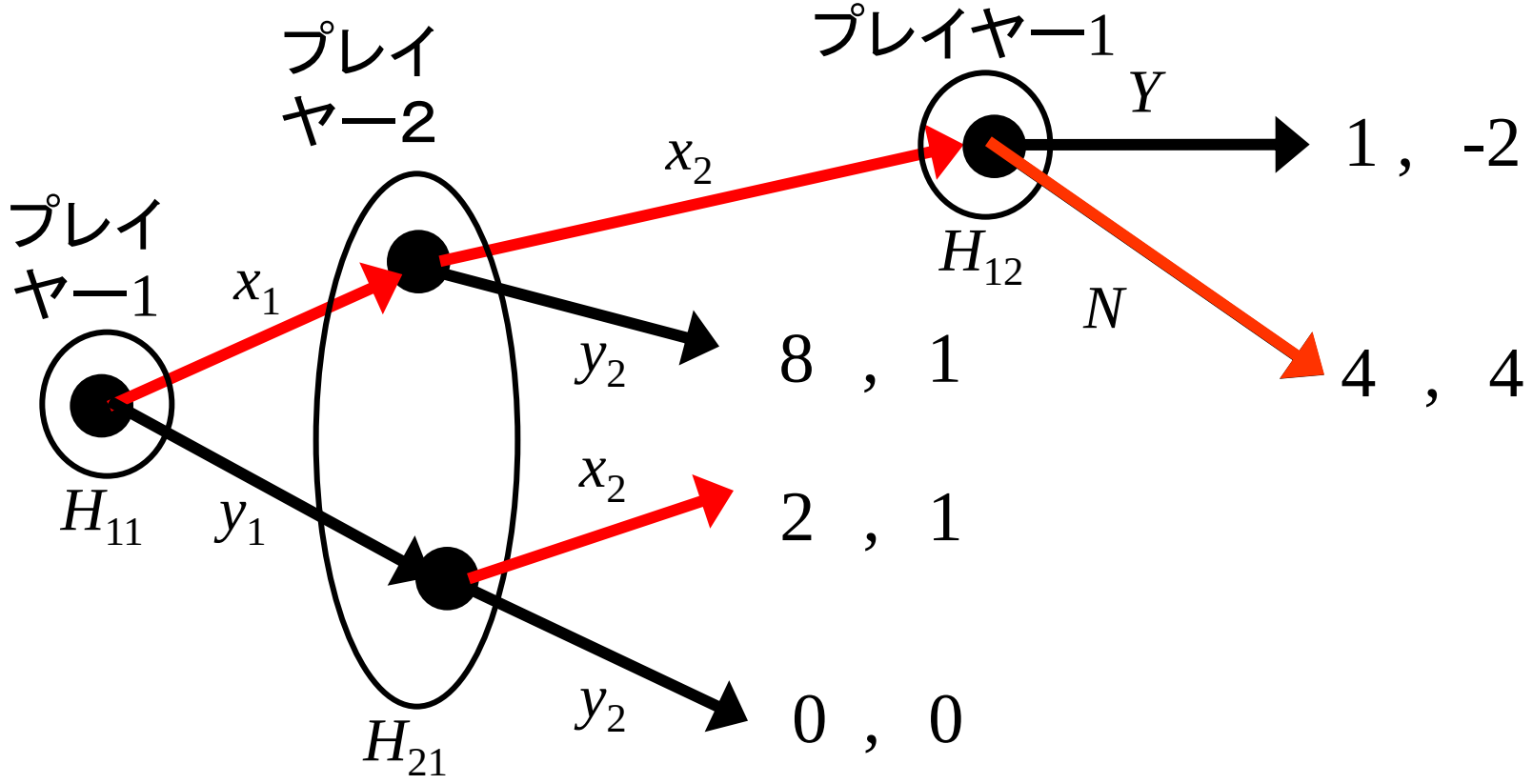



| 1 \ 2 | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | ( 4 , 4 ) | ( 8 , 1 ) |
| $y_1$ | ( 2 , 1 ) | ( 0 , 0 ) |



# 部分ゲーム完全均衡を確認しようー＃3



# 戦略形ゲームで考える

| 1 \ 2 | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $(x_1, Y)$ | ( 1 , -2 ) | ( 8 , 1 ) |
| $(x_1, N)$ | ( 4 , 4 ) | ( 8 , 1 ) |
| $(y_1, Y)$ | ( 2 , 1 ) | ( 0 , 0 ) |
| $(y_1, N)$ | ( 2 , 1 ) | ( 0 , 0 ) |

ナッシュ均衡は2つ

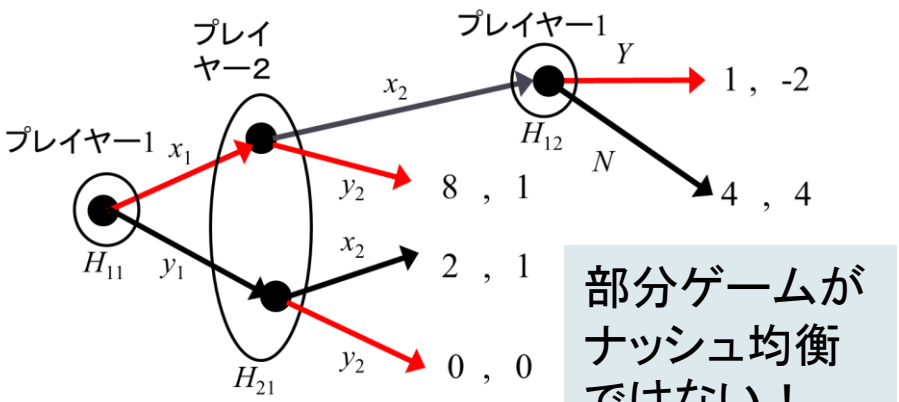
(1) $\left((x_1, Y), y_2\right)$

(2) $\left((x_1, N), x_2\right)$

2つのナッシュ均衡は異なる結果！

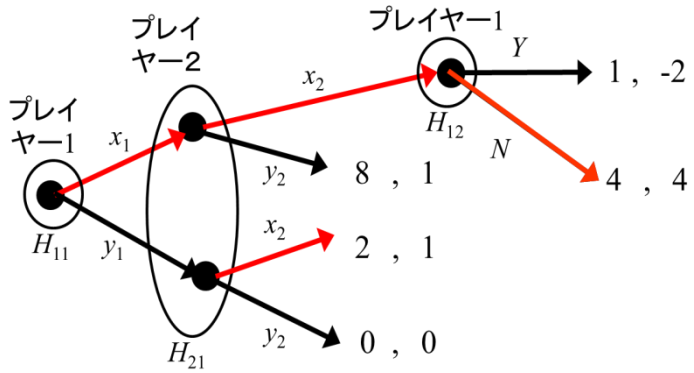
**部分ゲーム完全均衡は1つ**
**$\left((x_1, N), x_2\right)$**

(1) $\left((x_1, Y), y_2\right)$



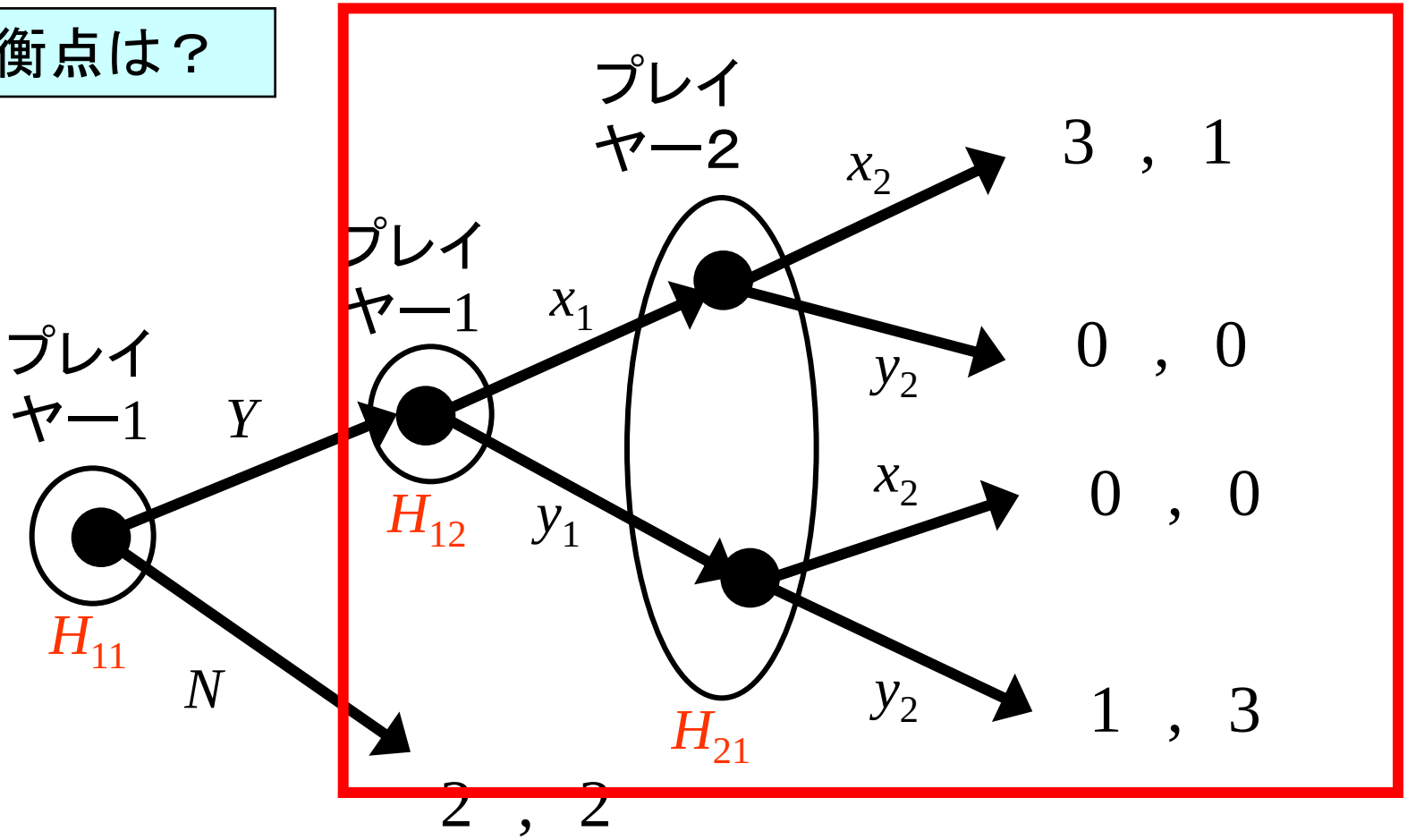

部分ゲームがナッシュ均衡ではない！

(2) $\left((x_1, N), x_2\right)$



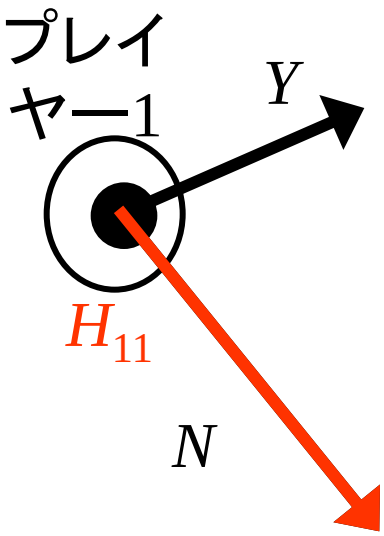
# 複数の完全均衡点

完全均衡点は？




適切な部分ゲーム

# 複数の完全均衡点



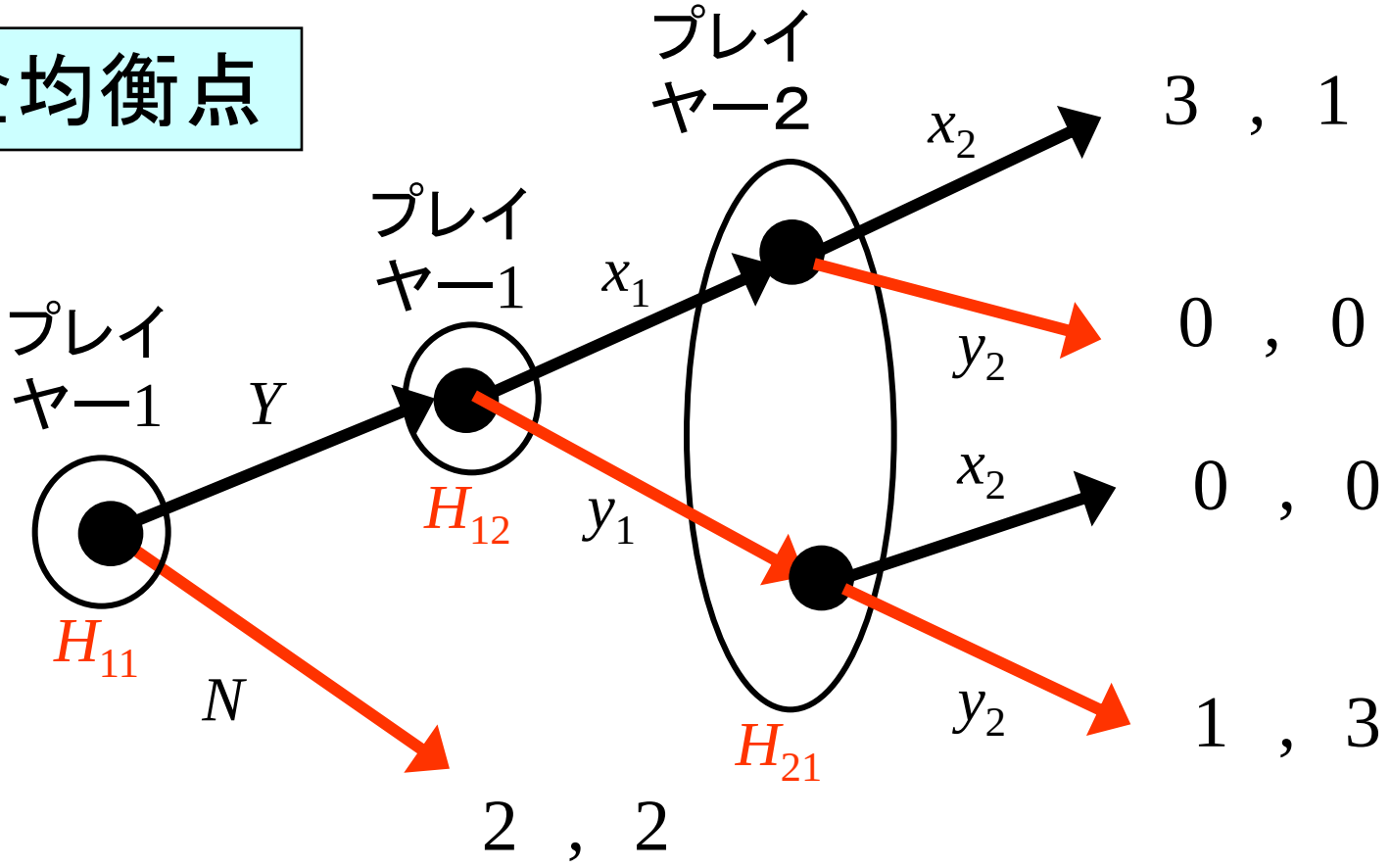

| 1 \ 2 | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | （ 3, 1 ） | （ 0, 0 ） |
| $y_1$ | （ 0, 0 ） | （ 1, 3 ） |

2 , 2

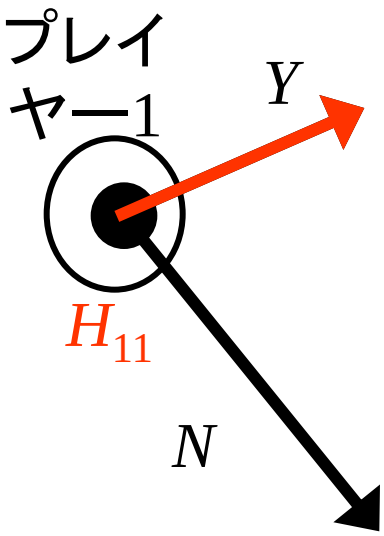
これはナッシュ均衡

# 複数の完全均衡点

完全均衡点



# 複数の完全均衡点



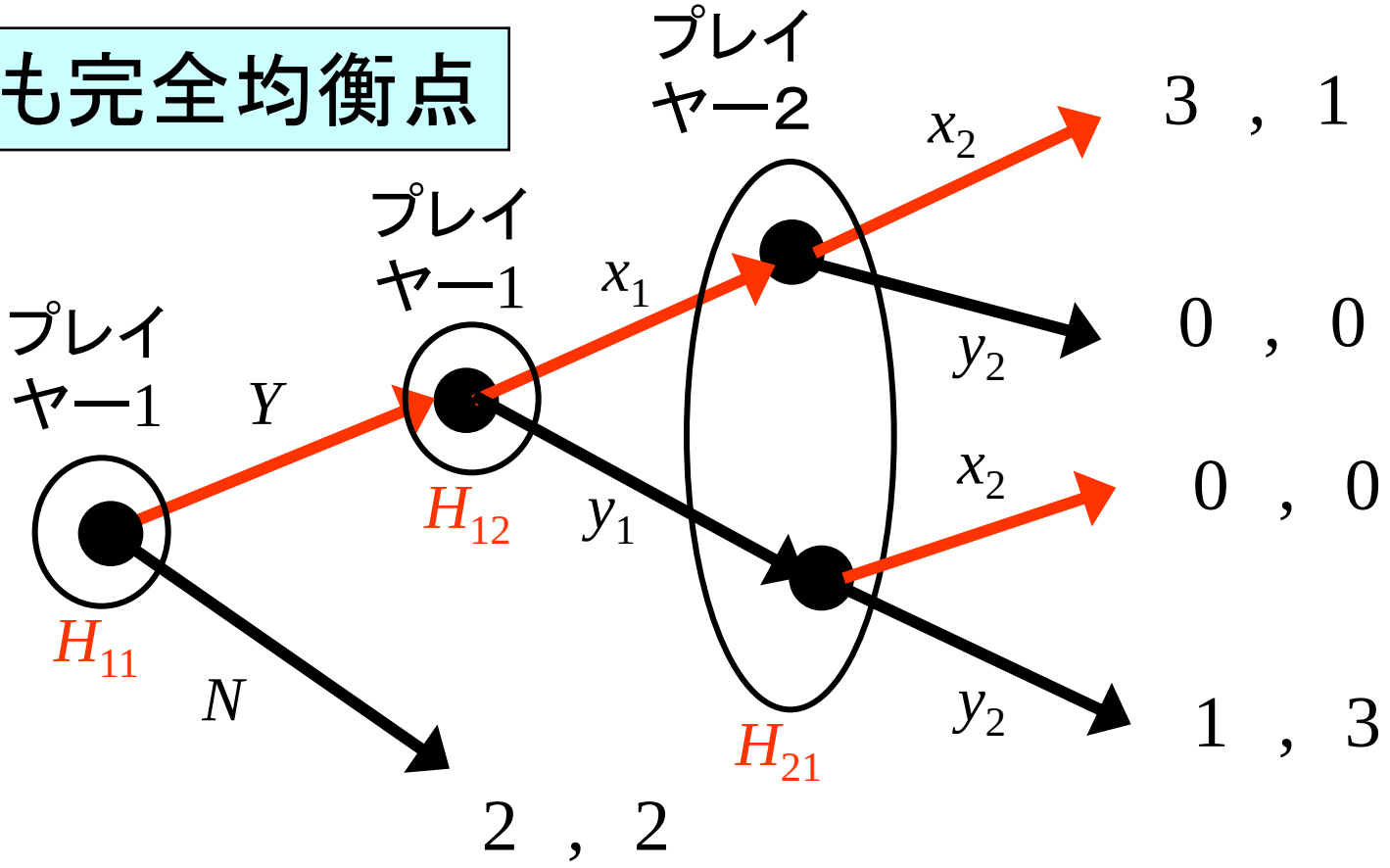

| 1 \ 2 | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | ( 3, 1 ) | ( 0, 0 ) |
| $y_1$ | ( 0, 0 ) | ( 1, 3 ) |

2 , 2

しかしこれもナッシュ均衡

# 複数の完全均衡点

これも完全均衡点




完全均衡点は2つある

混合戦略も含めれば3つ

# 完全均衡点は複数存在することもある

- これは，そもそも戦略形ゲームでもナッシュ均衡点が複数あることから当然
  - 元々，ゲームの解は複数あった！
- しかし，先読みしたナッシュ均衡がどうなるかによって，それ以前の選択に影響
  - いったい，どのナッシュ均衡が適切な予測となるのか，が重要
  - 均衡選択の問題と呼ばれる－未解決！

# まとめ：部分ゲーム完全均衡点

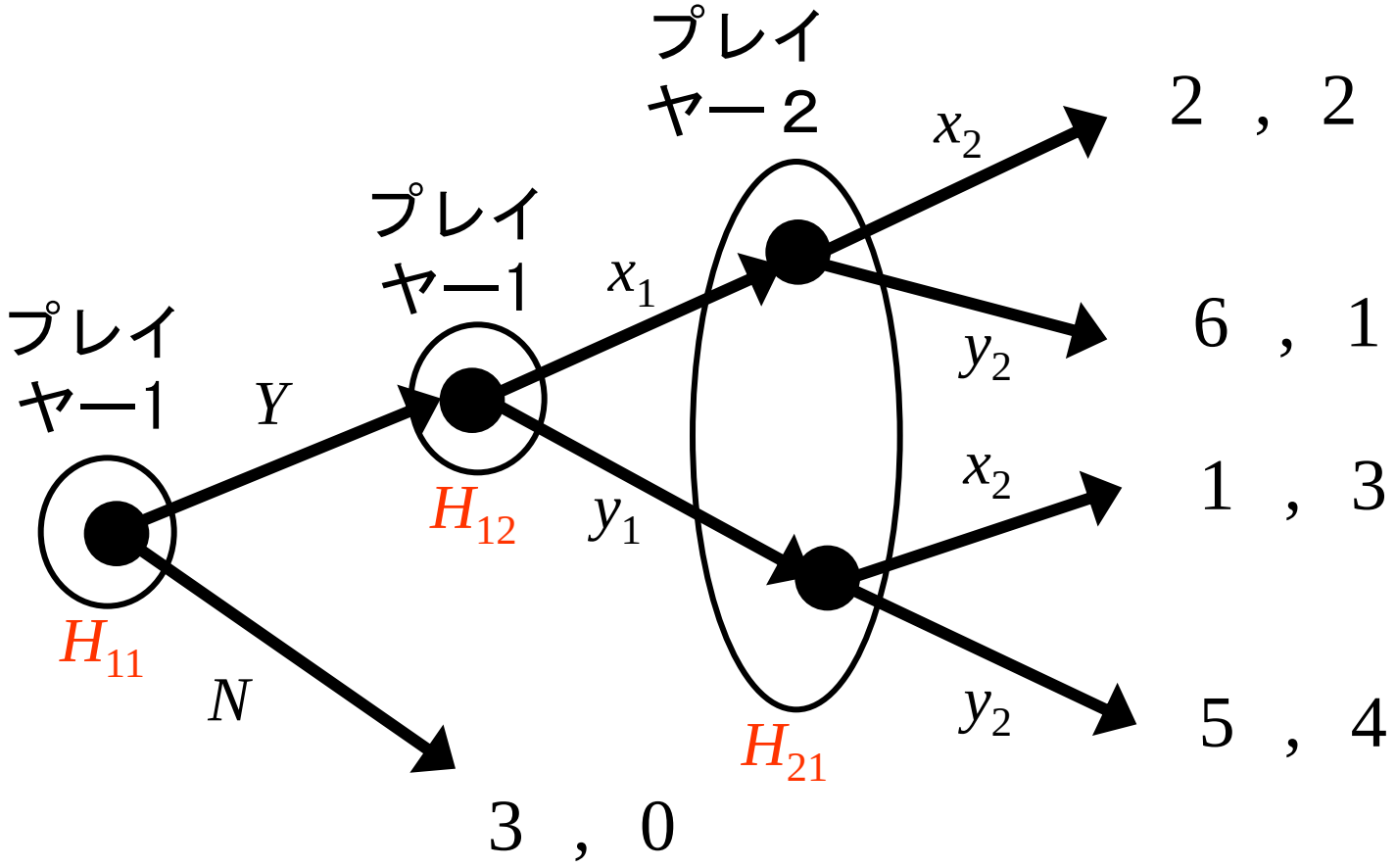
- 一般の展開形ゲームの解は部分ゲーム完全均衡点である
- 部分ゲーム完全均衡点とは？
  - すべての**適切な部分ゲーム**においてナッシュ均衡であるような戦略
  - 当然，全体のゲームも適切なナッシュ均衡なので，部分ゲーム完全均衡はナッシュ均衡

↓

ナッシュ均衡の精緻化

Selten (1975)

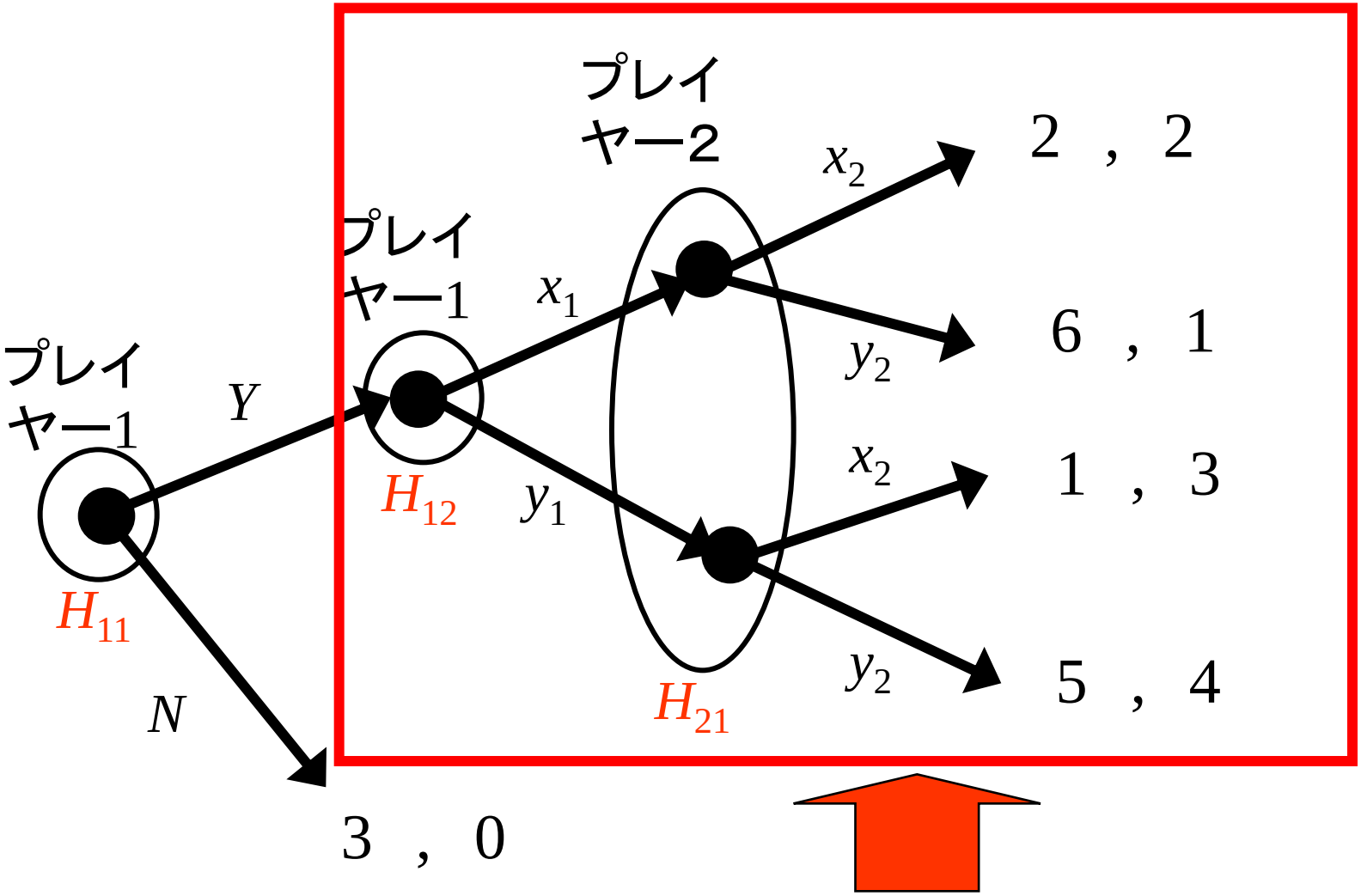
# 演習1:部分ゲーム完全均衡を求めよ



# 演習1:戦略形ゲームへの変換

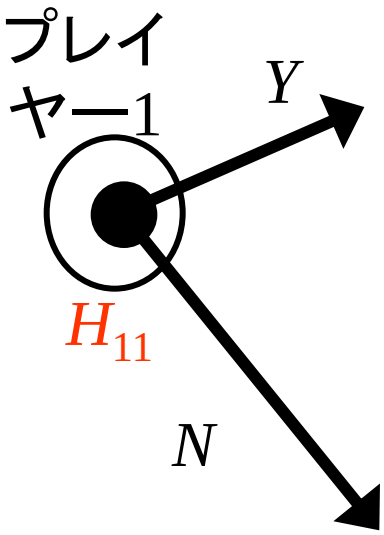
| 1 \ 2 | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $(Y, x_1)$ | ( 2 , 2 ) | ( 1 , 3 ) |
| $(Y, y_1)$ | ( 6 , 1 ) | ( 5 , 4 ) |
| $(N, x_1)$ | ( 3 , 0 ) | ( 3 , 0 ) |
| $(N, y_1)$ | ( 3 , 0 ) | ( 3 , 0 ) |

# 演習1：部分ゲーム完全均衡を求めよ




適切な部分ゲーム

# 演習1：部分ゲーム完全均衡を求めよ



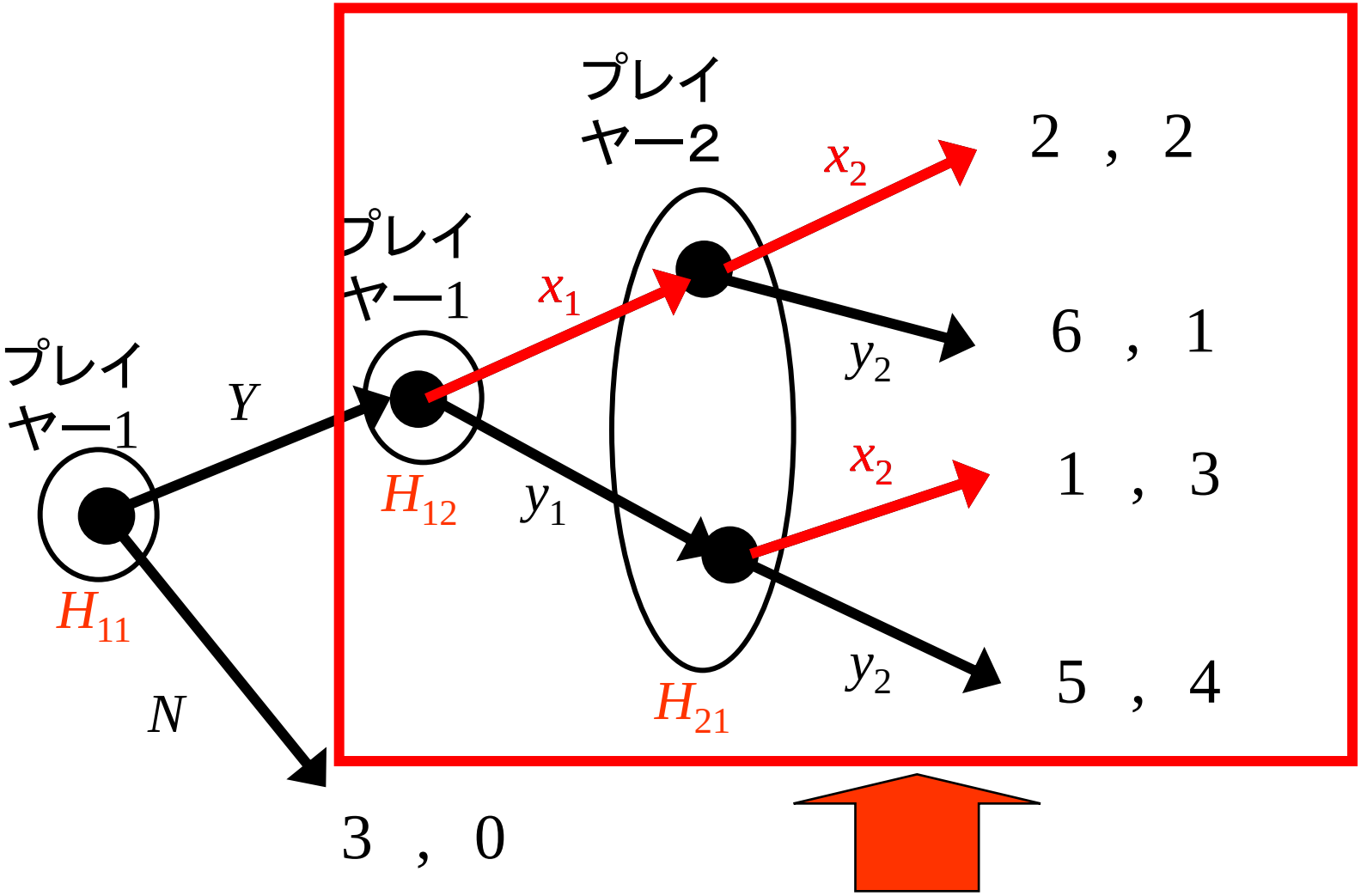

| 1 \ 2 | $x_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | ( 2, 2 ) | ( 6, 1 ) |
| $y_1$ | ( 1, 3 ) | ( 5, 4 ) |

2 , 2

ナッシュ均衡は( $x_1$, $x_2$ )

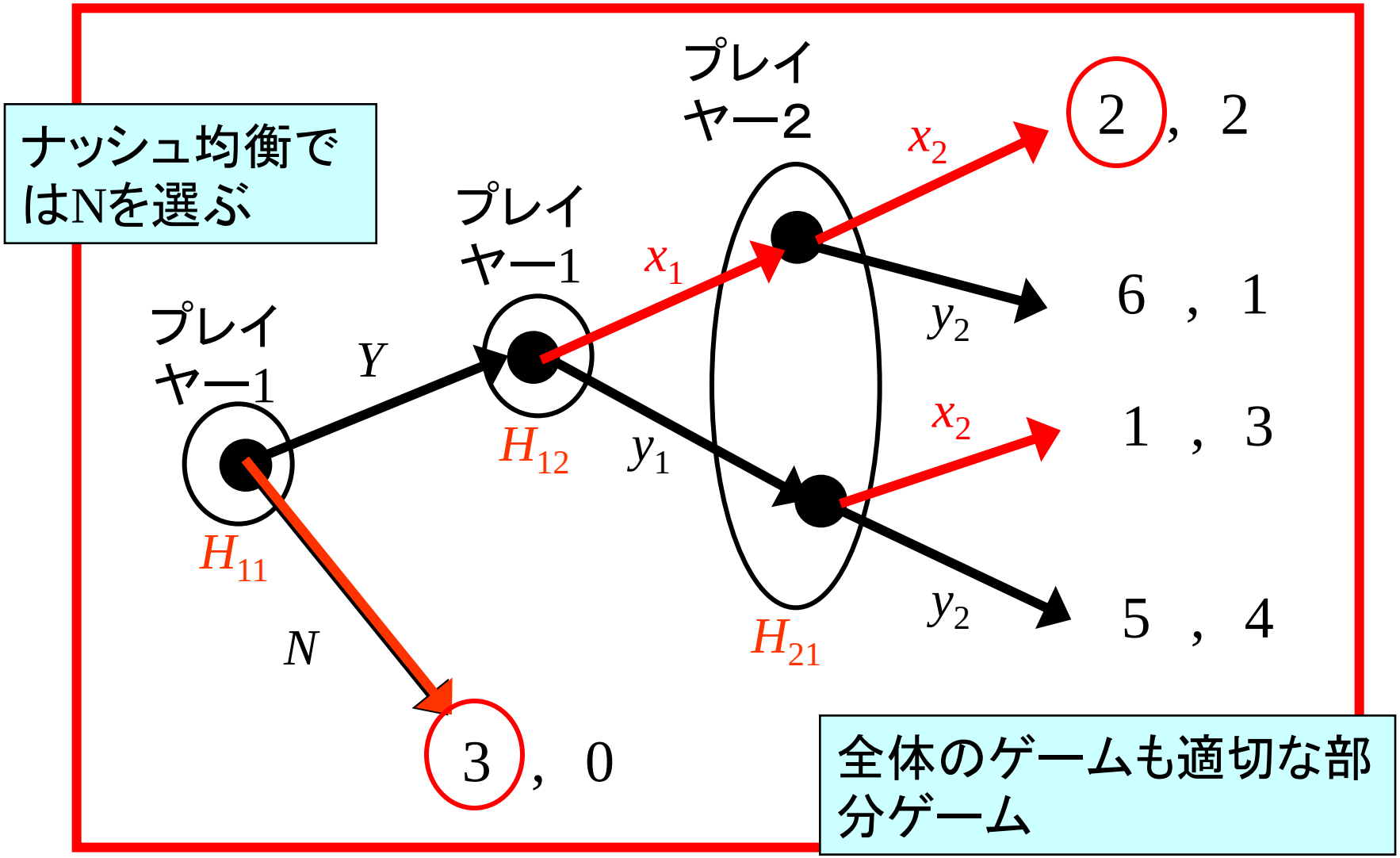
イメージ：適切な部分ゲームは戦略形ゲーム

# 演習1：部分ゲーム完全均衡を求めよ

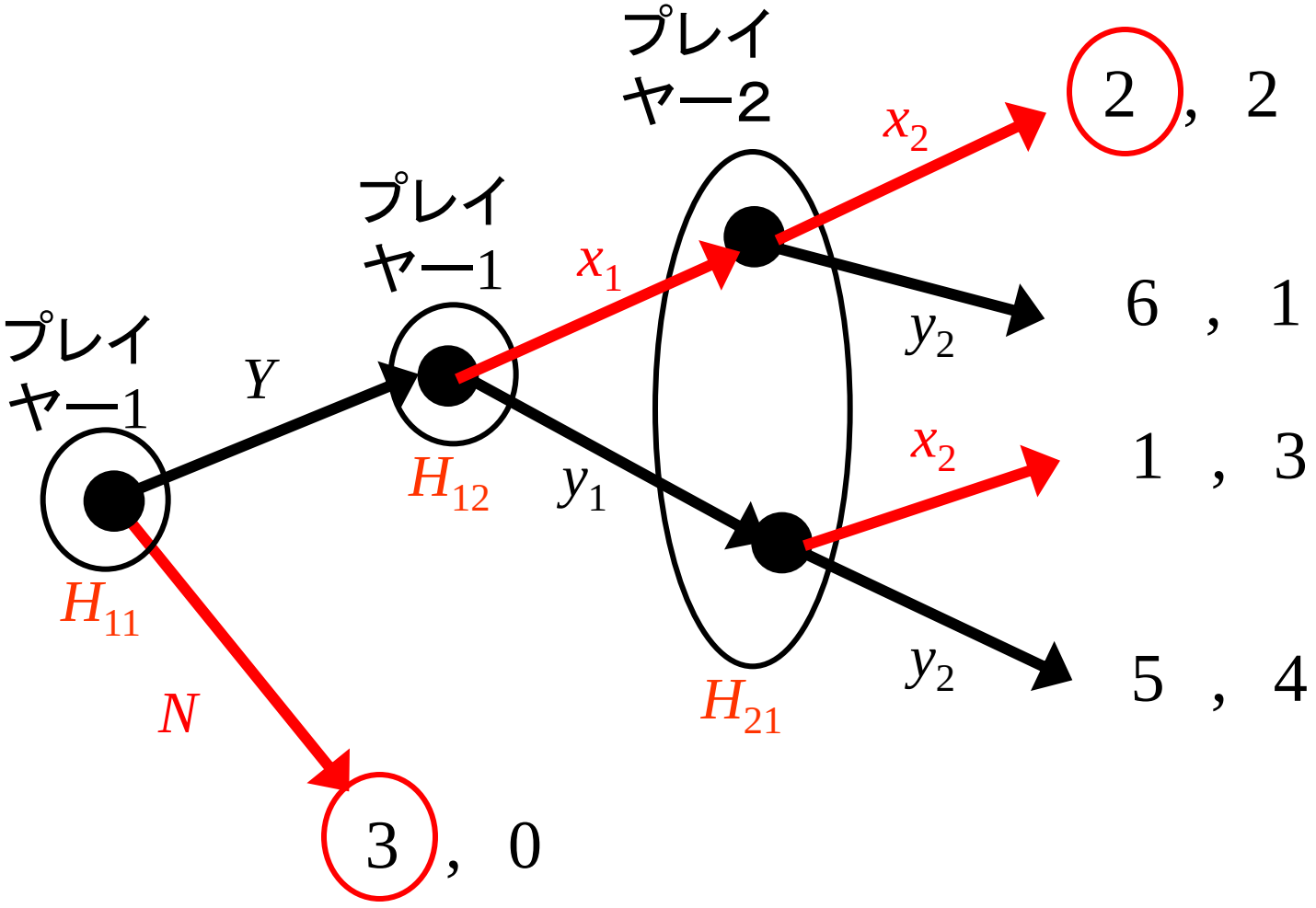



適切な部分ゲーム

# 演習1：部分ゲーム完全均衡を求めよ



# 演習1:部分ゲーム完全均衡を求めよ－解答方法

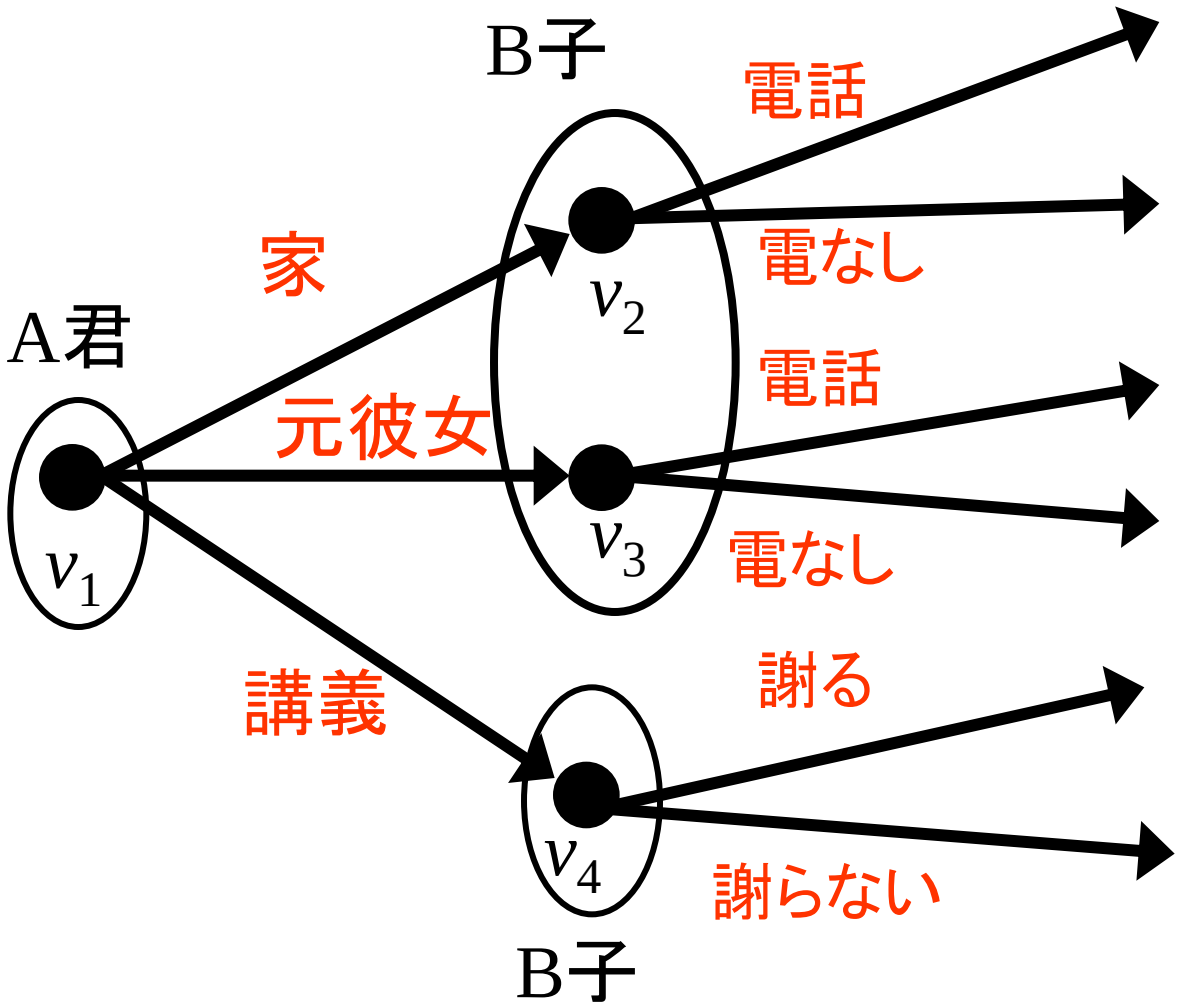


# 演習1：部分ゲーム完全均衡を求めよ－解答方法

情報集合に対応させて
選択する行動を記す

| | | |
|---|---|---|
| プレイヤー1 | $H_{11}$ | $N$ |
| | $H_{12}$ | $x_1$ |
| プレイヤー2 | $H_{21}$ | $x_2$ |

# 演習2：A君とB子のゲーム




| A君 | B子 |
|---|---|
| 3 | 3 |
| 0 | 0 |
| −3 | −3 |
| 1 | −1 |
| 4 | 1 |
| −2 | −2 |

ナッシュ均衡，及び部分ゲーム完全均衡を求めよ

# 演習2:A君とB子のゲームの解を求める

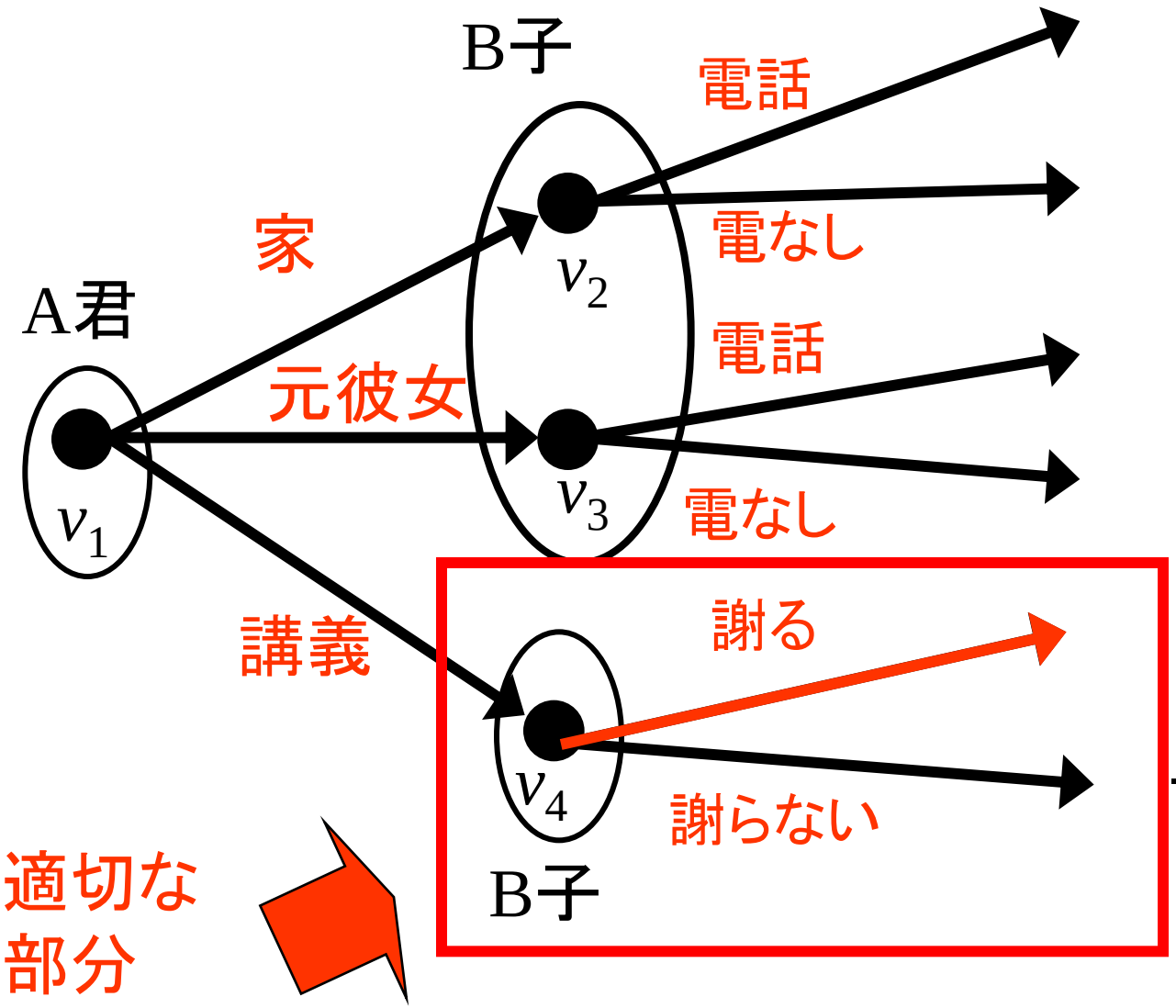
| A君＼B子 | (電話,謝る) | (電話,非謝) | (非電,謝る) | (非電,非謝) |
|---|---|---|---|---|
| 家 | (3, 3) | (3, 3) | (0, 0) | (0, 0) |
| 元カノ | (-3, -3) | (-3, -3) | (1, -1) | (1, -1) |
| 講義 | (4, 1) | (-2, -2) | (4, 1) | (-2, -2) |

ナッシュ均衡は4つ ⇒ 起きる可能性は3つ
(1)A君が家にいて，B子が電話
(2)A君は元カノのもとへ行き，B子は電話しない
(3) A君が講義に出て，B子は謝る

部分ゲーム完全均衡は？

A君が元カノの所へ行く可能性(2)はあるのか？

# 演習2:A君とB子のゲーム




| A君 | B子 |
|---|---|
| 3 | 3 |
| 0 | 0 |
| −3 | −3 |
| 1 | −1 |
| 4 | 1 |
| −2 | −2 |

適切な部分ゲーム

# 演習2：A君とB子のゲームの解を求める

| B子 / A君 | (電話,謝る) | (電話,非謝) | (非電,謝る) | (非電,非謝) |
|---|---|---|---|---|
| 家 | ( 3 , 3 ) | ~~( 3 , 3 )~~ | ( 0 , 0 ) | ( 0 , 0 ) |
| 元カノ | ( -3, -3) | ( -3, -3) | ( 1 , -1) | ~~( 1 , -1)~~ |
| 講義 | ( 4 , 1 ) | ( -2, -2) | ( 4 , 1 ) | ( -2, -2) |

B子が謝らない戦略は，部分ゲーム完全均衡にならない

部分ゲーム完全均衡は2つだが，どちらでも結果は1つ
⇒A君が講義に出て，B子は謝る

結果を絞り込むことができる！

Selten ありがとう！（A君・B子）

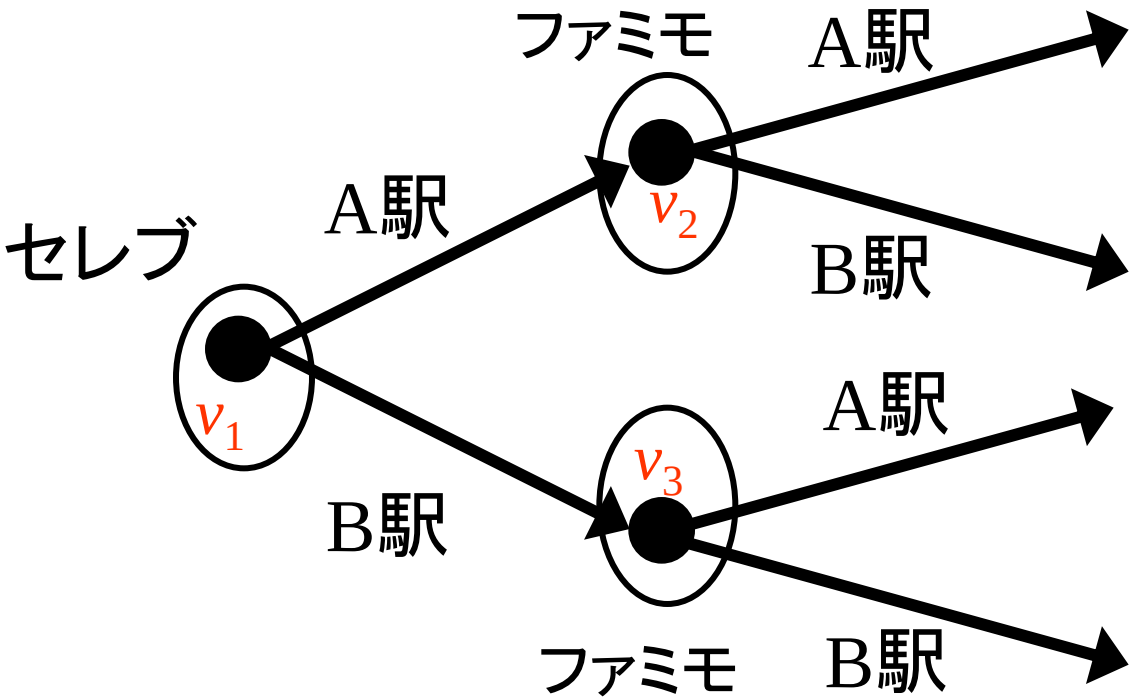
# 【発展】 展開形ゲームと戦略形ゲーム

# 展開形ゲームと戦略形ゲーム

- 戦略形ゲーム→展開形ゲーム
  - 「情報集合」を用いれば変換が可能
- 展開形ゲーム→戦略形ゲーム
  - すべての意思決定点における行動を決めた「戦略」をゲームの開始前の戦略と考えれば，戦略形ゲームに変換可能

- どちらのゲームが「基本」か？
  - 2つを研究しなくても基本となるゲームを詳しく研究すれば，もう一方に関しては，そこから答が導けるはず

# 展開形ゲーム⇒戦略形ゲーム：再掲




| セレブ | ファミモ |
|---|---|
| 300 | 300 |
| 600 | 400 |
| 400 | 600 |
| 200 | 200 |

この完全情報の展開形ゲームを戦略形ゲームに変換し，ナッシュ均衡を求める

# 先読みとナッシュ均衡の不一致

| ファミモ / セレブ | (A駅,A駅) | (A駅,B駅) | (B駅,A駅) | (B駅,B駅) |
|---|---|---|---|---|
| A駅 | (300,300) | (300,300) | (600,400) | (600,400) |
| B駅 | (400,600) | (200,200) | (400,600) | (200,200) |

- ナッシュ均衡　(A駅,(B駅,A駅)), (A駅,(B駅,B駅)), (B駅,(A駅,A駅)),
- 先読み解　(A駅,(B駅,A駅))

元の展開形ゲームに戻らなければ，先読み解は分からない？⇒展開形ゲームこそが重要？

# 支配された戦略の削除＝部分ゲーム完全均衡

| ファミモ / セレブ | (B駅,A駅) |
|---|---|
| A駅 | (600,400) |

- 支配された戦略を繰り返して削除する
  - (A駅,A駅), (A駅,B駅), (B駅,B駅)は(B駅,A駅)に支配されている
  - それらを削除すると，B駅はA駅に支配される
- (A駅,(B駅,B駅))は支配された戦略の繰り返し削除による解

# まとめ：戦略形ゲームと展開形ゲーム

- 戦略形ゲームは展開形ゲームに変換できる
- 展開形ゲームも戦略形ゲームに変換できる
- 展開形ゲームを戦略形ゲームに変換すると，ナッシュ均衡が多く存在するが，その中のナッシュ均衡がすべて適切なゲームの解ではない
  - 均衡の精緻化の必要性
- ナッシュ均衡の中で部分ゲーム完全均衡解をゲームの解と考える
- 完全情報の展開形ゲームを戦略形ゲームに直したときに，支配された戦略を繰り返し削除すると，元のゲームの部分ゲーム完全均衡（この場合はバックワードインダクション解）が得られる

# 7.3　投票とゲーム理論

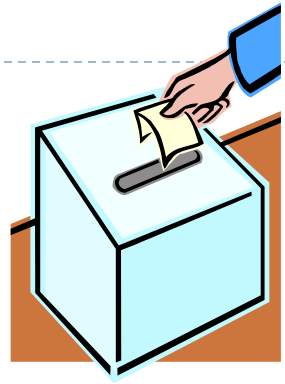
# もでる二十六：日本触球協会会長選挙

- 初代会長選びー候補者はR氏，L氏，N氏の3人
- 投票する評議員20人は3つの派閥に分かれている
- 各派閥の人数と候補者の選好（好み）の順序

- 右派（9人）：　R氏　＞　N氏　＞　L氏
- 左派（8人）：　L氏　＞　N氏　＞　R氏
- 中立派（3人）：　N氏　＞　L氏　＞　R氏

投票ルールによって，選ばれる会長には違いがあるのだろうか？

# さまざまな投票ルール



- 単記投票(plurality voting)
  - 各投票者はもっとも好む案を1つ選び投票する
  - 最多得票数の案が選ばれる
- 決選投票付き単記投票(plurality voting with runoff)
  - 各投票者はもっとも好む案を1つ選び投票する
  - もっとも多い上位2つの案が残り，決選投票
- ボルダ投票（順位評点法）
  - 各投票者は，もっとも好む案に2点，次に好む案を1点，もっとも好まないものを0点として投票（案が3つの時）
  - 合計得点の多い案が選ばれる

# 単記投票

- 全員が自分の好みに従って正直に投票したとする

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 右派(9人): | R氏 | > | N氏 | > | L氏 |
| 左派(8人): | L氏 | > | N氏 | > | R氏 |
| 中立派(3人): | N氏 | > | L氏 | > | R氏 |

- R氏 9点, L氏 8点, N氏3点　　R氏が当選

- 投票者のもっとも好む案しか考慮しない
- 最大派閥のもっとも好む案が選ばれる
- 2大候補の争い, 中立派の票は死票に

# 決選投票つき単記投票

- 全員が自分の好みに従って正直に投票したとする

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 右派(9人): | R氏 | > | N氏 | > | L氏 |
| 左派(8人): | L氏 | > | N氏 | > | R氏 |
| 中立派(3人): | N氏 | > | L氏 | > | R氏 |

- R氏 9点, L氏 8点, N氏3点　　R氏とL氏の決選
- R氏 9点, L氏 12点　　L氏の逆転当選！
- 2大候補(決選)には全員の好みは反映される
- 第1段階では投票者のもっとも好む案しか考慮しない
- 第1段階との逆転現象が起きる－やや不自然？

# ボルダ投票（順位評点法）

- 全員が自分の好みに従って正直に投票したとする

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 右派（9人）: | R氏 | ＞ | N氏 | ＞ | L氏 |
| 左派（8人）: | L氏 | ＞ | N氏 | ＞ | R氏 |
| 中立派（3人）: | N氏 | ＞ | L氏 | ＞ | R氏 |

- 好む順に2点，1点，0点
- R氏　18点，L氏 19点，N氏23点

N氏が当選

- 投票者の全体の選好が考慮されるー投票者は下位まできちんと点数を付けられるのか？
- 中庸的，折衷的な案が選ばれる（玉虫色？）

NABENAVI .net

# ポイント48

投票ルールには様々な特徴がある

単記投票は1番好む代替案に重点を置き多数派の意見を尊重

決戦付き単記投票は全体の争点が2者択一になるときに適し

ボルダ投票は中庸で折衷的な代替案を選ぶ

# 戦略的投票

# 戦略的投票の分析

- ここまでの投票ルールの分析では，各投票者は正直に自分の好むものに投票する，としてきた
  - ゲーム理論以前の投票分析－70年代以前
  - 社会選択論
  - 戦略的操作の可能性の指摘－ファルカーソン，ギバード
- 「戦略的投票」を考察する
  - メカニズムデザインの一分野

# 単記投票における戦略的投票

- 単記投票で正直に投票すれば？
- R氏　9点，L氏 8点，N氏3点

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 右派(9人)： | R氏 | ＞ | N氏 | ＞ | L氏 |
| 左派(8人)： | L氏 | ＞ | N氏 | ＞ | R氏 |
| 中立派(3人)： | N氏 | ＞ | L氏 | ＞ | R氏 |

中立派の票は死票に

R氏が当選

N氏に投票しても，当選させられない

→L氏に投票すれば，一番好まないR氏より2番目に好むL氏を当選させられる

全員が一番好むものを集計しようとする単記投票の意図に反する

# ボルダ投票における戦略的投票

- Wゼミの夕食選び－ボルダ投票で決定

  - Aさん：じゃじゃ麺>冷麺>ビビン麺＞そば
  - Bさん：冷麺>じゃじゃ麺>ビビン麺＞そば
  - Cさん：冷麺>じゃじゃ麺>ビビン麺＞そば

- ボルダ投票の結果－正直に投票すれば？
  - じゃじゃ麺 7点　冷麺8点　ビビン麺3点　そば0点
  - 冷麺に決定
- Aさんが以下のように投票したならば？

  Aさん：じゃじゃ麺>ビビン麺＞そば>冷麺

  - じゃじゃ麺 7点　冷麺6点　ビビン麺4点　そば1点
  - じゃじゃ麺に決定！

NABENAVI .net

# じゃじゃ麺

三軒茶屋「じゃじゃおいけん」にて

# じゃじゃ麺，よくかき混ぜて食う

お好みでニンニク，ラー油，しょうが．を入れる

# じゃじゃ麺のシメは「チータンタン」

写りは悪いけど，うまい！

# ボルダ投票における戦略的投票

- 単記投票と異なり，自分のもっとも好むものを戦略的投票で当選させられることで，ボルダ投票の戦略的投票は深刻？
- ボルダ投票－18世紀のフランス王立科学アカデミーの会員選出方法で単記投票の問題を指摘したボルダ(Borda)によって提案されたもの
- 戦略的投票の可能性をコンドルセが指摘
- ボルダ「私の投票方法は正直者のための方法だ」
  - 佐伯胖「決め方の論理」（1980）東京大学出版会より

# 単記投票をゲーム理論で分析する

- 右派(9人): R氏 > N氏 > L氏
- 左派(8人): L氏 > N氏 > R氏
- 中立派(3人): N氏 > L氏 > R氏

- 単記投票で正直に投票すれば？
- R氏 9点, L氏 8点, N氏3点

R氏が当選

中立派が死票を避けるためL氏に投票 →L氏が当選

- 中立派だけが戦略的に投票し, 他派は正直に投票するという仮定はおかしい.
- ⇒全員が戦略的に投票した結果をゲーム理論で分析することもできる

# 単記投票をゲーム理論で分析する

- 右派(9人): R氏 ＞ N氏 ＞ L氏
- 左派(8人): L氏 ＞ N氏 ＞ R氏
- 中立派(3人):N氏 ＞ L氏 ＞ R氏

- 各プレイヤーが好む順に,
- ２点，１点，０点と
- 利得を定める

3派閥の票が割れた場合は右派の投票が優先する(最多得票なので)

中立　R

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | R | R | R |
| L | R | L | L |
| N | R | N | N |

L

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | R | L | R |
| L | L | L | L |
| N | N | L | N |

N

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | R | R | N |
| L | L | L | N |
| N | N | N | N |

# 演習：単記投票をゲーム理論で分析する

- 右派（9人）：　R氏　＞　N氏　＞　L氏
- 左派（8人）：　L氏　＞　N氏　＞　R氏
- 中立派（3人）：N氏　＞　L氏　＞　R氏

- 各プレイヤーが好む順に，
- ２点，１点，０点と
- 利得を定める

3派閥の票が割れた場合は右派の投票が優先する（最多得票）
以下の空いてる部分を埋めよ！

中立　R

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | |
| L | (2,0,0) | | (0,2,1) |
| N | | | (1,1,2) |

L

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (0,2,1) | (2,0,0) |
| L | (0,2,1) | | (0,2,1) |
| N | (1,1,2) | (0,2,1) | |

N

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | (1,1,2) |
| L | | (0,2,1) | |
| N | (1,1,2) | | |

# 単記投票をゲーム理論で分析する

■右派(9人): R氏 ＞ N氏 ＞ L氏
■左派(8人): L氏 ＞ N氏 ＞ R氏
■中立派(3人):N氏 ＞ L氏 ＞ R氏

■各プレイヤーが好む順に,
■2点, 1点, 0点と
■利得を定める

票が割れて, 勝者が決まらない場合は右派の投票が優先する(最多得票)

中立 R

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | (2,0,0) |
| L | (2,0,0) | (0,2,1) | (0,2,1) |
| N | (a,b,c) | (1,1,2) | (1,1,2) |

L

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (0,2,1) | (2,0,0) |
| L | (0,2,1) | (0,2,1) | (0,2,1) |
| N | (1,1,2) | (0,2,1) | (d,e,f) |

N

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | (1,1,2) |
| L | (g,h,i) | (0,2,1) | (1,1,2) |
| N | (1,1,2) | (1,1,2) | (1,1,2) |

# 単記投票をゲーム理論で分析する

- 右派(9人): R氏 ＞ N氏 ＞ L氏
- 左派(8人): L氏 ＞ N氏 ＞ R氏
- 中立派(3人):N氏 ＞ L氏 ＞ R氏

- 各プレイヤーが好む順に,
- ２点，１点，０点と
- 利得を定める

3派閥の票が割れた場合は右派の投票が優先する(最多得票)

中立 R

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | (2,0,0) |
| L | (2,0,0) | (0,2,1) | (0,2,1) |
| N | (2,0,0) | (1,1,2) | (1,1,2) |

L

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (0,2,1) | (2,0,0) |
| L | (0,2,1) | (0,2,1) | (0,2,1) |
| N | (1,1,2) | (0,2,1) | (1,1,2) |

N

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | (1,1,2) |
| L | (0,2,1) | (0,2,1) | (1,1,2) |
| N | (1,1,2) | (1,1,2) | (1,1,2) |

# 単記投票をゲーム理論で分析する

- 右派(9人): R氏 ＞ N氏 ＞ L氏
- 左派(8人): L氏 ＞ N氏 ＞ R氏
- 中立派(3人):N氏 ＞ L氏 ＞ R氏

- 各プレイヤーが好む順に,
- ２点，１点，０点と
- 利得を定める

3派閥の票が割れた場合は右派の投票が優先する(最多得票)

中立 R

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | (2,0,0) |
| L | (2,0,0) | (0,2,1) | (0,2,1) |
| N | (2,0,0) | (1,1,2) | (1,1,2) |

L

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (0,2,1) | (2,0,0) |
| L | (0,2,1) | (0,2,1) | (0,2,1) |
| N | (1,1,2) | (0,2,1) | (1,1,2) |

N

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | (1,1,2) |
| L | (0,2,1) | (0,2,1) | (1,1,2) |
| N | (1,1,2) | (1,1,2) | (1,1,2) |

ナッシュ均衡は？

右派の最適反応戦略

# 単記投票をゲーム理論で分析する

- 右派(9人): R氏 > N氏 > L氏
- 左派(8人): L氏 > N氏 > R氏
- 中立派(3人): N氏 > L氏 > R氏

- 各プレイヤーが好む順に,
- 2点, 1点, 0点と
- 利得を定める

3派閥の票が割れた場合は右派の投票が優先する(最多得票)

中立 R

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | (2,0,0) |
| L | (2,0,0) | (0,2,1) | (0,2,1) |
| N | (2,0,0) | (1,1,2) | (1,1,2) |

L

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (0,2,1) | (2,0,0) |
| L | (0,2,1) | (0,2,1) | (0,2,1) |
| N | (1,1,2) | (0,2,1) | (1,1,2) |

N

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | (1,1,2) |
| L | (0,2,1) | (0,2,1) | (1,1,2) |
| N | (1,1,2) | (1,1,2) | (1,1,2) |

ナッシュ均衡は？ **左派の最適反応戦略**

# 単記投票をゲーム理論で分析する

- 右派(9人)：　R氏　＞　N氏　＞　L氏
- 左派(8人)：　L氏　＞　N氏　＞　R氏
- 中立派(3人)：N氏　＞　L氏　＞　R氏

- 各プレイヤーが好む順に，
- ２点，１点，０点と
- 利得を定める

3派閥の票が割れた場合は右派の投票が優先する(最多得票)

中立　R

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | (2,0,0) |
| L | (2,0,0) | (0,2,1) | (0,2,1) |
| N | (2,0,0) | (1,1,2) | (1,1,2) |

L

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (0,2,1) | (2,0,0) |
| L | (0,2,1) | (0,2,1) | (0,2,1) |
| N | (1,1,2) | (0,2,1) | (1,1,2) |

N

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | (1,1,2) |
| L | (0,2,1) | (0,2,1) | (1,1,2) |
| N | (1,1,2) | (1,1,2) | (1,1,2) |

ナッシュ均衡は？　**中立派の最適反応戦略**

# 単記投票をゲーム理論で分析する

- 右派(9人): R氏 ＞ N氏 ＞ L氏
- 左派(8人): L氏 ＞ N氏 ＞ R氏
- 中立派(3人):N氏 ＞ L氏 ＞ R氏

- ナッシュ均衡は？
- 複数のナッシュ均衡！

3派閥の票が割れた場合は右派の投票が優先する(最多得票)

中立 R

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | (2,0,0) |
| L | (2,0,0) | (0,2,1) | (0,2,1) |
| N | (2,0,0) | (1,1,2) | (1,1,2) |

L

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (0,2,1) | (2,0,0) |
| L | (0,2,1) | (0,2,1) | (0,2,1) |
| N | (1,1,2) | (0,2,1) | (1,1,2) |

N

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | (1,1,2) |
| L | (0,2,1) | (0,2,1) | (1,1,2) |
| N | (1,1,2) | (1,1,2) | (1,1,2) |

- 各プレイヤーとも「一番悪い候補に投票」することは弱支配された戦略になる⇒選ばれることはない

# 投票のゲームとナッシュ均衡

- 投票のゲームでは，ナッシュ均衡が多数現れる
- 3人以上の場合，全員が同じ案に投票することはナッシュ均衡
  - たとえ全員がそれを嫌っていたとしても！
  - 1人が戦略を変えても同じ案が選ばれるから！
- どのプレイヤーも，「自分が一番好まない案に票を入れる」ことは弱支配される
  - 2番目に好まない案は，もはや支配されない
  - 一番好まない案になるか，2番目に好まない案になるかを「決定する投票者」となった場合，2番目に好まない案に入れた方が良い.
- また今回の場合，右派は1番好むRに入れることが支配戦略（他の2つの案は支配される）

# 単記投票をゲーム理論で分析する

- 右派(9人): R氏 ＞ N氏 ＞ L氏
- 左派(8人): L氏 ＞ N氏 ＞ R氏
- 中立派(3人):N氏 ＞ L氏 ＞ R氏

- ナッシュ均衡は？
- 複数のナッシュ均衡！

中立 R

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | (2,0,0) |
| L | (2,0,0) | (0,2,1) | (2,0,0) |
| N | (2,0,0) | (1,1,2) | (1,1,2) |

L

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (0,2,1) | (2,0,0) |
| L | (0,2,1) | (0,2,1) | (0,2,1) |
| N | (1,1,2) | (0,2,1) | (1,1,2) |

N

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | (1,1,2) |
| L | (0,2,1) | (0,2,1) | (1,1,2) |
| N | (1,1,2) | (1,1,2) | (1,1,2) |

- 各プレイヤーとも「一番悪い候補に投票」することは弱支配された戦略になる⇒選ばれることはない

# 単記投票をゲーム理論で分析する

- 右派(9人)：　R氏　＞　N氏　＞　L氏
- 左派(8人)：　L氏　＞　N氏　＞　R氏
- 中立派(3人)：N氏　＞　L氏　＞　R氏

支配されないナッシュ均衡は
(R,L,L)，(R,N,N)
L氏かN氏が選ばれる結果に

票が割れて勝者が決まらない場合は，右派の投票が優先するものとする

中立　R

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | (2,0,0) |
| L | (2,0,0) | (0,2,1) | (0,0,0) |
| N | (2,0,0) | (1,1,2) | (1,1,2) |

L

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (0,2,1) | (2,0,0) |
| L | (0,2,1) | (0,2,1) | (0,2,1) |
| N | (1,1,2) | (0,2,1) | (1,1,2) |

N

| 右＼左 | R | L | N |
|---|---|---|---|
| R | (2,0,0) | (2,0,0) | (1,1,2) |
| L | (0,2,1) | (0,2,1) | (1,1,2) |
| N | (1,1,2) | (1,1,2) | (1,1,2) |

正直に投票した結果　⇒R氏が選ばれる.
戦略的投票を分析した結果　⇒L氏またはN氏が選ばれる.

# 投票のゲーム理論分析

- 投票では，
  - 全員が正直に投票すると仮定した場合と
  - 戦略的に投票すると仮定し，ゲーム理論で分析した場合と

では，結果が異なる．

- ナッシュ均衡は多数ある
  - プレイヤーが3人以上の場合は，同じ候補者に投票することはナッシュ均衡
- 各プレイヤーは，一番好まない投票者に投票することはない（弱支配される）
  - それ以外の候補者は，たとえ自分の好みが低くとも「その候補者」と「その次に好まない候補者」のどちらが当選するかが，自分の投票により決まる場合，最適反応戦略とあることがある．
- 支配されないナッシュ均衡を解と考えよ

# 2020年夏季五輪の開催地決定

- 候補　東京（日本），イスタンブール（トルコ），マドリッド（スペイン）
- 投票結果
  - 第1回投票
    - 東京　42票
    - イスタンブール　26票
    - マドリッド　26票
  - 決選投票（第2回投票進出へ，イスタンブールvsマドリッド）
    - イスタンブール　49票　マドリッド　45票
    - 第2回はイスタンブールと東京の決選
  - 第2回投票
    - 東京　60票
    - イスタンブール

# 五輪開催地の戦略的投票（東京五輪バージョン）

- 注意！以下のストーリーは全くのフィクションです
- ××年，オリンピック開催地の決定
- 候補地　T（J国），I（T国），M（S国）
- IOC委員97人の選好分布が以下であったとする.

- J国　T>I>M
- J国以外
  - 23人　T>I>M
  - 20人　T>M>I
  - 25人　I>M>T
  - 14人　M>T>I
  - 12人　M>I>T

# J国は自国の開催地Tに投票すべきか？

J国が正直に投票した場合

- J国　T>I>M
- J国以外
  - 23人　T>I>M
  - 20人　T>M>I
  - 25人　I>M>T
  - 14人　M>T>I
  - 12人　M>I>T

- 第1回投票結果
  - T　1＋23＋20＝44
  - I　25
  - M　14＋12＝26
- TとMが第2回投票へ

- 第2回投票結果（M　vs　T）
  - T　1＋23＋20＝44
  - M　25＋14＋12＝51

Mが五輪の開催地に！

⇒Tは落選

# J国は自国の開催地Tに投票すべきか？

J国が第1回投票で，戦略的にMへ投票した場合

- J国　T>I>M
- J国以外
  - 23人　T>I>M
  - 20人　T>M>I
  - 25人　I>M>T
  - 14人　M>T>I
  - 12人　M>I>T

- 第1回投票結果
  - T　23＋20＝43
  - I　1＋25＝26（1はJ国）
  - M　14＋12＝26
- IとMが決選投票！
  - （Jは正直に投票したとする）
  - I　1＋23＋25＝49
  - M　20＋14＋12＝46
- Iが第2回投票へ！
- 第2回投票結果(I　vs　T)
  - T　1＋22＋23＋14＝60
  - I　25＋12＝37

戦略的投票によって，Tが五輪の開催地に！

# 決選投票つき単記投票ー決戦での逆転例 #1

- オリンピックの開催候補地を選ぶ国際オリンピック委員会(IOC)の投票では，これが良く起きる
- 正確には決選投票ではない.
  - 過半数を獲得する国がない場合は，最下位の国を落選させ残りの国で投票し，これを繰り返す.
- 2010年冬季五輪開催地決定(2003年7月プラハ)
  - 候補地はバンクーバー，平昌(ピョンチャン)，ザルツブルグ
  - 第1回:平昌51票，バンクーバー40票，ザルツブルグ16票
  - 第2回:バンクーバー56票，平昌53票

逆転で韓国は悲願の冬季五輪誘致ならず！

ザルツブルグの票がほとんど(すべて？)バンクーバーに回ったため

決選投票では，自分の票が減ることはないことに注意し，次の例を考えよう

# 決選投票つき単記投票ー決戦での逆転例＃2

- 2012年夏季五輪開催地決定（2005年7月シンガポール）
  - 候補地はパリ，ロンドン，ニューヨーク，モスクワ，マドリッド

- 第1回：モスクワが脱落
- 第2回：ロンドン27, パリ25, マドリッド32, ニューヨーク16
  - ニューヨークが脱落
- 第3回：ロンドン39，パリ33,マドリッド31
  - 第2回でトップだったマドリッドが最下位に落ち脱落
  - ニューヨークの票がロンドン，パリに回ったため．しかし？
  - マドリッドの票が第2回に比べ1票減っている？？
- 第4回：ロンドンに決定！パリは悲願ならず．

なぜマドリッドは1票減ったのか？
ー間違い説？戦略的投票？

# 決選投票つき単記投票ー決戦での逆転例＃3

- 2007年も！
- 2014年冬季五輪開催地決定（2007年7月グアテマラシティ）
  - 候補地はソチ，平昌（ピョンチャン），ザルツブルグ
  - 第1回：平昌36票，ソチ34票，ザルツブルグ25票
  - 第2回：ソチ51票，平昌47票

またしても逆転で，韓国は悲願の五輪の誘致ならず！

# 2016年オリンピック開催国　JOC投票結果

- 2009年10月2日　コペンハーゲン---wikipediaより抜粋

| Election of the Host City of the 2016 Summer Olympics — ballot results | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Candidate City** | **Country (NOC)** | **Round 1** | **Round 2** | **Round 3** |
| Rio de Janeiro | Brazil | 26 (27.66%) | **46** (48.42%) | **66** (67.35%) |
| Madrid | Spain | **28** (29.79%) | 29 (30.53%) | 32 (32.65%) |
| Tokyo | Japan | 22 (23.40%) | 20 (21.05%) | — |
| Chicag | United States | 18 (19.15%) | — | — |
| **121st IOC Session** | Vote details | **Round 1** | **Round 2** | **Round 3** |
| Copenhagen - Denmark | Eligible | 95 | 97 | 99 |
| | Participants | 94 | 96 | 98 |
| | Abstentions | 0 | 1 | 0 |
| | Valid ballots | 94 | 95 | 98 |

# 単純多数決

- 単純多数決
  - 候補者を2つずつの「ペア」として選び，多数決を取る
  - 総当たり戦
  - すべてのペアに対して多数決で勝っている候補（すなわちその候補者以外のすべての候補者に多数決で勝っている候補）があれば多数決勝者として，その候補者を選ぶ
  - 18世紀のフランスの科学者コンドルセ(Condorcet)が提案したので，多数決勝者はコンドルセ勝者とも呼ばれる
- 我々が通常多数決と呼んでいる方法は単記投票と同じ

# 単純多数決投票

- 全員が自分の好みに従って正直に投票したとする

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 右派(9人): | R氏 | > | N氏 | > | L氏 |
| 左派(8人): | L氏 | > | N氏 | > | R氏 |
| 中立派(3人): | N氏 | > | L氏 | > | R氏 |

- R氏 vs. N氏　　R氏　9票　N氏 11票　N氏の勝利
- N氏 vs. L氏　　N氏 12票　L氏　8票　N氏の勝利
- L氏 vs. R氏　　L氏　11票　R氏　9票　L氏の勝利

- N氏は自分以外のすべての候補者に多数決で勝っている
- N氏を当選とする

# 単純多数決，循環多数決，コンドルセ勝者

- 単純多数決は，もし多数決勝者（コンドルセ勝者）が存在するならば，良い性質を持った決め方であることが知られている．
- しかし，多数決勝者が存在しないことがある
  →循環多数決

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 右派（9人）： | A氏 | ＞ | B氏 | ＞ | C氏 |
| 左派（8人）： | B氏 | ＞ | C氏 | ＞ | A氏 |
| 中立派（3人）： | C氏 | ＞ | A氏 | ＞ | B氏 |

多数決勝者が存在しない！

- A氏 vs. B氏　A氏12票　B氏8票　A氏の勝利
- B氏 vs. C氏　B氏17票　C氏3票　B氏の勝利
- C氏 vs. A氏　C氏11票　A氏9票　C氏の勝利

# まとめ:戦略的投票

- 投票ルールによって選ばれる案は異なる．単記投票，ボルダ投票，決選投票付き単記投票，単純多数決などの投票ルールのどれを使うかを考える必要がある．
- 単純多数決は，手間がかかるが良い決定法である．
- しかし，単純多数決では，コンドルセ勝者がいない循環多数決の状況に陥ることがある．
- 投票は皆が正直に投票するとは限らず，戦略的投票が考えられる．ゲーム理論による分析が必要である．
- 2つの案の投票では，ほとんどの投票ルールで正直に投票することが弱支配戦略である．
- 3つ以上の案では，どのような審議順序を選ぶかは，ゲーム理論による戦略行動の分析が役に立つ．

# 戦略的投票例題:2011年民主党代表選

## 投票1回目

1. 海江田氏143票
2. 野田氏102票
3. 前原氏74票
4. 鹿野氏52票
5. 馬淵氏24票

## 投票2回目

1. 野田氏　215票
2. 海江田氏　177票

- 小沢・鳩山グループの推す海江田氏
- 反小沢グループの野田・前原両陣営は，事前に決選投票での連携を確認
- 前原氏（外国人献金問題と主張が強すぎる傾向）は，野田氏に比べ意外と支持が少なかった（1回目の投票結果でも分かる）

# 戦略的投票例題 ： 小沢一郎が採るべき策は？
2011年民主党代表選

## 投票1回目

1. 海江田氏143票
2. 野田氏102票
3. 前原氏74票
4. 鹿野氏52票
5. 馬淵氏24票

## 投票2回目

1. 野田氏　215票
2. 海江田氏　177票

（仮定）

- 野田＋前原　vs 海江田
- 鹿野・馬渕派
  - 野田>海江田
  - 前原<海江田
- 小沢は海江田に入れる票は自由に扱えるとする

問題：あなたが小沢一郎であれば，どのような投票戦略を取るべきか．

# 戦略的投票例題:2011年民主党代表選

**投票1回目**

- (1)海江田氏143票
- (2)野田氏102票
- (3)前原氏74票
- (4)鹿野氏52票
- (5)馬淵氏24票

**投票2回目**

- 野田氏　215票
- 海江田氏177票

問題:あなたが小沢一郎であれば，どのような投票戦略を取るべきか.

# 戦略的投票例題：2011年民主党代表選

## 投票1回目

- （1）海江田氏143票
- （2）野田氏102票
- （3）前原氏74票
- （4）鹿野氏52票
- （5）馬淵氏24票

## 投票2回目

- 野田氏　215票
- 海江田氏177票

- 小沢・鳩山グループの推す海江田氏
- 反小沢グループの野田・前原両陣営は，事前に決選投票での連携を確認
- 前原氏（外国人献金問題と主張が強すぎる傾向）は，野田氏に比べ意外と支持が少なかった（1回目の投票結果でも分かる）
- 馬渕氏は，自分が敗れた場合は政策が近い海江田氏を支持することを表明（NHKが誤報）

# 戦略的投票例題:2011年民主党代表選

海江田票　143

馬渕票　24

鹿野票　52

前原票　74

野田票　102

海江田　177

167

キャスティングボートは鹿野支持票

野田　215

176

# 戦略的投票例題:2011年民主党代表選

- 「決選投票付き単記投票」における戦略的操作
  ⇒1回目の投票で，決選に残る候補を操作する
- 小沢・海江田陣営の戦略
  ⇒1回目の投票で自分の支持票の30票程度を前原に回す
- これにより，決選投票は「前原vs海江田」となる．これにより，勝つ確率は少し上がったはずである．

| | |
|---|---|
| 海江田 | 143票 |
| 野田 | 102票 |
| 前原 | 74票 |
| 鹿野 | 52票 |
| 馬淵 | 24票 |

⇒

| | |
|---|---|
| 海江田 | 113票 |
| 野田 | 102票 |
| 前原 | 104票 |
| 鹿野 | 52票 |
| 馬淵 | 24票 |

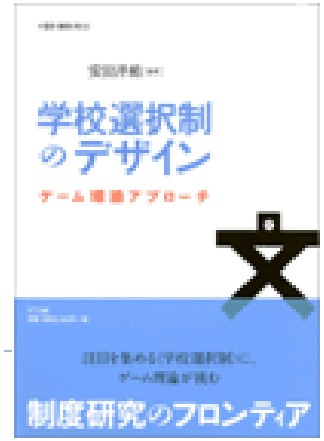
決選は
海江田vs
前原に

# 割り当ての設計

# 安定マッチングとその応用

- 公立学校の選択制度
  - どのように希望者を割り当てるべきか？
  - 制度設計へのゲーム理論の応用事例
- ボストンとニューヨークの学校制度の変革
  - ボストン方式から受入保留方式へ
  - Gale-Shapley アルゴリズムの応用
  - Abdulkairğu, Sönmez, Roth
- Roth, Shapley のノーベル賞受賞（2012)
  - 安定配分理論と市場設計の実践に関する功績

（参考）学校選択制のデザイン
安田洋祐編著　NTT出版2010



# 学校選択とマッチング

| | |
|---|---|
| 一郎<br>B>A>C | A校<br>1>3>2 |
| 二郎<br>A>B>C | B校<br>2>1>3 |
| 三郎<br>A>B>C | C校<br>2>1>3 |

- 各校の定員は1名
- どの学校に誰を割り当てるべきか？
- どのような方法で割り当てるべきか？

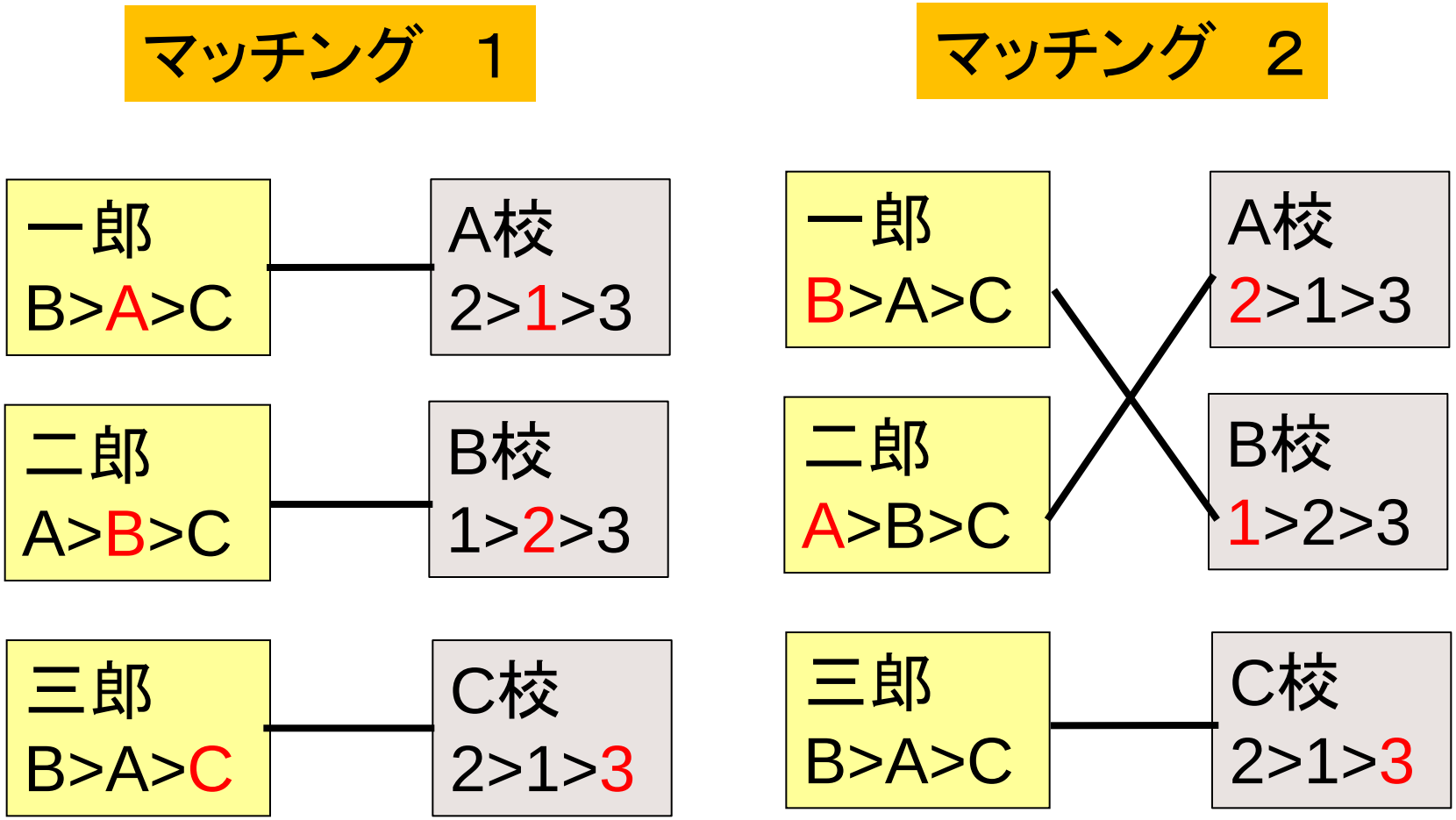
# マッチングの評価基準を考える

## マッチング　1

| | |
|---|---|
| 一郎<br>B>A>C | A校<br>2>1>3 |
| 二郎<br>A>B>C | B校<br>1>2>3 |
| 三郎<br>B>A>C | C校<br>2>1>3 |

- このマッチングは，良いマッチングか？

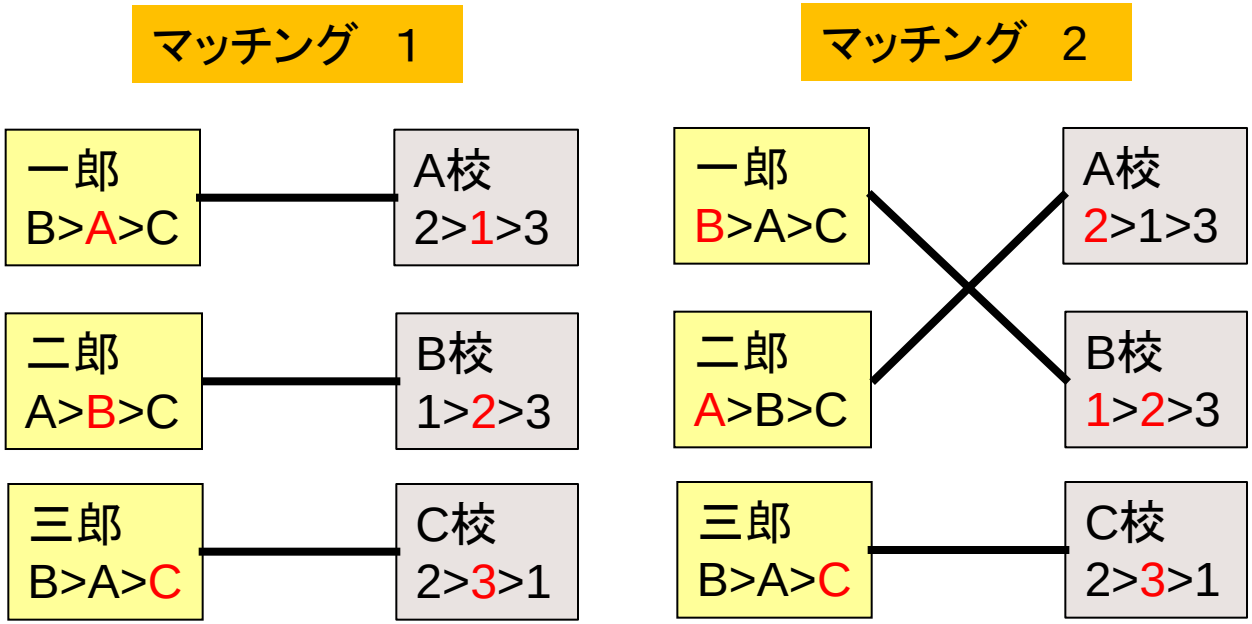
# パレート優位なマッチング




- マッチング１⇒マッチング２では，全員が同じか良くなっている！

# マッチングの評価基準 ： パレート最適性

- マッチングAに比べて，マッチングBの方が，生徒と学校の両方の好みが上がるか同じならば，そのマッチングBはマッチングAよりパレート優位であるという．
- そのマッチングよりパレート優位なマッチングがないとき，そのマッチングがパレート最適であると言う．




- マッチング１ パレート最適ではない
- マッチング２ パレート最適

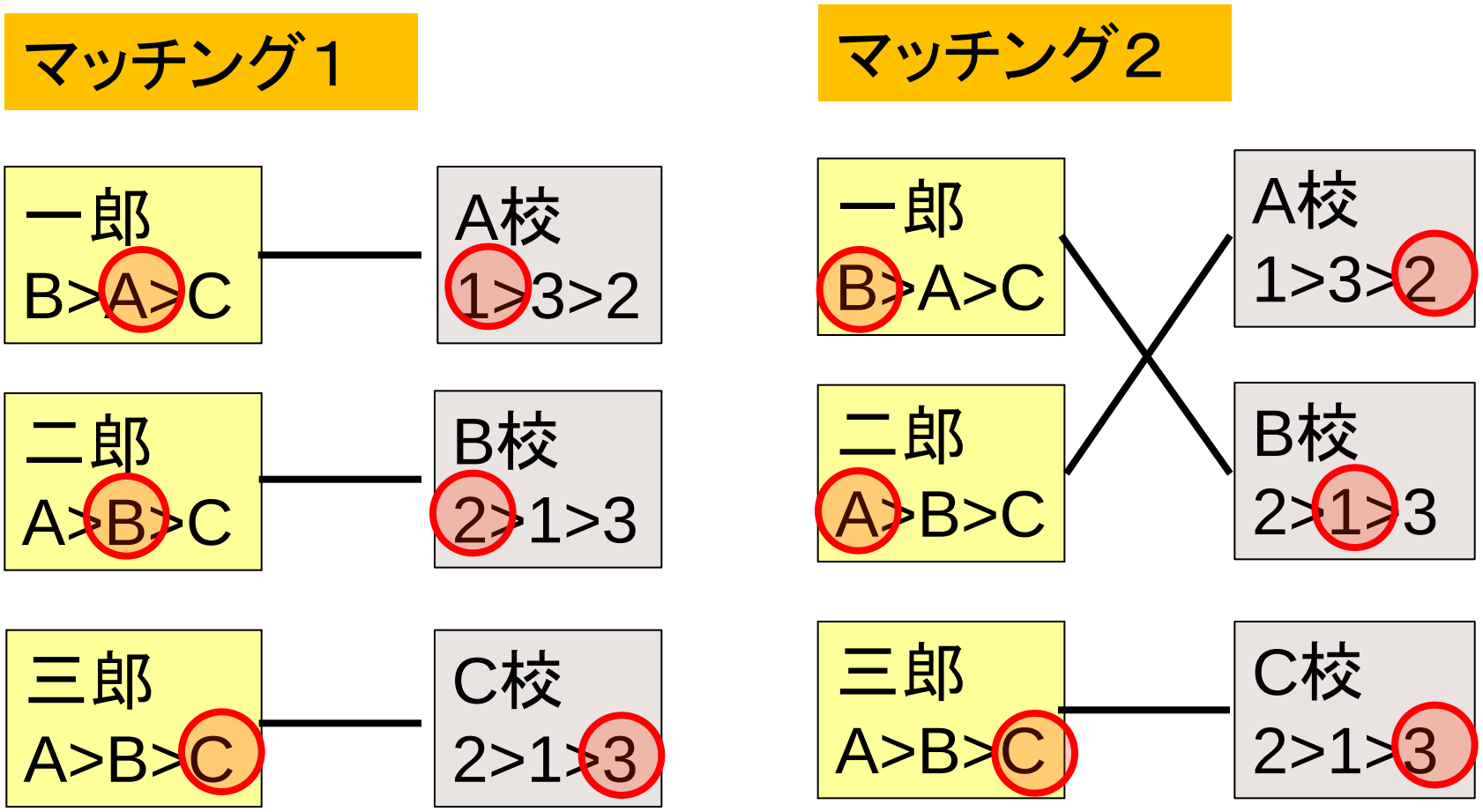
# パレート基準

- 考え方１：第1志望から，志望の高い結果の順に点数をつけ，その合計を最大になるように割り当てる（ORなどでよく用いられる方法）
- 考え方２：個人間の「効用」は比較できないので，個人の獲得点数の合計では測れないと考える．
- パレート優位：マッチングAとBにおいて，AがBに比べて
  - ・すべての生徒の好みを下げることなく
  - ・１人以上の生徒の好みを上げている

  ならば，AはBに比べ（生徒側）パレート優位であると言う．
- あるマッチングに，生徒側のパレート優位なマッチングが存在しないならば，それは（生徒側）パレート最適であるという．
- 同様に，学校側パレート最適，全体のパレート最適，がある．

参考：囚人のジレンマ！

# パレート最適なマッチング




- マッチング２は１に対してパレート優位
- マッチング２はパレート最適

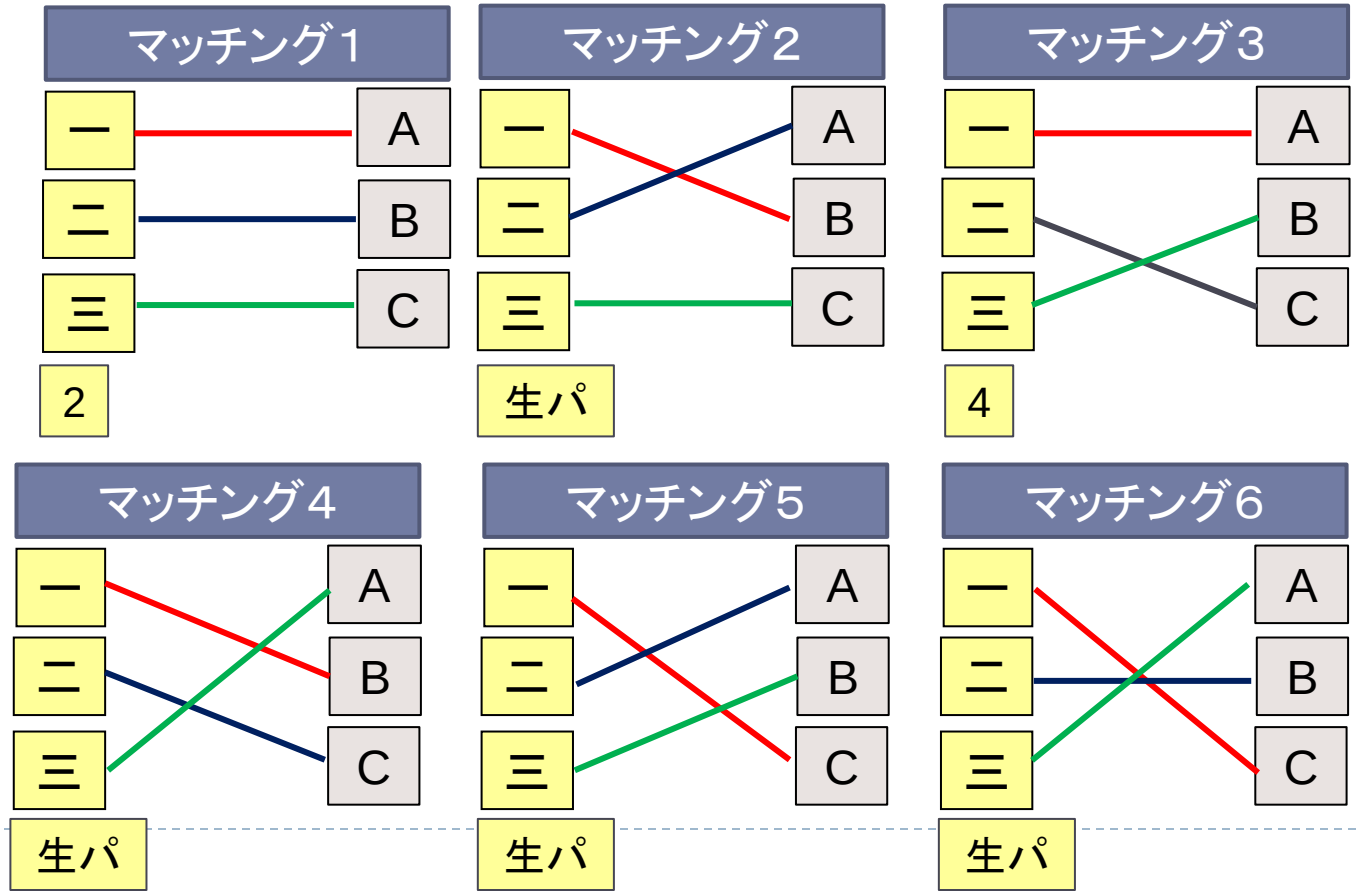
# パレート基準：復習

- 「生徒側パレート最適ではない」マッチング
  - そのマッチングよりも，すべての生徒の好みを同等以上にする（同じか良くする）マッチングが存在する.
- 「生徒側パレート最適な」マッチング
  - どんなマッチングも，そのマッチングより，少なくとも1人の生徒の好みが悪くなっている.
- 「学校側パレート最適な」マッチング
  - どんなマッチングも，そのマッチングより，少なくとも1人の学校の好みが悪くなっている.
- 「全体パレート最適な」マッチング
  - どんなマッチングも，そのマッチングより，少なくとも1人の生徒か学校の好みが悪くなっている.
  - 「生徒側パレート最適」または「学校側パレート最適」のどちらかであれば，全体パレート最適」

# マッチングと生徒側パレート最適性

| | |
|---|---|
| 一郎：B>A>C | A校：1>3>2 |
| 二郎：A>B>C | B校：2>1>3 |
| 三郎：A>B>C | C校：2>1>3 |

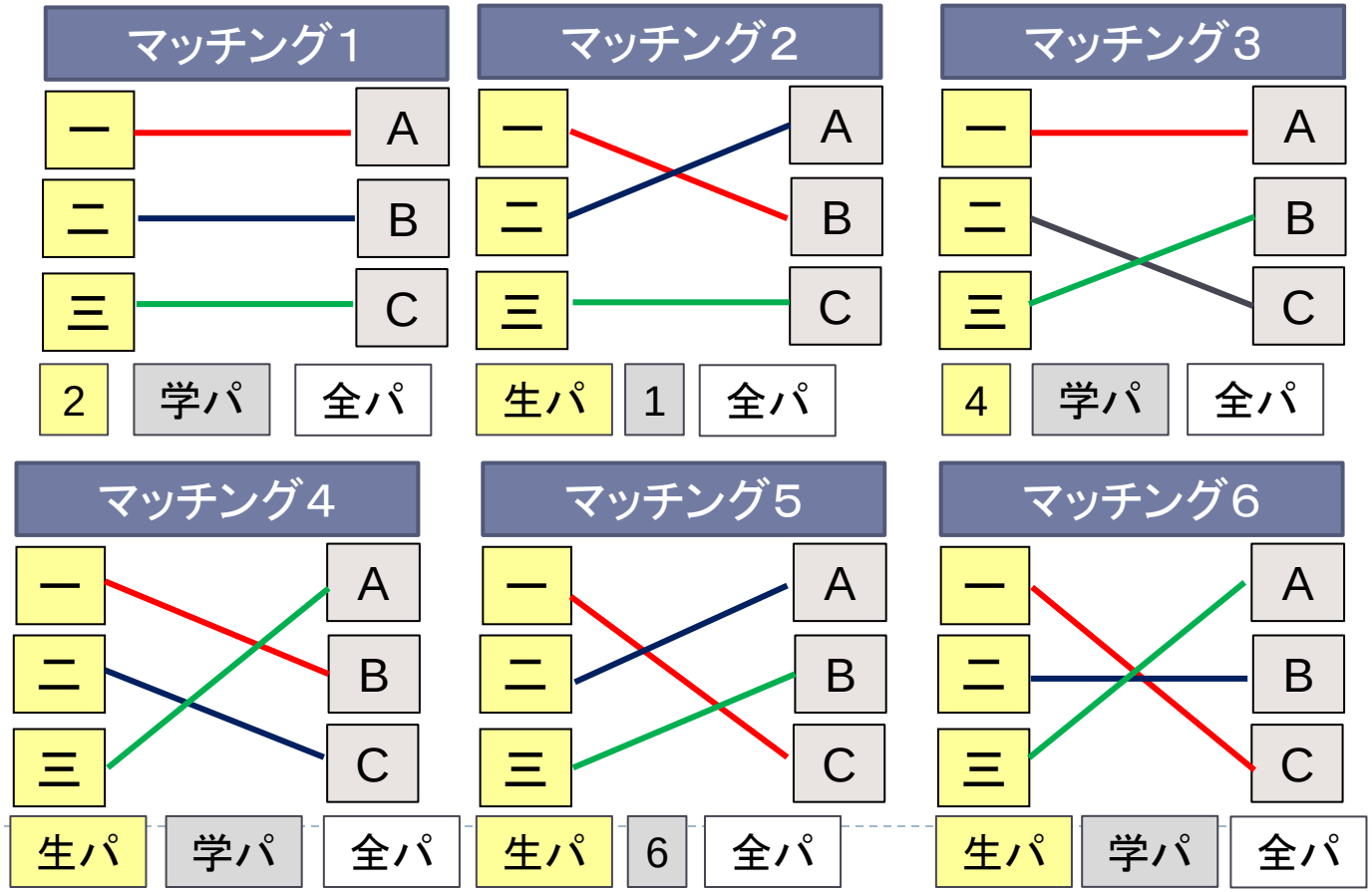
- 全部で6種類のマッチング
- 生徒側パレート最適となるものは「生パ」とし，そうでないものには，それよりパレート優位なマッチングを示した．



# マッチングとパレート最適性

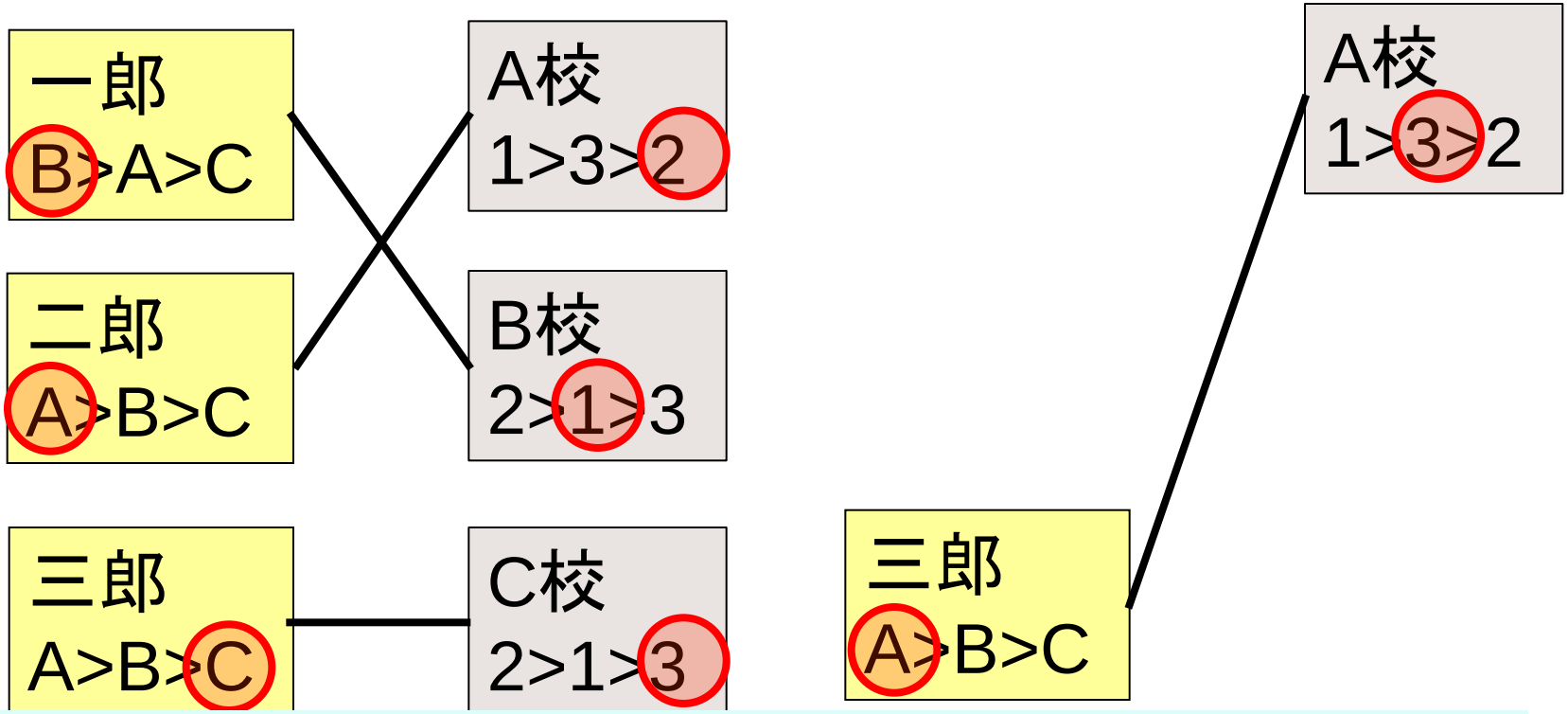
| | |
|---|---|
| 一郎：B>A>C | A校：1>3>2 |
| 二郎：A>B>C | B校：2>1>3 |
| 三郎：A>B>C | C校：2>1>3 |

- 生パ⇒生徒側パレート最適
- 学パ⇒学校側パレート最適
- 全パ⇒全体パレート最適



# マッチングの安定性

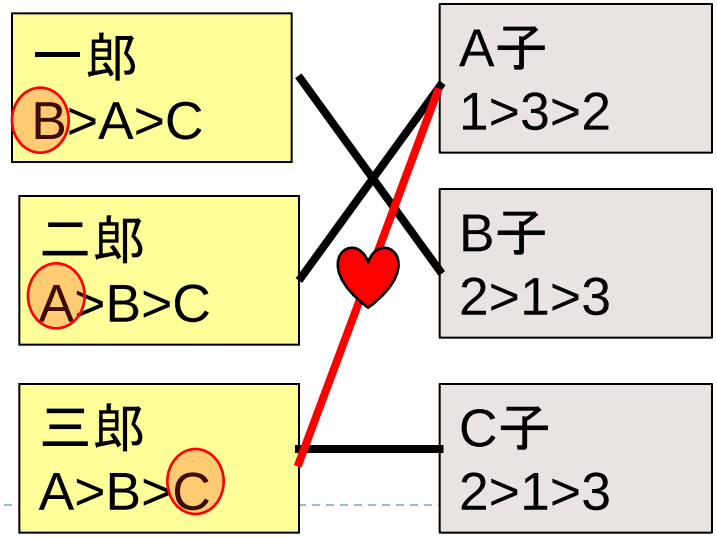
## マッチング2




- マッチング2は,生徒側にパレート最適
- しかし，三郎にA校が割り当てれば，生徒も学校も両方とも改善！

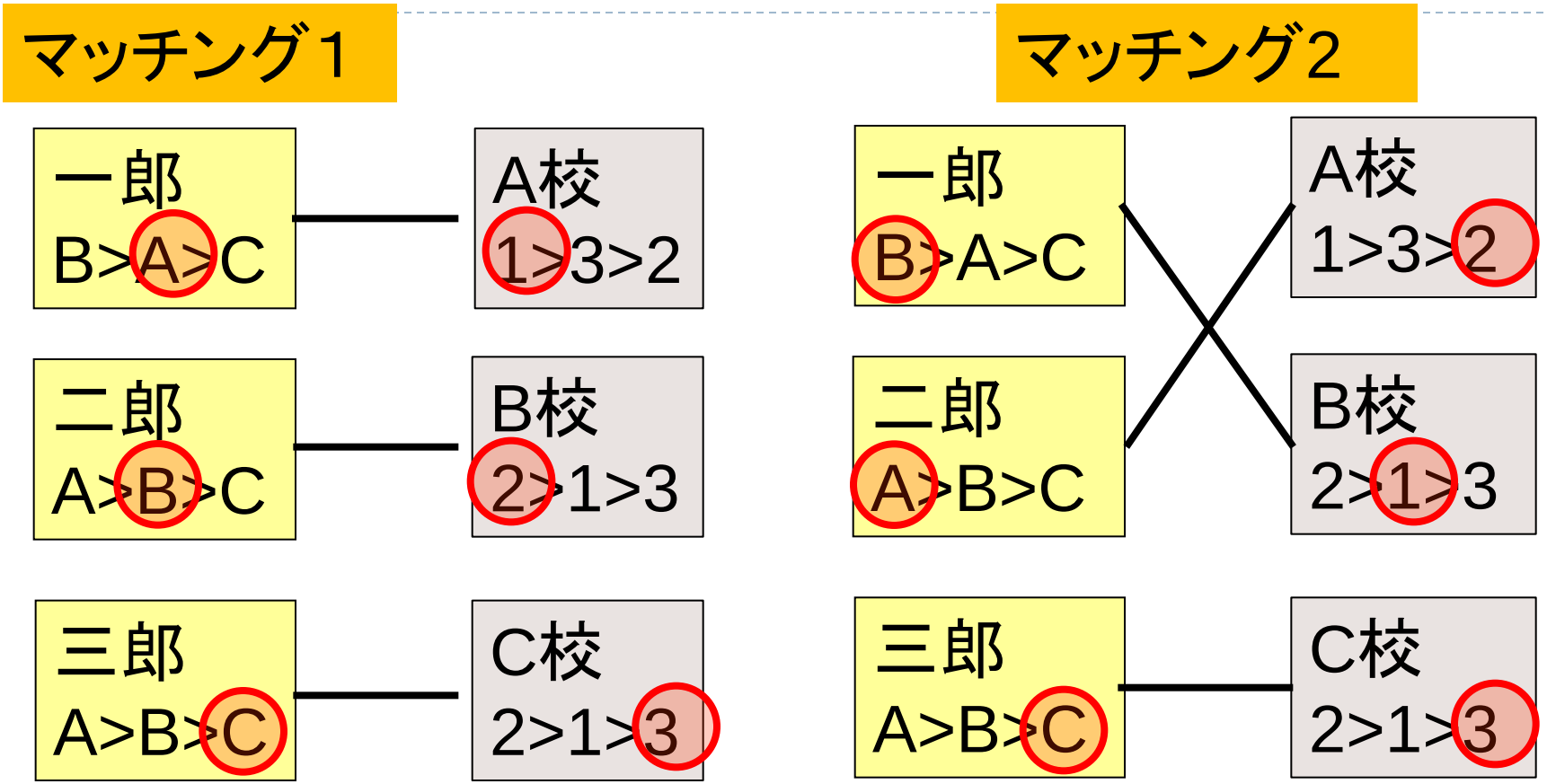
# 判断基準2:安定性

- あるマッチングにおいて，ある生徒と学校の組合せを割り当て直して，生徒と学校の両方の好みが上がるならば，そのマッチングは不安定であるという.
- マッチングが安定であるとは，どの生徒と学校の組合せを割り当て直しても，生徒と学校の両方の好みが上がらないことを言う.




- 従来，この問題は安定結婚問題と呼ばれていた.
- 不倫・駆け落ちが起きない結婚が安定結婚

# マッチングの安定性



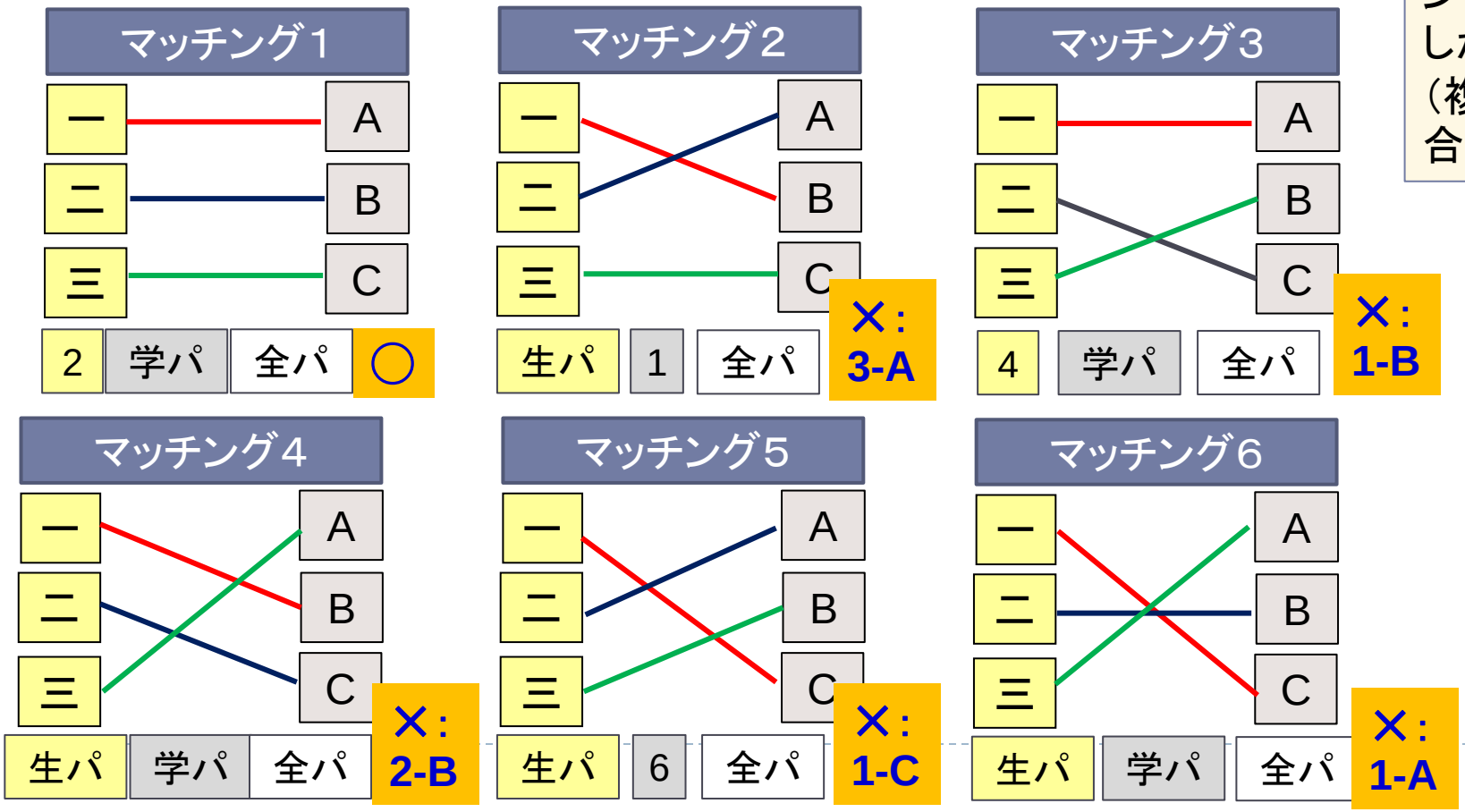

- マッチング1は安定マッチングだが，生徒側パレート最適ではない（学校側も考えるとパレート最適）
- マッチング2は，生徒側パレート最適だが不安定

# マッチングとパレート最適性

| | |
|---|---|
| 一郎：B>A>C | A校：1>3>2 |
| 二郎：A>B>C | B校：2>1>3 |
| 三郎：A>B>C | C校：2>1>3 |

- 生パ⇒生徒側パレート最適
- 学パ⇒学校側パレート最適
- 全パ⇒全体パレート最適
- ◯⇒安定　×⇒不安定

この場合，安定マッチングは1つしかない（複数の場合もある）

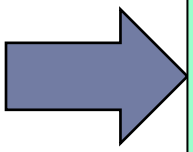


# 安定なマッチングを実現する割当て方法

- いかに割り当てを実施するか？
- 各生徒の第1希望，第2希望．．．を聞く
- ボストン方式（通常，行われる割り当て方法）
  - まず生徒の第1志望を優先し，割り当てる．
  - 学校が定員以内であったら，受け入れを決定．
  - 定員を超えていたら学校の優先順に従って生徒を選ぶ．
  - 定員超過で，割り当てが決まらなかった生徒を第2志望に割り当て．
  - 定員に空きがあれば，学校の優先順に従って生徒を選ぶ．
  - 定員超過で，割当が決まらなかった生徒を第3志望に．．．
  - 以下，決まるまで繰り返す．

# ボストン方式：最初に志望順位を提出

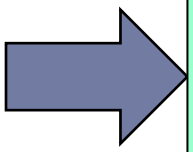
一郎
B>A>C



第1志望：B
第2志望：A
第3志望：C

A校
1>3>2

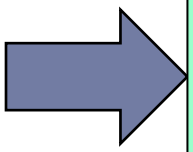
二郎
A>B>C



第1志望：A
第2志望：B
第3志望：C

B校
2>1>3

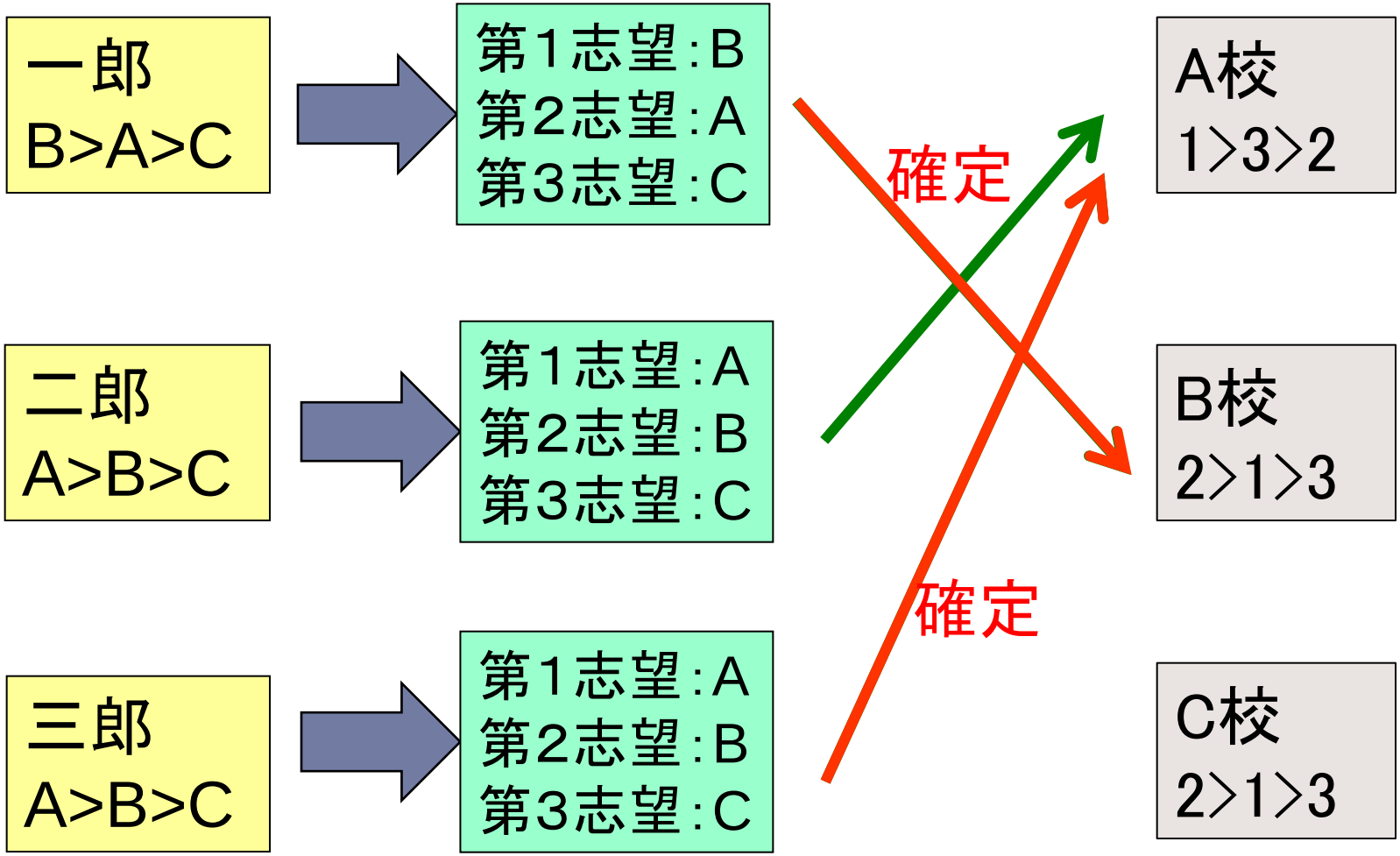
三郎
A>B>C



第1志望：A
第2志望：B
第3志望：C

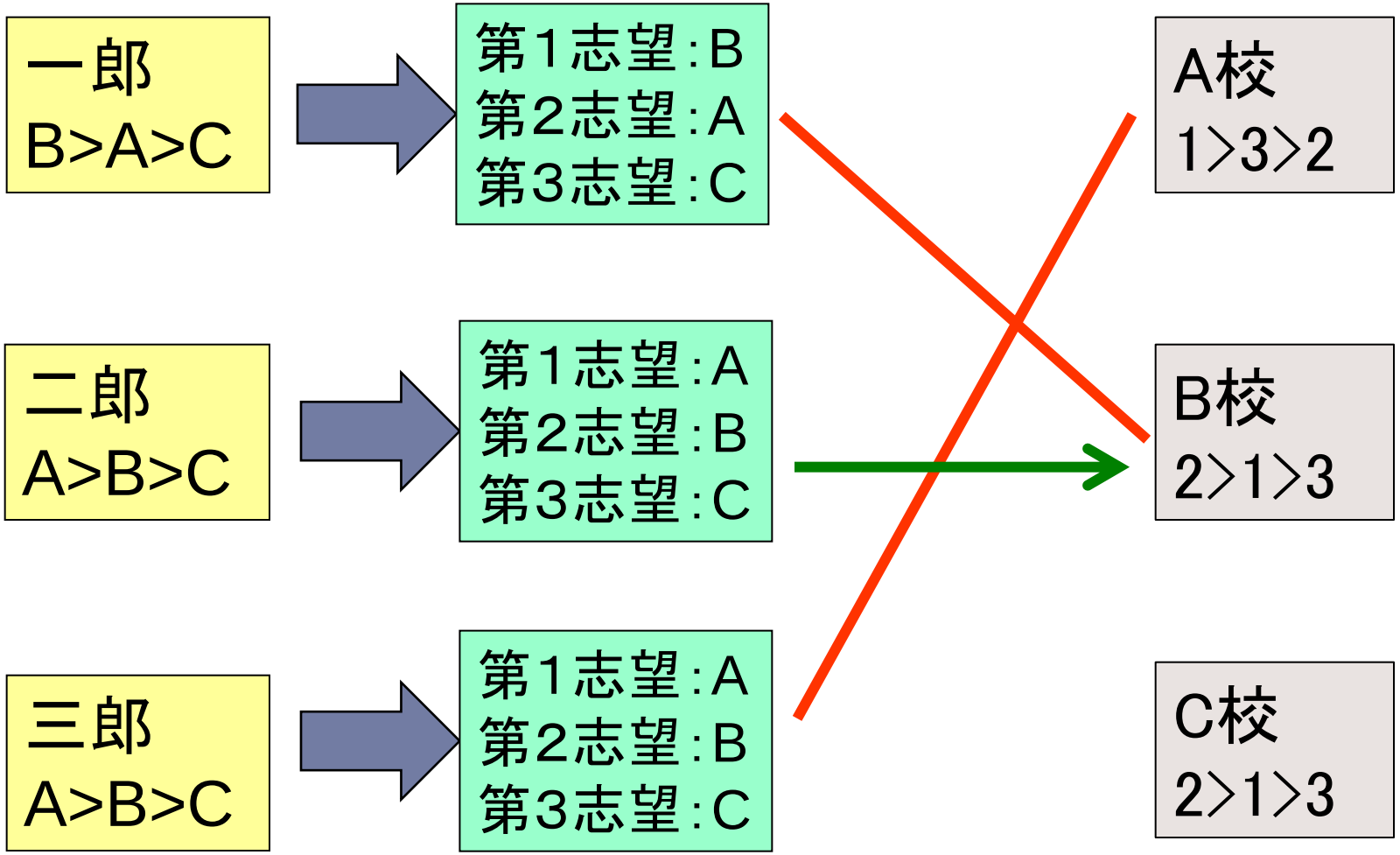
C校
2>1>3

# ボストン方式： 第1志望による割当



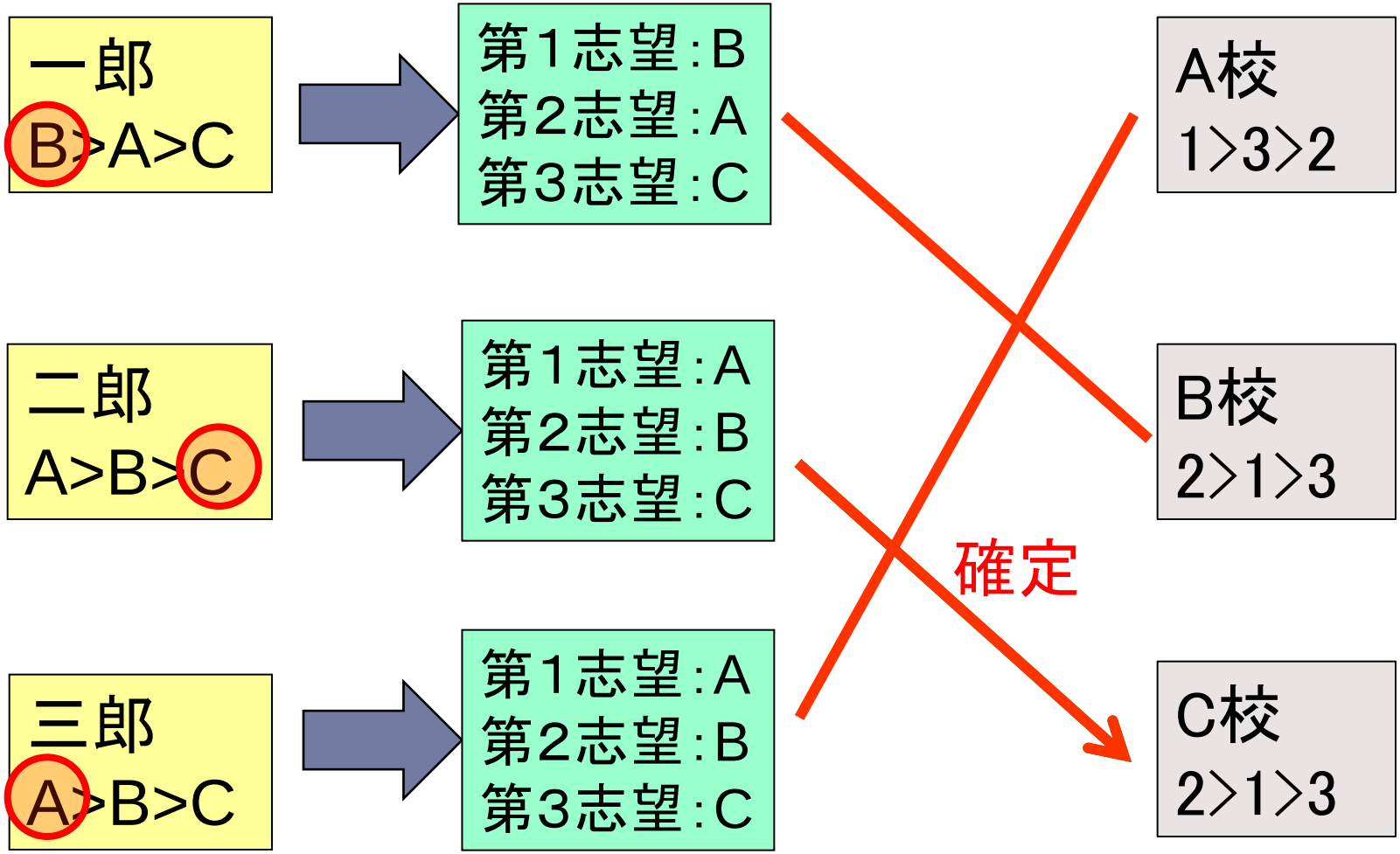

定員を超えた場合は，学校の希望を優先

# ボストン方式： 第2志望による割当



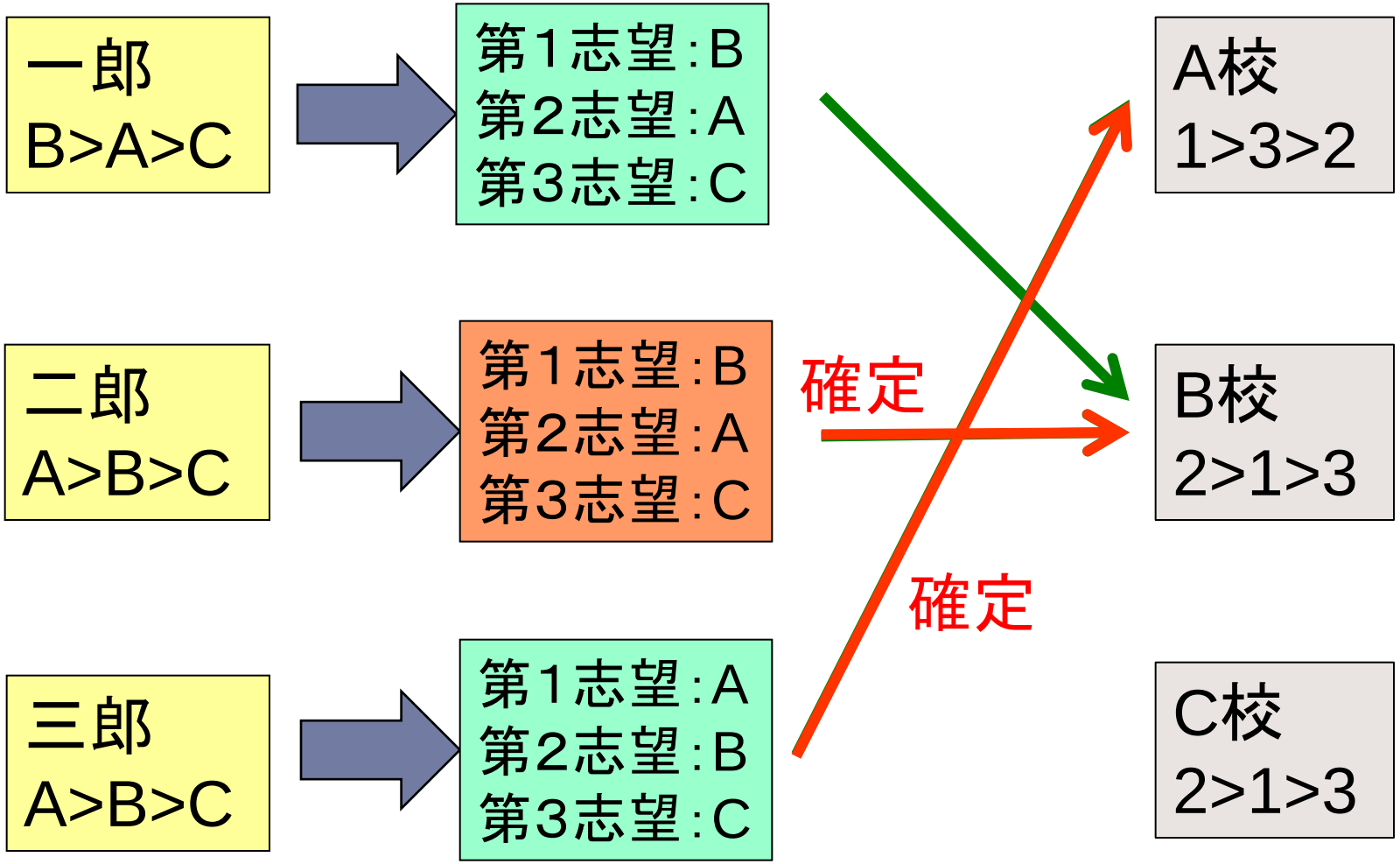

既に定員が埋まっている場合はダメ

# ボストン方式： 第3志望による割当

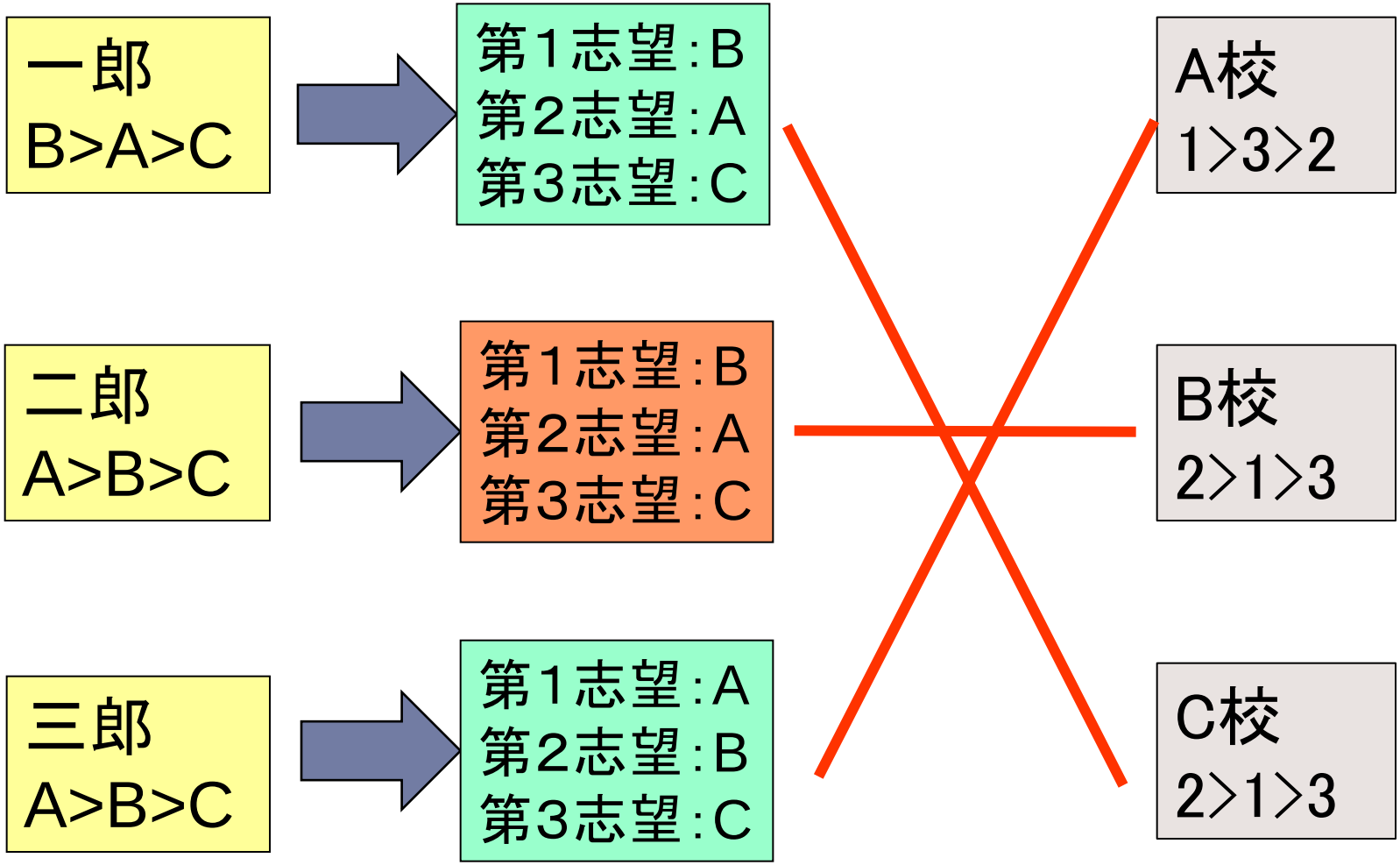



二郎は第3志望に

# ボストン方式：二郎による戦略的操作



# ボストン方式：二郎による戦略的操作




戦略的操作により，二郎の利得は増加

# 安定性以外の問題点－戦略的操作性

- 安定なマッチングが求められても，手続きに問題がある
- 戦略的操作性
  - 自分の好みを偽って申告することで，自分に有利な結果を導くことができるシステム

- 戦略的操作の可能性は，もともとは投票の研究から始まった
- ボルダ投票の戦略的操作性
  - ボルダ投票－代替案を悪い方から0点，1点，2点…と点数をつけて集計し，最多得点の案を採用する投票方法

# ボルダ投票における戦略的投票

- Wゼミの夕食選び－ボルダ投票で決定

  - Aさん：じゃじゃ麺>冷麺>ビビン麺＞そば
  - Bさん：冷麺>じゃじゃ麺>ビビン麺＞そば
  - Cさん：冷麺>じゃじゃ麺>ビビン麺＞そば

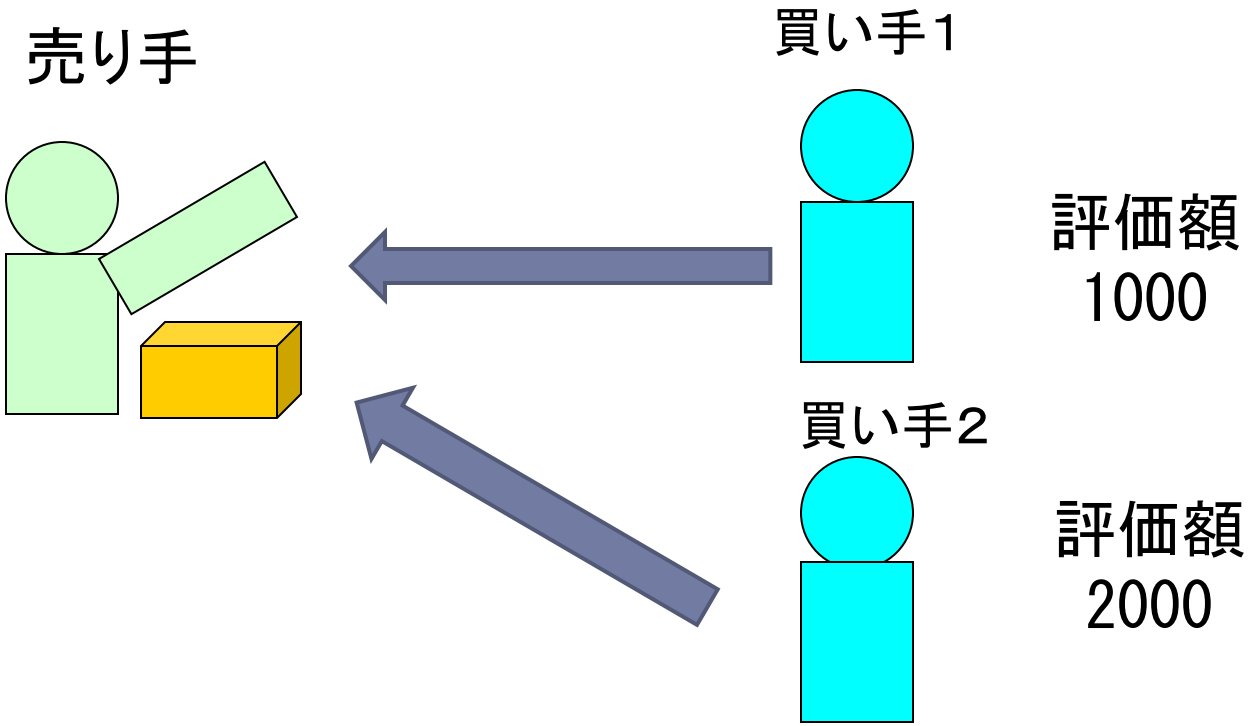
- ボルダ投票の結果－正直に投票すれば？
  - じゃじゃ麺 7点　冷麺8点　ビビン麺3点　そば0点
  - 冷麺に決定
- Aさんが以下のように投票したならば？

  Aさん：じゃじゃ麺>ビビン麺＞そば>冷麺

  - じゃじゃ麺 7点　冷麺6点　ビビン麺4点　そば1点
  - じゃじゃ麺に決定！

# オークション：ファーストプライス VS セカンドプライス

買い手２は，各オークションでどのような入札を行うか？




ファーストプライスの入札額⇒評価額より下（２番めの入札額を予想）
セカンドプライスの入札額⇒評価額を申告

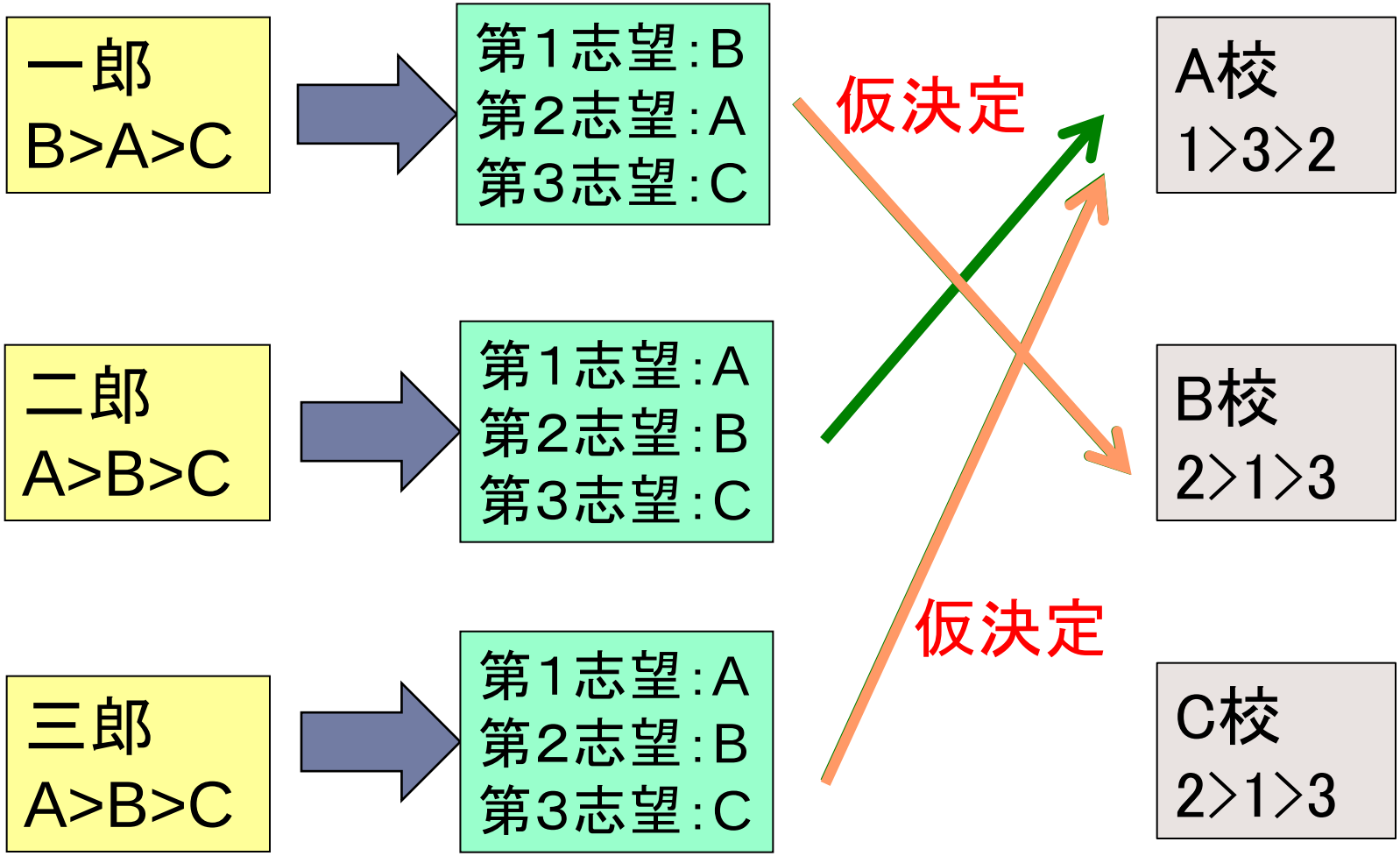
セカンドプライスは，耐戦略性のあるオークション方式

# 戦略的操作と割当方法の耐戦略性

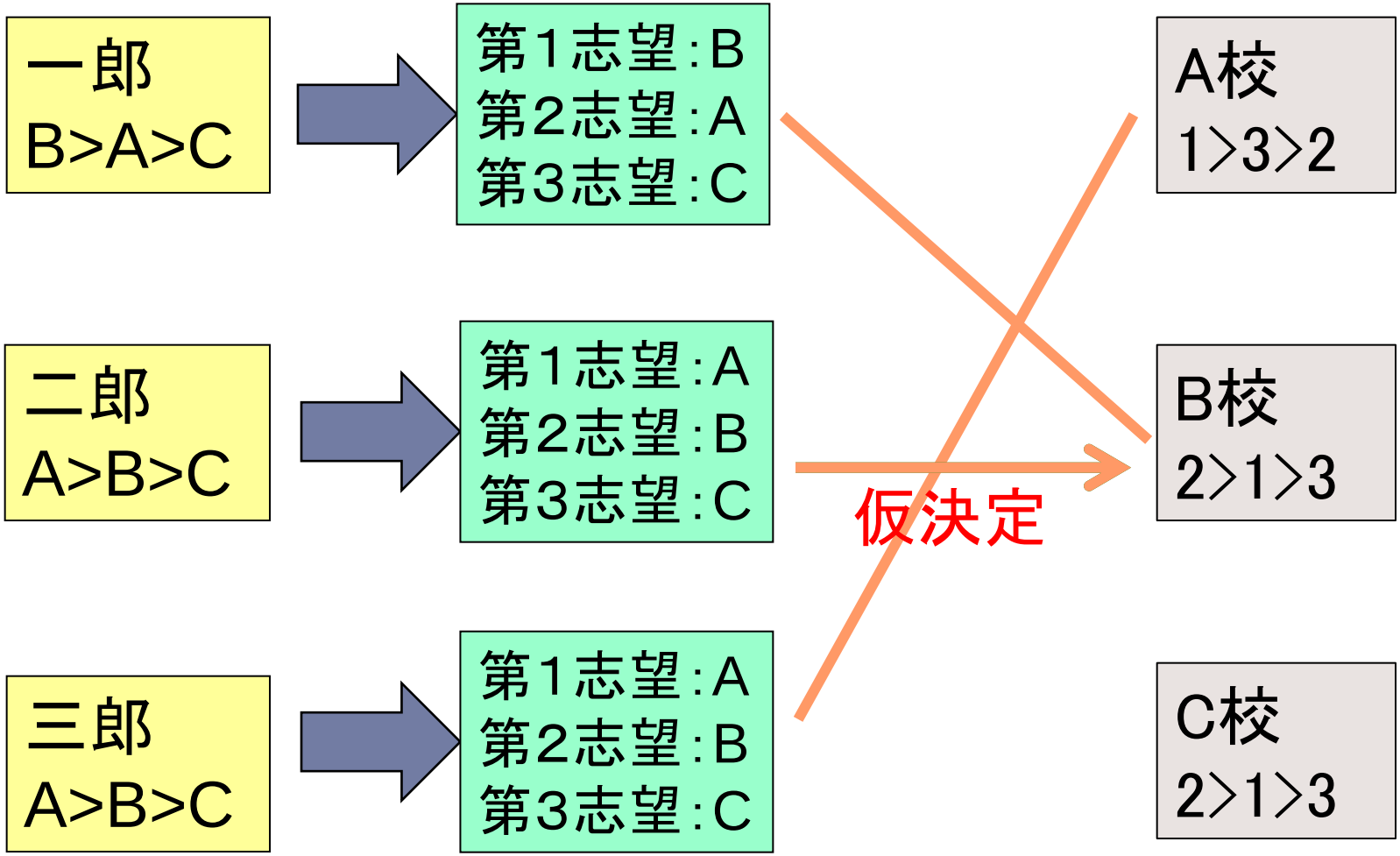
- ボストン方式では，自分の優先順位を偽って申告したほうが良い場合がある（戦略的操作）
- 戦略的操作が良くない結果を導く可能性もある
  - 不安定なマッチング
  - 情報の誤りによる集団的なミス
- 耐戦略性（strategy-proof） 戦略的操作が得にならない割当方法の性質
  - 正直に志望順位を申告することが，支配戦略になる方法

- 受入保留方式（Gale-Shapley　アルゴリズム）
  - 一旦マッチングしても，次の志望順位で更に優先順位が高い生徒が来れば，そちらの生徒を優先しマッチング
  - 耐戦略性があり，安定なマッチングを実現する方法

# 受入保留方式： 第1志望による割当

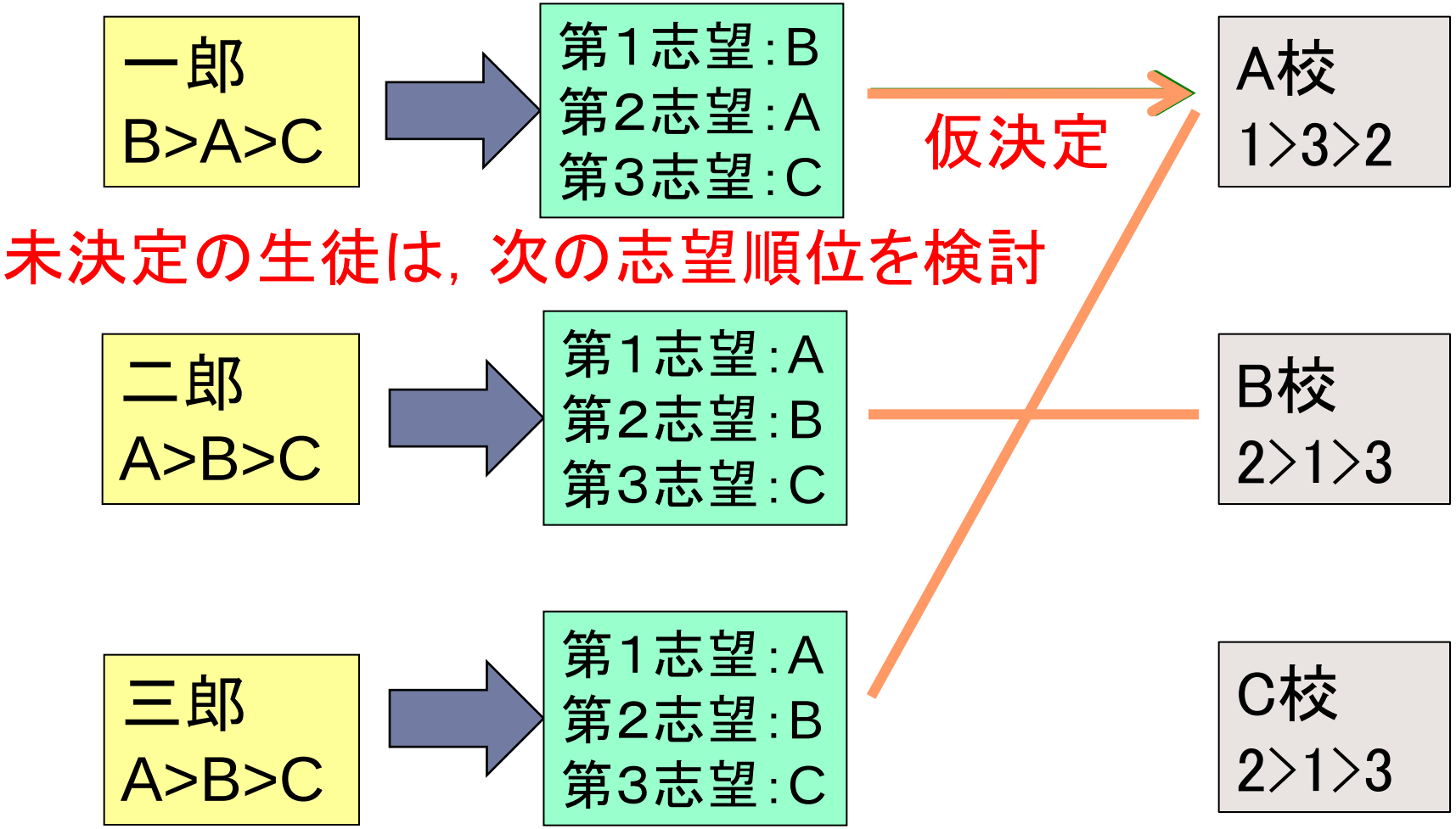


# ボストン方式： 第2志望による割当



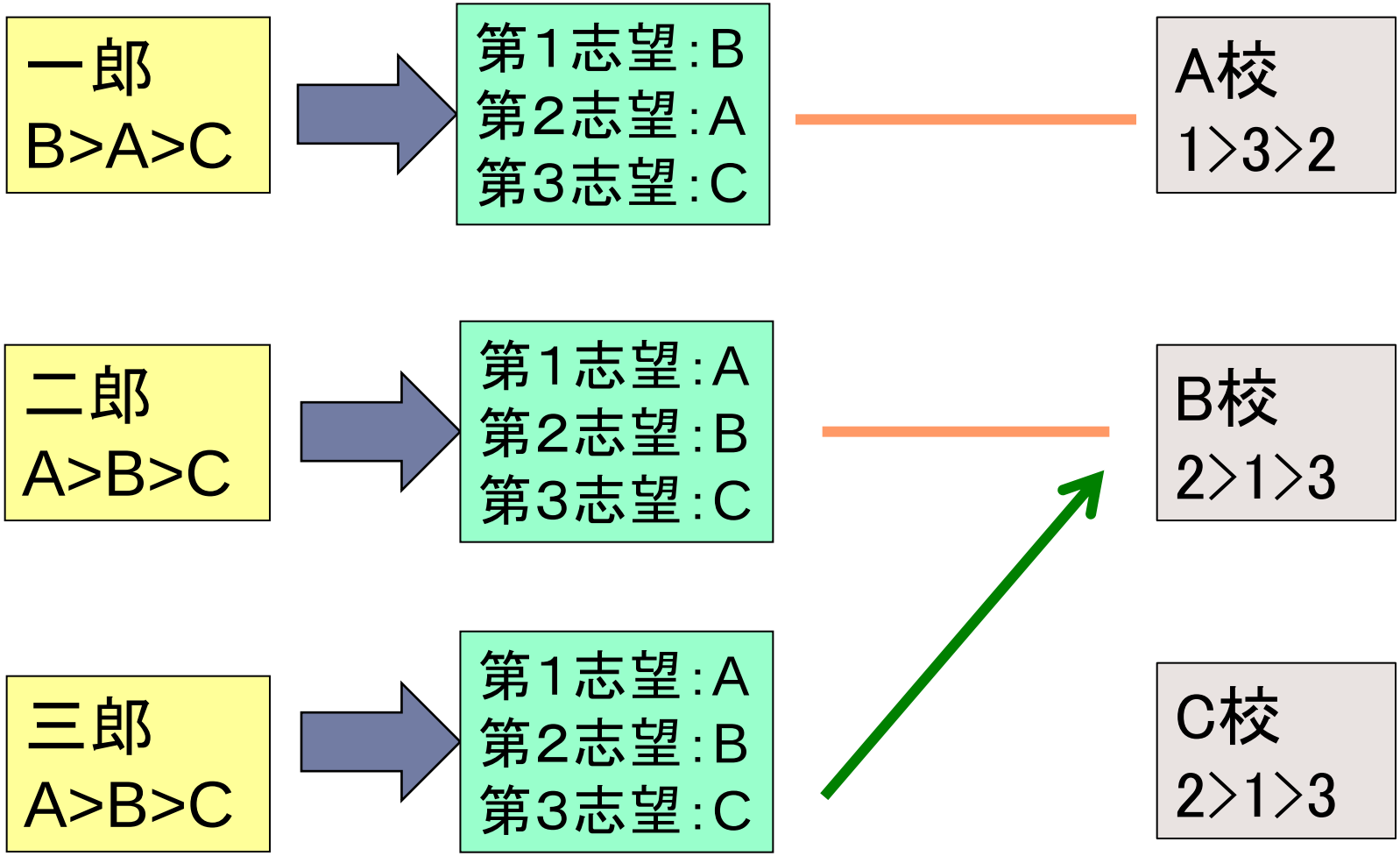

既に仮決定していても，学校側の優先順位が高い学生がいれば，そちらに割り当てる

# ボストン方式： 第2志望による割当



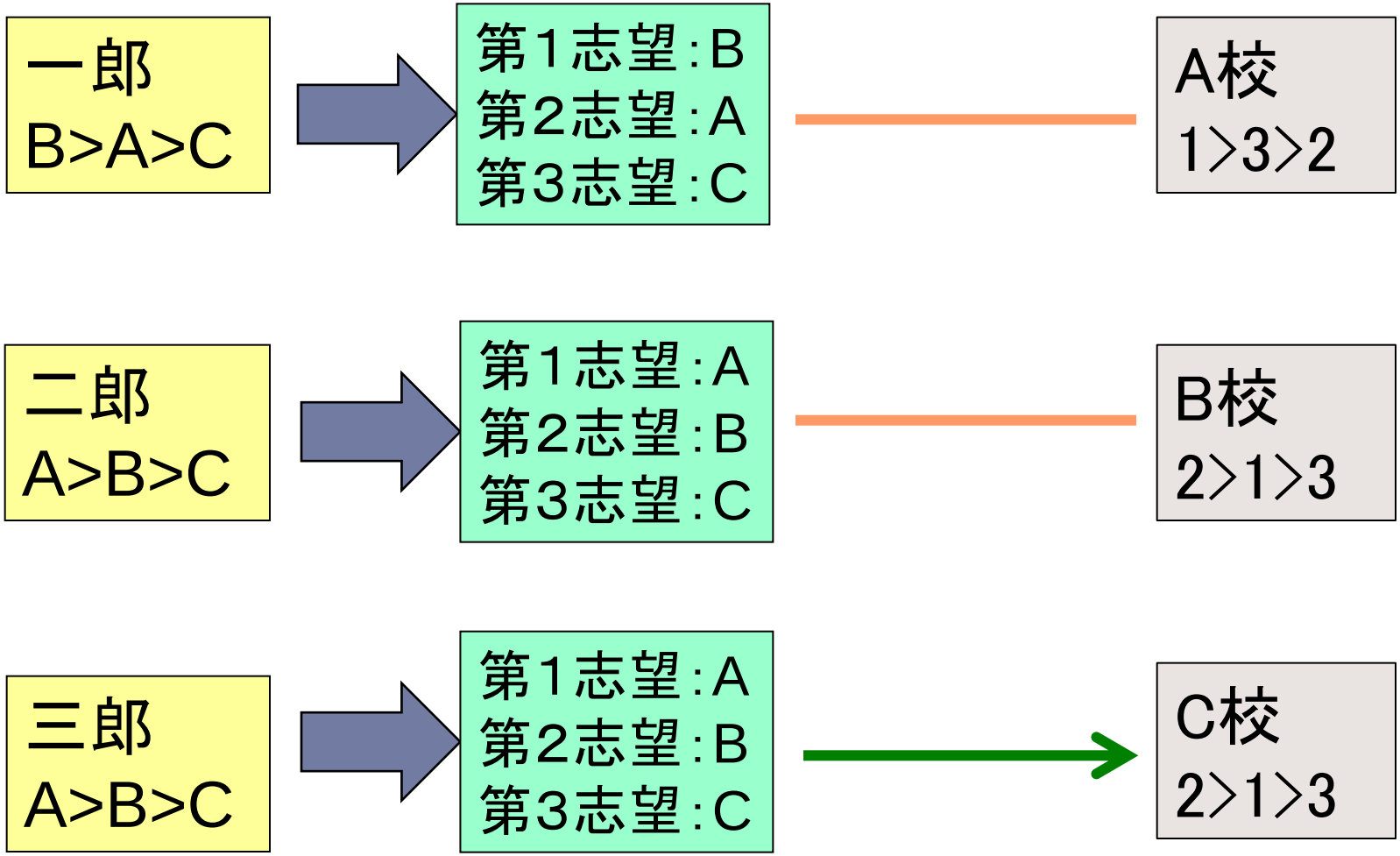

既に仮決定していても，学校側の優先順位が高い学生がいれば，そちらに割り当てる

# ボストン方式： 第2志望による割当




学校側の優先順位が高い学生に割り当てる

# ボストン方式： 第3志望による割当




すべての学生の受入先が終われば確定

# ボストン方式： 第3志望による割当

一郎
B>A>C

第1志望：B
第2志望：A
第3志望：C

A校
1>3>2

二郎
A>B>C

第1志望：A
第2志望：B
第3志望：C

B校
2>1>3

三郎
A>B>C

第1志望：A
第2志望：B
第3志望：C

C校
2>1>3

すべての学生の受入先が終われば確定

# 間違いやすい！

- この方法は割り当ての計算方法（アルゴリズム）を，分かりやすく示しているだけで，実際に「第1志望に1回割り当てられたけど，仮決定が取り消された」などの過程を見ることはない！
  - 一度割り当てられたのに，却下されて不快になったりするわけではない
  - 志望通りに割り当てられないのは，ボストン方式も同じ
- 参加者には，割り当ての結果が通知されるだけ

# 市場設計とメカニズムデザイン

- 安定配分理論と市場設計の実践 (2012年ノーベル経済学賞)
  - Alvin Roth, Lloyd Shapley
- メカニズムデザイン(2007年ノーベル経済学賞)
  - Leonid Hurwicz, Eric S. Maskin, Roger B. Myerson
- メカニズムデザインとは？
  - 「制度設計の理論」とも訳される
  - あるシステムや制度(課税方法，財の取引システム，オークション，公共料金の規制)に対して，そのシステム内で参加者が戦略的に行動することゲーム理論によって織り込んで，どのように制度を設計すれば良いかを考える理論

# まとめ

- 学校選択制度とマッチング
  - どのような基準が，良い組合せを与えるか
  - パレート最適，生徒側パレート最適
  - 安定性
  - 生徒側パレート最適と安定性は必ずしも一致しない
- 戦略的操作と耐戦略性
  - 耐戦略性：正直に自分の好みを提出することが支配戦略
  - 受入保留方式は耐戦略性があり，安定なマッチングを実現する（生徒側パレート最適とは限らない）
- 他の制度への応用
  - 研修医の病院への割当，ゼミや部署への割当
  - 腎移植患者の優先順位（少し考え方が違う）

# 演習

- 女子1,2,3,4と男子A,B,C,Dの4人ずつのペアに対して，異性に対する好みが以下で与えられているとき，受入保留方式（Gale-Shapleyアルゴリズム）でマッチングせよ.

| | |
|---|---|
| １：B>D>A>C | A：3>1>4>2 |
| ２：A>D>B>C | B：4>2>3>1 |
| ３：B>D>A>C | C：1>3>4>2 |
| ４：A>B>C>D | D：3>4>2>1 |

# 8. 時間の経過とゲーム理論

多段階交渉と繰り返しゲーム

# 利得の割引と多段階交渉

# 将来の利得は割引かれる

- 今日の100万円と1年後の100万円は同じ価値ではない！
  - 現在の100万円を運用すれば，1年後には100万円以上になる
  - 1年後の100万円を現在の価値に直す現在価値割引法
  - 経営財務，ファイナンスなどで習う
  - 例えば，1期間の割引率を0.8とすると…
  - １期間後の100万円は現在価値で80万円

繰り返しの交渉では割引率が大きな影響を与える

# モデル28：W家の土地交渉PART2：2段階交渉ゲーム

- 2段階のWと売主の土地交渉
- 1段階目：
  - Wが売買額を提示し，売主が「承諾」か「拒否」かを選択
  - 承諾ならば，その金額で売買成立
  - 拒否ならば日を改めて交渉へ→2段階目に移る
- ２段階目：
  - 今度は売主が売買額を提示し，Wが「承諾」か「拒否」かを選択
  - 承諾ならば，その金額で売買成立
  - 拒否ならば交渉決裂⇒双方利得0

# 2段階交渉ゲームを解く #1

■ 後から解く(バックワードインダクション)

1段階目：Wが売買額を提示

売主が「承諾」か「拒否」かを選択

承諾 → Wの提示額で決着

提案拒否 ↓

2段階目：売主が売買額を提示

Wが「承諾」か「拒否」かを選択

承諾ならば，その金額で売買成立

拒否ならば交渉決裂⇒双方利得0

2段階目は売主の最後通牒ゲーム！

↓

売主が2690万円を提示し，Wが承諾

◆Wの支出許容額2700万円，売主の留保価格2500万円

# 2段階交渉ゲームを解く #2

- 割引率を0.8として考える

結果：第1段階目でWが2660万円を提示し，売主が承諾

1段階目：Wが売買額を提示

売主が「承諾」か「拒否」かを選択

で決着

提案拒否

2段階目結果：売主の最後通牒ゲーム
売主が2690万円を提示，Wが承諾
Wの利得は10万円，売主は190万円

現在価値に直すと：

売主の利得　190万円×0.8＝152万円

売主：

Wの提示額が2652万円以下だと拒否して2段階目に持ち越した方が良い

◆Wの支出許容額2700万円，売主の留保価格2500万円

# 2段階交渉ゲームの解

- しかし2段階目の決着は現在価値では割り引かれる→早く決着したい！（結果は2660万円）
- 1回きりの最後通牒ゲームと違い，Wは40万円の利得を得られる（最後通牒ゲームでは10万円）

最終的な最後通牒権を持っている方が有利

- 最後通牒権（2段階目の提案権）は売主
- 2段階目では，最後通牒権を持っている方が断然有利（2700万円ぎりぎりで決着）
- 売主はそれ故，1段階目で自分に不利な提案は徹底拒否

割引率が低くなると？

# 2段階交渉ゲームを解く #3

■ 割引率が0.5の場合

1段階目：Wが売買額を提示

売主が「承諾」か「拒否」かを選択

結果：第1段階目でWが2600万円を提示し，売主が承諾で決着

提案拒否

2段階目結果：売主の最後通牒ゲーム
売主が2690万円を提示，Wが承諾
Wの利得は10万円，売主は190万円

現在価値に直すと：

売主の利得　190万円×0.5＝95万円

売主：

Wの提示額が2595万円以下だと拒否して2段階目に持ち越した方が良い

◆Wの支出許容額2700万円，売主の留保価格2500万円

# 2段階交渉ゲームまとめ

- 割引が小さい（時間が経過しても利得がそんなに減らない）ときは最後通牒権（2段階目の提案権）を持っている方が有利
- しかし，割引が大きいときは，先に提案できる権利（1段階目の提案権）を持っている方が有利

多段階交渉ゲームに当てはまる一般的な結論

NABENAVI .net

# ポイント50

繰り返しの交渉では，割引率と最後通牒権が重要な役割を果たす

時間の価値が小さい時，割引が小さい時は最後通牒権を取れ

割引が大きい時は，先の提案権を取るべき

# 演習

- プレイヤー1と2が100万円を分ける交渉ゲーム
- 後手は，承諾する場合と拒否する場合で利得が同じときは承諾する，とする．
- 1段階の交渉ゲーム（最後通牒ゲーム）
  - プレイヤー1が，自分の取り分$x$を提案し，プレイヤー2は承諾か拒否を選ぶ．承諾した場合は，プレイヤー1の配分は $x$，プレイヤー2の配分は $100-x$ であり，その配分が利得となる．拒否した場合は双方 0 であるとする．
  - プリントの問題について答え，kibacoには指定された解を入力せよ．
- ２段階の最後通牒ゲーム．
  - 第１段階では，プレイヤー2が自分の取り分$y$を提案し，プレイヤー1は承諾か拒否を選ぶ．承諾した場合は，プレイヤー2の配分は$y$，プレイヤー1の配分は $100-y$ である．拒否した場合は第2段階へ移る．第2段階では，プレイヤー1が，自分の取り分 $x$ を提案し，プレイヤー2は承諾か拒否を選ぶ．承諾した場合は，プレイヤー1の配分は $x$，プレイヤー2の配分は $100-x$であり，拒否した場合は双方0であるとする．
  - 交渉が1段階遅れると，配分を割引因子$R=0.9$で割り引いた値が利得になると考える（配分と利得という言葉を区別する）．
  - プリントの問題について答え，kibacoには指定された解を入力せよ．

# 交渉ゲームの発展

- ナッシュの交渉理論
- 何度も交渉が続くゲーム
- 無限に交渉が続くゲーム
- 最後通牒がいつか分からないゲーム
  - 「時間に対する価値が高い方」が我慢がきかないので妥協する

- その他
  - 実験　ー国による違い
  - 繰返しー妥協・評判

# 繰り返しゲーム－入門編

# 長期的関係と繰り返しゲーム

- 同じゲームを何度も繰り返す「繰り返しゲーム」
- 囚人のジレンマにおける協調は達成できるのか？
  - 1回きりではない場合，裏切った相手に罰則を与えるという戦略を与えることで，協力が手製できるのではないか？
- 理論的成果
  - 有限の繰り返し
  - 無限の繰り返しとフォーク定理
- 実験結果
  - 初期の頃の実験
  - アクセルロッドの実験

# 実験：囚人のジレンマ

| 1＼2 | 協力する | 協力しない |
|---|---|---|
| 協力する | （２，２） | （-１，３） |
| 協力しない | （3, -１） | （ ０，０） |

- 繰り返しゲームを30回繰り返す
- どのようにすれば得点が高くなるか？

# 実験：囚人のジレンマ

| 1 \ 2 | パー（協力する） | グー（協力しない） |
|---|---|---|
| パー（協力する） | ( 2 , 2 ) | ( -1 , 3 ) |
| グー（協力しない） | ( 3, -1 ) | ( 0 , 0 ) |

- グーとパーを用いて，協力と非協力を表そう
- 30回繰り返す

# 実験1：初期の頃の実験

- フラッド，ドレッシャーの実験
- 2人の被験者　A. アルキアン (AA)
  J. ウィリアムス (JW)

| JW / AA | C(協力) | D(非協力) |
|---|---|---|
| C(協力) | ( 1/2, 1) | ( -1, 2) |
| D(非協力) | ( 2, -1) | ( 0, -1/2) |

# アルキンとウイリアムスのコメント #1

A：JWはDで来るだろう，間違いなく勝てるからと，いうことは，こちらがCにすると．．．負ける

J：ものわかりのいい相手でありますように

| | | |
|---|---|---|
| １回目： | D（非協力） | C（協力） |

A：何やってるんだ！？

J：まだわかってないようだが，そのうち分かってくるだろう

| | | |
|---|---|---|
| ２回目： | D（非協力） | C（協力） |

# アルキンとウイリアムスのコメント　#2

A：両方まぜてくるつもりか？

J：そうくるんだな，ばかやろう

| | | |
|---|---|---|
| 3回目： | D（非協力） | D（非協力） |

A：Dに決めたのかな？

J：そうくるんだな，ばかやろう

| | | |
|---|---|---|
| 4回目： | D（非協力） | D（非協力） |

A：ちょっとはずしてやれ

J：それがいちばんいい手なわけじゃないのに

| | | |
|---|---|---|
| 5回目： | C（協力） | D（非協力） |

# アルキンとウイリアムスのコメント #3

A：向こうはあと4回は混ぜてくるだろうから，Dを続けよう

J：ほう，そう来ましたね
もう1度チャンスを与えてやらなきゃ

| | | |
|---|---|---|
| 6回目： | D（非協力） | C（協力） |

J：なかなか抜け目がないね．んー・・・

| | | |
|---|---|---|
| 7回目： | D（非協力） | C（協力） |

J：そのうち気がつくだろうけど，10回位じゃ無理だな

| | | |
|---|---|---|
| 8回目： | D（非協力） | D（非協力） |

# アルキンとウイリアムスのコメント #4

| | | |
|---|---|---|
| 9回目： | D（非協力） | D（非協力） |

（2人とも長いコメント）

| | | |
|---|---|---|
| 10回目： | D（非協力） | D（非協力） |

J：たぶん，もう分かっただろう

| | | |
|---|---|---|
| 11回目： | D（非協力） | C（協力） |
| 12回目： | C（協力） | C（協力） |
| 13回目： | C（協力） | C（協力） |
| 14回目： | C（協力） | C（協力） |
| 15回目： | C（協力） | C（協力） |

# アルキンとウイリアムスのコメント #5

| | | |
|---|---|---|
| 16回目： | D（非協力） | C（協力） |

J：やな奴

| | | |
|---|---|---|
| 17回目： | C（協力） | D（非協力） |

J：ばかじゃないか，痛い目に合わせてやらなきゃ

| | | |
|---|---|---|
| 18回目： | C（協力） | D（非協力） |

A：わからなくなってきた

向こうは何かメッセージを送ろうとしているんだろうか

| | | |
|---|---|---|
| 19回目： | D（非協力） | D（非協力） |

# アルキンとウイリアムスのコメント #6

| | | |
|---|---|---|
| 20回目： | D（非協力） | D（非協力） |

J：たぶん，今度はいい子になるだろう

| | | |
|---|---|---|
| 21回目： | D（非協力） | C（協力） |

J：何か覚えるには時間がかかるもんだ

| | | |
|---|---|---|
| 22回目： | C（協力） | C（協力） |
| 23回目： | C（協力） | C（協力） |
| 24回目： | C（協力） | C（協力） |
| 25回目： | C（協力） | C（協力） |

# アルキンとウイリアムスのコメント #7

- 以下，ほとんどCC（双方協力）が続く
- たまにAが裏切り，Jに仕返しされる

| | | |
|---|---|---|
| 98回目： | C（協力） | C（協力） |
| 99回目： | D（非協力） | C（協力） |
| 100回目： | D（非協力） | D（非協力） |

# 実験結果２：アクセルロッドの実験

- ロバート・アクセルロッド
- 1983年に，様々な分野の研究者を集めて囚人のジレンマを対戦させる「コンピュータプログラム選手権」を実行
- 14人の参加者＋「ランダムプログラム」
- 総当たり戦の合計得点を競う
- 1回の対戦で200回の繰り返し
- 予備実験を行い，その結果と分析をあらかじめ参加者に通知

# アクセルロッドの実験結果と参加者

- 複雑なプログラムが点が高いわけではない
  - （チェスの選手権とは違う）
- たくさんある中で，1位はRapoportのオウム返し！

| 順位 | 氏名 | 所属（学部） | プログラムの長さ | 得点 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Anatol Rapoport | 心理学 | 4 | 504.5 |
| 2 | Nicholas Tideman & Paula Chieruzzi | 経済学 | 41 | 500.4 |
| 3 | Rudy Nydegger | 心理学 | 23 | 485.5 |
| 4 | Bernard Grofman | 政治学 | 8 | 481.9 |
| 5 | Martin Shubik | 経済学 | 16 | 480.7 |
| 6 | William Stein & Amnon Rapoport | 数学 心理学 | 50 | 477.8 |
| 7 | James W. Friedman | 経済学 | 13 | 473.4 |
| 8 | Morton Davis | 数学 | 6 | 471.8 |
| 9 | James Graaskamp | | 63 | 400.7 |
| 10 | Leslie Downing | 心理学 | 33 | 390.6 |
| 11 | Scott Feld | 社会学 | 6 | 327.6 |
| 12 | Johann Joss | 数学 | 5 | 304.4 |
| 13 | Gordon Tullock | 経済学 | 18 | 300.5 |
| 14 | （匿名） | | 77 | 282.2 |
| 15 | 『でたらめ』 | | 5 | 276.3 |

表2　第1回選手権の競技参加者

# 勝敗のポイント

- 先に相手を裏切らないような,「上品な戦略」(nice strategy)が上位を占める
- ダウニングが，そのキーパーソン！
  - ダウニングは，相手が最初に裏切ってくると，そいつを裏切るタイプと認識し，裏切り続ける方に仕向ける
  - 最初に協力すると，互いに協力する方へ
- 「上品な戦略」の中での最下位はトリガー（Freedman）

# 第2回選手権

- やはり「オウム返し」戦略
- 作ってきたのはやはりRapoport　！
  - 1回目の選手権の結果を克明に記して，次の年に再度，大会を開催
  - 6カ国から62名の参加
  - 皆，オウム返しの対抗戦略も研究
  - 第1位は？
  - 2003年に30周年記念の大会

# まとめ

- 長期的関係で囚人のジレンマを克服するには？
  - オウム返し戦略が重要
    - やられたら，やり返す
    - 昔のこと（恩・遺恨）は忘れる
    - 相手が協力したら，こちらも寛容に協力する（罰則を与えるだけではダメ）
  - 「上品な戦略」
    - 最初は協力からはじめる

NABENAVI .net

# ポイント53

囚人のジレンマの繰り返しで協力を達成するには，最初は協力することから始めよ

相手が協力しなければこちらも協力しないオウム返し戦略が有効である

# 繰り返しゲームの理論

# （1）繰り返しゲームの戦略

# 繰り返しゲームの理論

- 戦略形ゲームを何回か繰り返す
- 繰り返しの回数，2回，3回，…n回，…無限回
- 利得は，毎回のゲームの結果の割引合計和
- 毎回繰り返される戦略形ゲームを成分ゲームと言う
- 繰り返しゲームの戦略，利得について考える

# 囚人のジレンマの繰り返しゲームを考える

- 以下の囚人のジレンマを成分ゲームとする繰り返しゲームを考える

| 1 \ 2 | $C_2$ | $D_2$ |
|---|---|---|
| $C_1$ | (4 , 4) | (-6 ,10) |
| $D_1$ | (10, -6) | (0 , 0) |

各プレイヤーの行動(action)

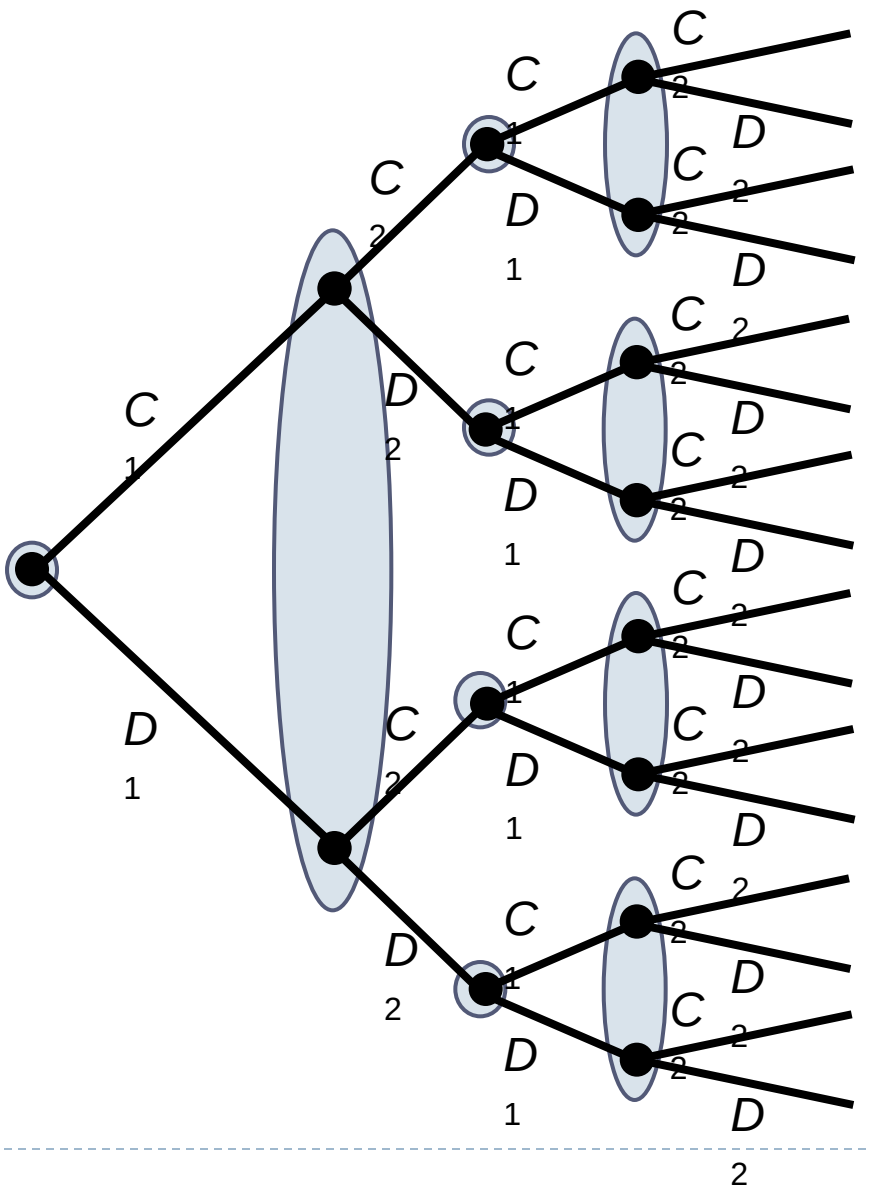
$C_i$ :プレイヤー $i$ が協力する（CはCooperation を意味）

$D_i$ :プレイヤー $i$ が協力しない（DはDefection を意味）

# 繰り返しゲームは展開形ゲームで表せる

- 囚人のジレンマを2回繰り返すゲーム

- 展開形ゲームの戦略は？
- どの情報集合で，どのような行動を選択するか.



# 繰り返しゲームの戦略の例

- 「囚人のジレンマ2回繰り返しゲーム」の戦略の組合せの例

| プレイヤー1の戦略 | プレイヤー2の戦略 |
|---|---|
| 1回目： $C_1$ | 1回目： $D_2$ |
| 2回目： | 2回目： |
| 1回目 $(C_1, C_2) \Rightarrow C_1$ | 1回目 $(C_1, C_2) \Rightarrow D_2$ |
| 1回目 $(C_1, D_2) \Rightarrow D_1$ | 1回目 $(C_1, D_2) \Rightarrow D_2$ |
| 1回目 $(D_1, C_2) \Rightarrow C_1$ | 1回目 $(D_1, C_2) \Rightarrow C_2$ |
| 1回目 $(D_1, D_2) \Rightarrow C_1$ | 1回目 $(D_1, D_2) \Rightarrow D_2$ |

- 上の戦略の組によって起きる結果は？
- 1回目：$(C_1, D_2)$　2回目：$(D_1, D_2)$
- ２回繰り返すだけで戦略は32個！

# 「囚人のジレンマ2回繰り返しゲーム」の戦略の組合せ

| プレイヤー1の戦略 | プレイヤー2の戦略 |
|---|---|
| 1回目： $C_1$ | 1回目： $D_2$ |
| 2回目： | 2回目： |
| 1回目 $(C_1, C_2) \Rightarrow C_1$ | 1回目 $(C_1, C_2) \Rightarrow D_2$ |
| 1回目 $(C_1, D_2) \Rightarrow D_1$ | 1回目 $(C_1, D_2) \Rightarrow D_2$ |
| 1回目 $(D_1, C_2) \Rightarrow C_1$ | 1回目 $(D_1, C_2) \Rightarrow C_2$ |
| 1回目 $(D_1, D_2) \Rightarrow C_1$ | 1回目 $(D_1, D_2) \Rightarrow D_2$ |

- 左の戦略の組によって起きる結果は？
- 1回目：$(C_1, D_2)$
- 2回目：$(D_1, D_2)$
- １人の戦略の数は32個！

（2回繰り返すだけで）

- 戦略の数は膨大にあるが，ほとんどは実際に起きず，影響を及ぼさないような行動を決めている
- すべての戦略を考えなくても，理論は構成できる
- 代表的ないくつかの戦略について，考察する

# 囚人のジレンマ繰り返しゲームの代表的戦略

- 協力ーオウム返し戦略
  - 1回目は協力する
  - 2回目以降は，前の回の相手の戦略と同じ戦略
- 非協力ーオウム返し戦略
  - 1回目は協力しない
  - 2回目以降は，前の回の相手の戦略と同じ戦略
- トリガー戦略
  - 1回目は協力する
  - 2回目以降：
    - それまでに相手が1回も非協力を選ばなかったら協力する.
    - それまでに1回でも相手が非協力を選べば，協力しない
- その他： 常に協力する戦略，常に協力しない戦略．．．

# （例）囚人のジレンマを5回繰り返す戦略

プレイヤー1の戦略
協力ーオウム返し

プレイヤー2の戦略
常に非協力

- 上の戦略の組によって起きる結果は？
- $(C_1, D_2)$ $(D_1, D_2)$ $(D_1, D_2)$ $(D_1, D_2)$ $(D_1, D_2)$

- ゲームの結果は各回で起きた結果（戦略の組）を並べたもの
- これを履歴と呼ぶ

# （例）囚人のジレンマを5回繰り返す戦略

- もう少し複雑な戦略を考えてみよう

プレイヤー1の戦略
　　協力ーオウム返し

プレイヤー2の戦略
　1回目　$D_2$
　2回目　1回目のオウム返し
　3回目　2回目のオウム返し
　4回目　3回目までに相手が1回でも$D_1$を選べば$D_2$,そうでなければ$C_2$
　5回目　4回目のオウム返し

- この戦略の組によって起きる結果は？

- $(C_1, D_2)$ $(D_1, C_2)$ $(C_1, D_2)$ $(D_1, D_2)$ $(D_1, D_2)$

# 【演習】囚人のジレンマの5回繰り返しゲーム

- 囚人のジレンマを5回繰り返すゲームにおいて，各プレイヤーが以下の戦略を選んだ時，起きる結果（5回の履歴）を書け

（1）プレイヤー1：協力－おうむ返し　　プレイヤー2：すべて協力

（2）プレイヤー1：トリガー戦略　　プレイヤー2：すべて非協力

（3）プレイヤー1：協力－おうむ返し　　プレイヤー2：：協力－おうむ返し

（4）プレイヤー1：協力－おうむ返し　　プレイヤー2：：非協力－おうむ返し

# 【演習】囚人のジレンマの5回繰り返しゲーム

- 囚人のジレンマを5回繰り返すゲームにおいて，各プレイヤーが以下の戦略を選んだ時，起きる結果（5回の履歴）を書け

（1）プレイヤー1：協力－オウム返し　　プレイヤー2：すべて協力

$(C_1, C_2)\ (C_1, C_2)\ (C_1, C_2)\ (C_1, C_2)\ (C_1, C_2)$

（2）プレイヤー1：トリガー戦略　　プレイヤー2：すべて非協力

$(C_1, D_2)\ (D_1, D_2)\ (D_1, D_2)\ (D_1, D_2)\ (D_1, D_2)$

（3）プレイヤー1：協力－おうむ返し　　プレイヤー2：：協力－おうむ返し

$(C_1, C_2)\ (C_1, C_2)\ (C_1, C_2)\ (C_1, C_2)\ (C_1, C_2)$

（4）プレイヤー1：協力－おうむ返し　　プレイヤー2：：非協力－おうむ返し

$(C_1, D_2)\ (D_1, C_2)\ (C_1, D_2)\ (D_1, C_2)\ (C_1, D_2)$

# (2)繰り返しゲームの利得

# 繰り返しゲームの利得

- 繰り返しゲームの利得は，毎回の成分ゲームの平均利得か，割引利得和を考える．
- この割引因子が結果に影響を与える．

| 1 \ 2 | $C_2$ | $D_2$ |
|---|---|---|
| $C_1$ | (4 , 4) | (-6 ,10) |
| $D_1$ | (10, -6) | (0 , 0) |

例：　３回の繰り返しゲーム
プレイヤー1：トリガー戦略
プレイヤー2：非協力－おうむ返し

結果：$(C_1, D_2)$ $(D_1, C_2)$ $(D_1, D_2)$

平均利得の場合

プレイヤー1　：（－6＋10＋0）÷3＝　4／3

プレイヤー2　：（10　－6 ＋0）÷3＝　4／3

# 繰り返しゲームの利得ー割引利得の場合

| 1 \ 2 | $C_2$ | $D_2$ |
|---|---|---|
| $C_1$ | (4 , 4) | (-6 ,10) |
| $D_1$ | (10, -6) | (0 , 0) |

例： ３回の繰り返しゲーム
プレイヤー1：トリガー戦略
プレイヤー2：非協力ーおうむ返し

結果：$(C_1, D_2)$ $(D_1, C_2)$ $(D_1, D_2)$

割引利得の場合（割引因子を$R$とする）

プレイヤー1 ： $-6+10R+0R^2=\ -6+10R$

プレイヤー2 ： $10\ -6R\ +0R^2=\ 10-6R$

- $R=0.9$とすると？ プレイヤー1は3，プレイヤー2は4.6
- 同じ -6, 10 , 0という利得を1回ずつ得ているが，各プレイヤーの割引利得和は違う（平均利得は同じ）

# 【演習】繰り返しゲームの割引利得和

| 1 \ 2 | $C_2$ | $D_2$ |
|---|---|---|
| $C_1$ | (4 , 4) | (-6 ,10) |
| $D_1$ | (10, -6) | (0 , 0) |

【演習】3回の繰り返しゲーム
　　プレイヤー1：協力－おうむ返し
　　プレイヤー2：非協力－おうむ返し

割引因子をRとして，割引利得和を求めよ

# 【演習】繰り返しゲームの割引利得和

| 1 \ 2 | $C_2$ | $D_2$ |
|---|---|---|
| $C_1$ | (4 , 4) | (-6 ,10) |
| $D_1$ | (10, -6) | (0 , 0) |

【演習】3回の繰り返しゲーム
プレイヤー1：協力－おうむ返し
プレイヤー2：非協力－おうむ返し

割引因子をRとして，割引利得和を求めよ

結果：$(C_1, D_2)$ $(D_1, C_2)$ $(C_1, D_2)$

割引利得の場合（割引因子を$R$とする）

プレイヤー1　：　$-6+10R-6R^2$

プレイヤー2　：　$10\ -6R+10R^2$

# 繰り返しゲームの利得ー多数・無限の繰り返し

- 多数回（$n$回）繰り返すゲームや，無限回繰り返すゲームの割引利得和は等比級数の和の公式で求める
- $a$ の利得を $n$ 回得た時の割引利得和（割引因子を$R$とする）

$$a + aR + aR^2 + \cdots + aR^{n-1} = \frac{a(1 - R^n)}{1 - R}$$

- $a$ の利得を無限回得た時の割引利得和（割引因子を$R$とする）

$$a + aR + aR^2 + \cdots = \frac{a}{1 - R}$$

# 無限の割引利得和　＃1

$$a + aR + aR^2 + \cdots = \frac{a}{1-R}$$

| 1 \ 2 | $C_2$ | $D_2$ |
|---|---|---|
| $C_1$ | (4 , 4) | (-6 ,10) |
| $D_1$ | (10, -6) | (0 , 0) |

例：　無限の繰り返しゲーム
プレイヤー1：トリガー戦略
プレイヤー2：トリガー戦略

結果：$(C_1, C_2)$ $(C_1, C_2)$ $(C_1, C_2)$ $(C_1, C_2)$ $(C_1, C_2)$・・・

割引利得和

プレイヤー1，2：　$4 + 4R + 4R^2 + 4R^3 + \cdots = \frac{4}{1-R}$

（例）　$R$ = 0.9 とすると？　⇒　40

# 無限の割引利得和　＃2

$$a + aR + aR^2 + \cdots = \frac{a}{1-R}$$

| 1 \ 2 | $C_2$ | $D_2$ |
|---|---|---|
| $C_1$ | (4 , 4) | (-6 ,10) |
| $D_1$ | (10, -6) | (0 , 0) |

例：　無限の繰り返しゲーム
プレイヤー1：トリガー戦略
プレイヤー2：すべて非協力

結果：$(C_1, D_2)$ $(D_1, D_2)$ $(D_1, D_2)$ $(D_1, D_2)$ $(D_1, D_2)$ ・・

割引利得和

プレイヤー1：　$-6 + 0R + 0R^2 + 0R^3 + \cdots = -6$

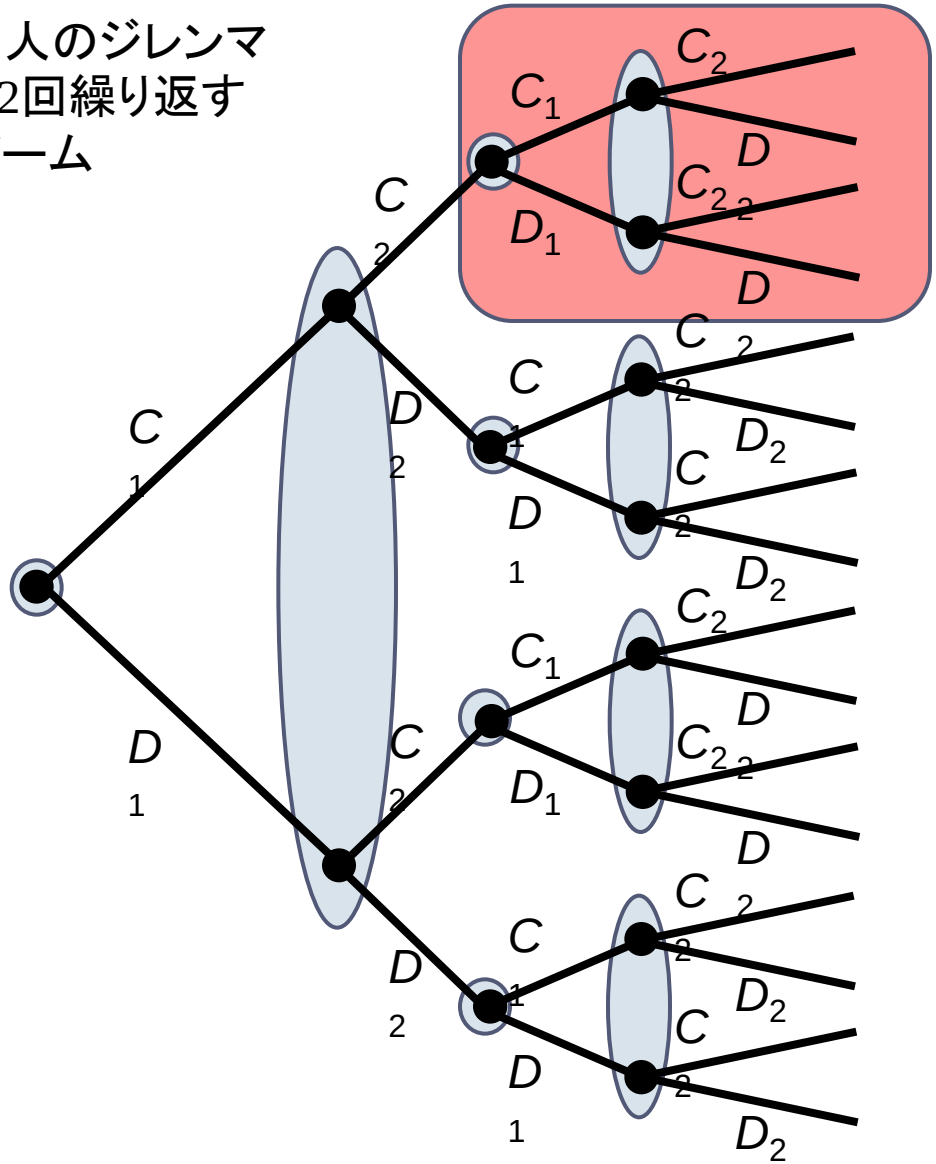
プレイヤー2：　$10 + 0R + 0R^2 + 0R^3 + \cdots = 10$

（例）　$R = 0.9$ とすると？
⇒　プレイヤー1：－6，プレイヤー2：10

# （3）繰り返しゲームの解

# 部分ゲーム完全均衡（有限ゲーム）

- 囚人のジレンマを2回繰り返すゲーム

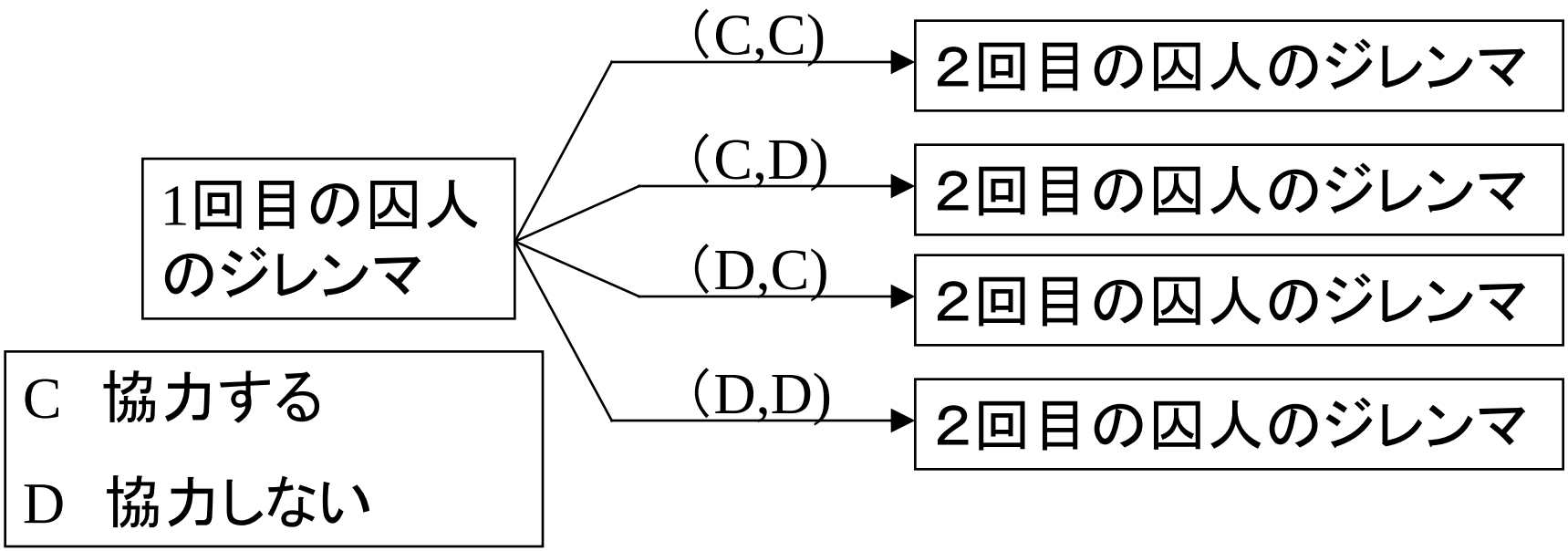



1つの部分ゲーム

意味：
1回目が（$C_1$,$C_2$）の時のゲーム

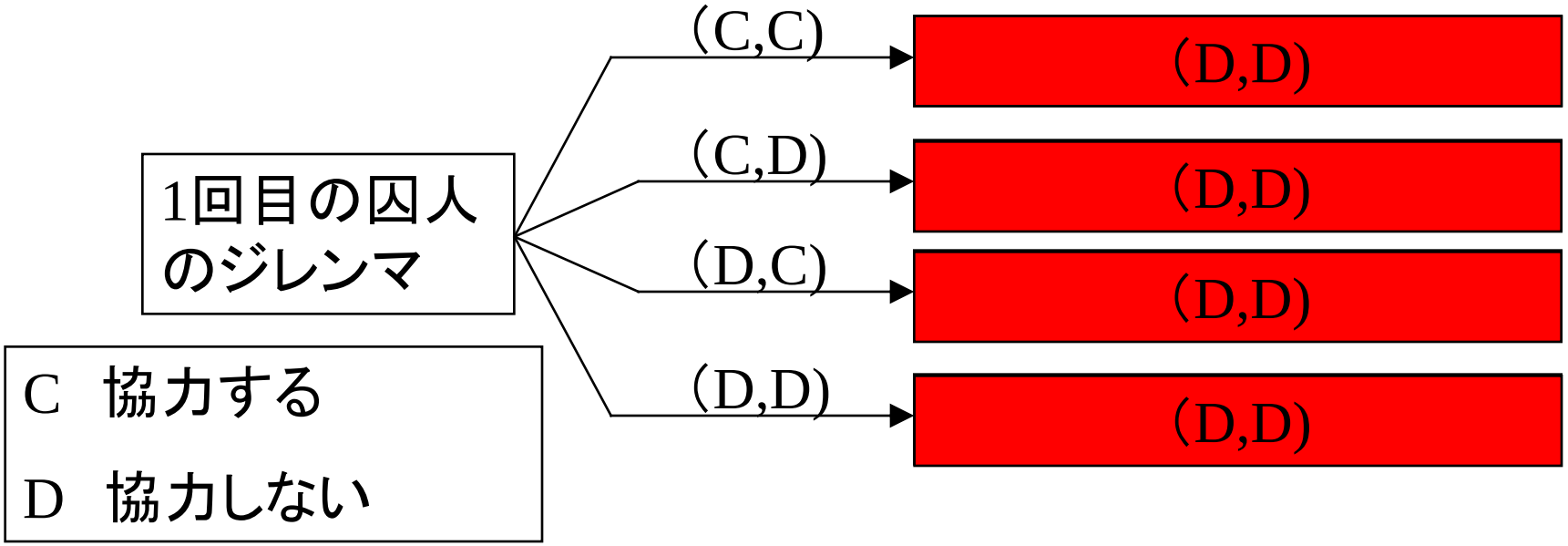
# 理論的結果1：有限のゲーム

- 有限の繰り返しゲームで部分ゲーム完全均衡解（先読み）を解と考える
- 2回の繰り返しゲームでは？
  - 1回目の4つの結果に応じて，各プレイヤーは戦略を選ぶ



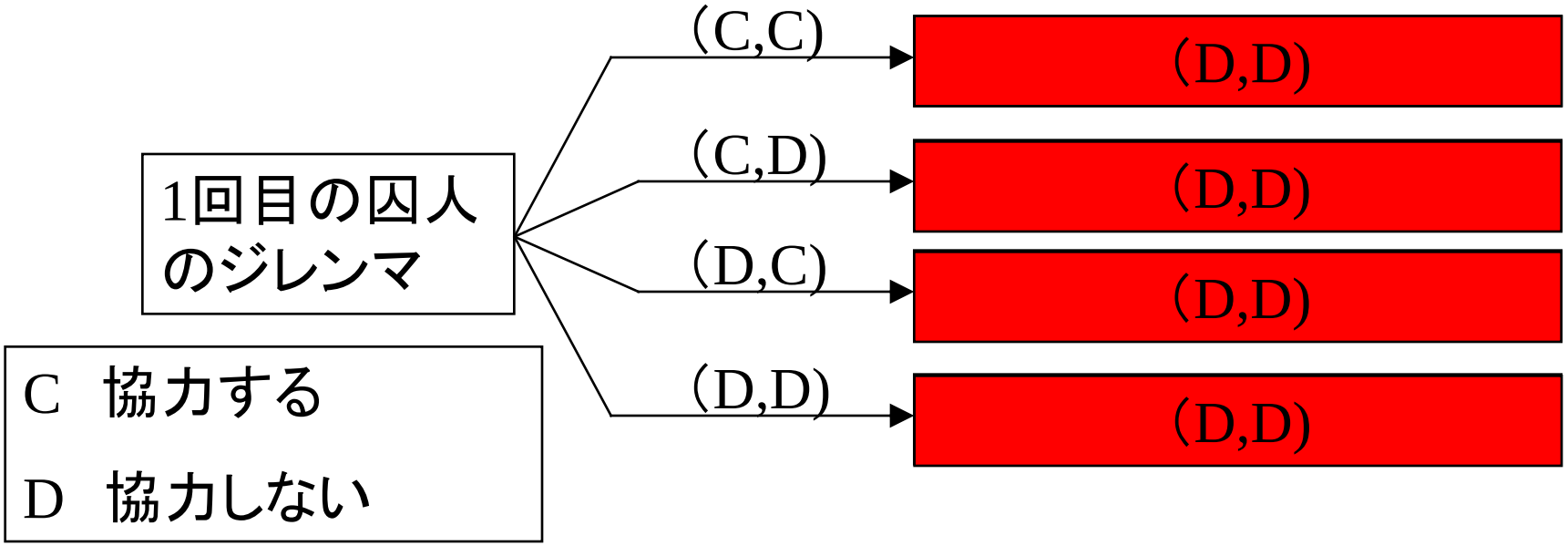
# 有限のゲームと部分ゲーム完全均衡　＃１

- 有限の繰り返しゲームで部分ゲーム完全均衡解（先読み）を解と考える
  - ２回の繰り返しゲームでは？
  - １回目の4つの結果に応じて，各プレイヤーは戦略を選ぶ



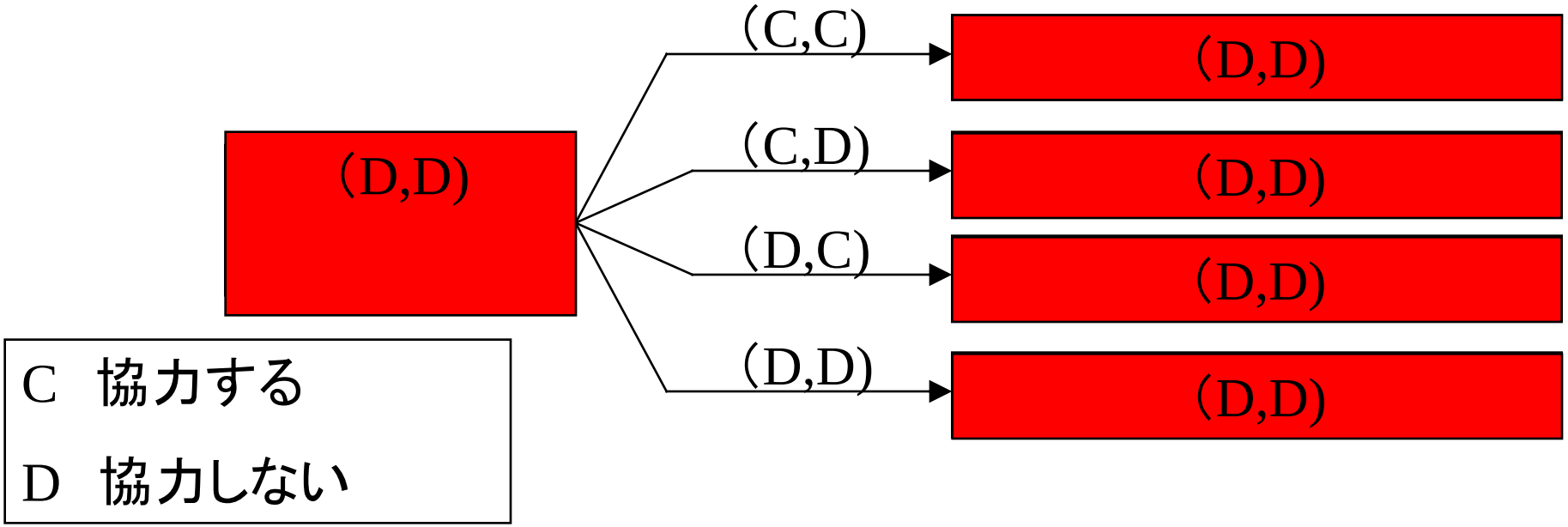
# 有限のゲームと部分ゲーム完全均衡　＃２

- 先読みで2回目の結果を考える
- 2回目のゲームは，独立で1回目の結果に依存しない
- 2回目＝最終回で，プレイヤーは（1回目の結果が何であっても）通常の囚人のジレンマに直面する
- 結果は，どの部分ゲームでも協力しない



# 有限のゲームと部分ゲーム完全均衡　＃３

- 2回目のゲームはどちらも協力しない－必ず裏切りあう
- 2回目のゲームを先読みして1回目の戦略を決定する
- しかし，1回目に何を選択しても2回目は同じ
- 1回目に，通常の（1回きりの）囚人のジレンマに直面
  - 1回目も協力しない



# 有限のゲームと部分ゲーム完全均衡

- 有限の繰り返しゲーム⇒バックワードインダクション
  - まず最終回に何が起きるか先読みする
- 最終回では，1回きりの囚人のジレンマに直面－協力しない
- 最終回の1回前のゲーム
  - 最終回のゲームは（今回の選択に依存せず）すべて「協力しない」
  - そこでこの回でも，1回きりの囚人のジレンマに直面－協力しない
- バックワードインダクションでこれを続けていくと....
- すべての回で「協力しない」という結果になる

# 無限のゲームの解

- 無限ゲームの部分ゲーム完全均衡は難しい
- そこで，無限ゲームを戦略形ゲームに変換し，そのナッシュ均衡を考える
  - 部分ゲーム完全均衡はナッシュ均衡の精緻化

| 1 \ 2 | $C_2$ | $D_2$ |
|---|---|---|
| $C_1$ | (4 , 4) | (-6 ,10) |
| $D_1$ | (10, -6) | (0 , 0) |

左のゲームを無限に繰り返すと，
無数の戦略がある

戦略形ゲーム
への変換イメージ

| 1 \ 2 | 常に非協力 | トリガー | 協力ーおうむ返し | |
|---|---|---|---|---|
| 常に非協力 | ($a$ , $a$) | ($c$ , $b$) | ($e$ , $d$) | ・・・ |
| トリガー | ($b$ , $c$) | ($g$ , $g$) | ・・・ | |
| 協力ーおうむ返し | ($d$ , $e$) | ⋮ | | |
| ⋮ | ⋮ | | | |

# トリガー戦略はナッシュ均衡になるか

| 1 \ 2 | $C_2$ | $D_2$ |
|---|---|---|
| $C_1$ | (4 , 4) | (-6 ,10) |
| $D_1$ | (10, -6) | (0 , 0) |

| 1 \ 2 | 常に非協力 | トリガー | 協力ーおうむ返し |
|---|---|---|---|
| 常に非協力 | $(a , a)$ | $(c , b)$ | $(e , d)$ ・・・ |
| トリガー | $(b , c)$ | $(g , g)$ | ・・・ |
| 協力ーおうむ返し | $(d , e)$ | ⋮ | |
| ⋮ | ⋮ | | |

- トリガー戦略をとりあうことはナッシュ均衡になるか？

相手がトリガー戦略を選んでいるとき，自分がトリガー戦略から別の戦略に変える（逸脱する）と，利得が上がらないならナッシュ均衡

トリガー戦略どうしの結果：$(C_1, C_2)$ $(C_1, C_2)$ $(C_1, C_2)$ ・・・（ずっと協力）

$$4 + 4R + 4R^2 + \cdots = \frac{4}{1-R}$$

例えば，自分が「常に協力しない」に戦略を変えると？

結果：$(C_1, D_2)$ $(D_1, D_2)$ $(D_1, D_2)$ ・・・（最初，得をする

$$10 + 0R + 0R^2 + \cdots = 10$$

$\frac{4}{1-R} \geq 10$ならば，戦略を変えても良くならない

⇒

$4 \geq 10(1-R)$

$10R \geq 10 - 4$

$R \geq 0.6$

# トリガー戦略はナッシュ均衡になるか

■ トリガー戦略をとりあうことはナッシュ均衡になるか？

相手がトリガー戦略を選んでいるとき，自分がトリガー戦略から別の戦略に変える（逸脱する）と，利得が上がらないならナッシュ均衡

トリガー戦略どうしの結果：$(C_1, C_2)$ $(C_1, C_2)$ $(C_1, C_2)$ ・・・（ずっと協力）

$$4 + 4R + 4R^2 + \cdots = \frac{4}{1-R}$$

自分が「常に協力しない」に戦略を変えると？

結果：$(C_1, D_2)$ $(D_1, D_2)$ $(D_1, D_2)$ ・・・（最初，得をするが，そのあとずっと損する）

$$10 + 0R + 0R^2 + \cdots = 10$$

$$\frac{4}{1-R} \geq 10 \Rightarrow R \geq 0.6$$

割引因子がある程度大きい（$R \geq 0.6$）と，自分が「常に協力しない」に戦略を変えても利得は高くならない

- 協力しないと，1回だけ得をする（4 ⇒ 10 で＋6）
- しかしその後は，ずっと損をし続ける（4 ⇒ 0 で－4）

割引因子Rが小さいと，その後にずっと損をし続けるよりも1回だけ得をしたほうが良くなる

# トリガー戦略はナッシュ均衡になるか

- 「常に協力しない」だけではなく，どんな戦略に変えても利得は高くならない．
- 一般に，以下のことが成り立つ

割引因子がある程度大きいと（大きさは利得表による，今回は$R \geq 0.6$），トリガー戦略を選び合うことはナッシュ均衡になる．

その結果：$(C_1, C_2)$ $(C_1, C_2)$ $(C_1, C_2)$ ・・・ずっと協力することがナッシュ均衡になる

# トリガー戦略はナッシュ均衡になる：証明1

割引因子がある程度大きいと（大きさは利得表による，今回は $R \geq 0.6$），トリガー戦略を選び合うことはナッシュ均衡になる．

証明　相手がトリガー戦略を選んでいるとき，自分がトリガー戦略から別の戦略に変える（逸脱する）と，利得が上がらないならナッシュ均衡

トリガー戦略：$(C_1, C_2)$ $(C_1, C_2)$ ・・・（ずっと協力）

$$4 + 4R + 4R^2 + \cdots = \frac{4}{1-R}$$

自分（プレイヤー1）が戦略を変えると？

ケース1：戦略を変えても，1度も$D_1$が現れない場合
⇒　利得は同じ

ケース2：戦略を変えた結果，少なくとも1回は$D_1$が現れる場合：
⇒最初の$D_1$が現れるのを$n$回目とする．　その回（$n$回目）の利得は　10
⇒相手は$n$+1回目以降，ずっと協力しない
⇒その後の利得は最良でも0（悪いと-6になる）

戦略を変えたときの最良の利得

$$4 + 4R^2 + 4R^3 + \cdots + 4R^{n-2} + 10R^{n-1} + 0R^n + 0R^{n+1} + \cdots$$

# トリガー戦略はナッシュ均衡になる：証明2

割引因子がある程度大きいと（大きさは利得表による，今回は $R \geq 0.6$），トリガー戦略を選び合うことはナッシュ均衡になる．

自分（プレイヤー1）が戦略を変えると？

ケース1：戦略を変えても，1度も$D_1$が現れない場合
⇒　利得は同じ

ケース2：戦略を変えた結果，少なくとも1回は$D_1$が現れる場合：
⇒最初の$D_1$が現れるのを$n$回目とする．　その回（$n$回目）の利得は　10
⇒相手は$n$+1回目以降，ずっと協力しない
⇒その後の利得は最良でも0（悪いと-6になる）

戦略を変えたときの最良の利得

$$4 + 4R + \cdots + 4R^{n-2} + 10R^{n-1} + 0R^{n} + 0R^{n+1} + \cdots$$

トリガーの時の利得

$$4 + 4R + \cdots + 4R^{n-2} + 4R^{n-1} + 4R^{n} + 4R^{n+1} + \cdots$$

その差は？

$$6R^{n-1} - 4R^{n} - 4R^{n+1} - 4R^{n+2} - \cdots$$

$6R^{n-1} - 4R^{n} - 4R^{n+1} - 4R^{n+2} \cdots \leq 0$　ならば，トリガーより利得が大きくならない

# トリガー戦略はナッシュ均衡になる：証明3

割引因子がある程度大きいと（大きさは利得表による．今回は$R \geq 0.6$），トリガー戦略を選び合うことはナッシュ均衡になる．

自分（プレイヤー1）が
戦略を変えると？

ケース1：戦略を変えても，1度も$D_1$が現れない場合
⇒　利得は同じ

ケース2：戦略を変えた結果，少なくとも1回は$D_1$が現れる場合：
⇒最初の$D_1$が現れるのを$n$回目とする．　その回（$n$回目）の利得は　10
⇒相手は$n$+1回目以降，ずっと協力しない　⇒その後の利得は最良でも0（悪いと-6になる）

戦略を変えた
ときの最良の利得

$$4 + 4R + \cdots + 4R^{n-2} + 10R^{n-1} + 0R^{n} + 0R^{n+1} + \cdots$$

トリガー時の利得

$$4 + 4R + \cdots + 4R^{n-2} + 4R^{n-1} + 4R^{n} + 4R^{n+1} + \cdots$$

その差は？

$$6R^{n-1} - 4R^{n} - 4R^{n+1} - 4R^{n+2} - \cdots$$

$6R^{n-1} - 4R^{n} - 4R^{n+1} - 4R^{n+2} \cdots \leq 0$　ならば，トリガーより利得が大きくならない

$$6R^{n-1} \leq 4R^{n} + 4R^{n+1} + 4R^{n+2} \cdots \Rightarrow 6R^{n-1} \leq \frac{4R^{n}}{1-R} \Rightarrow 6 \leq \frac{4R}{1-R}$$

$$\Rightarrow 6 - 6R \leq 4R \quad -10R \leq -6$$

$R \geq 0.6$　ならば，トリガーより利得が大きくならない

# 有限ゲームでトリガー戦略はナッシュ均衡になるか

無限期間ではなく有限期間で，トリガー戦略を選び合うことはナッシュ均衡か？

- 部分ゲーム完全均衡は，お互い協力しないことだけだった
- しかし無限の時のロジックを用いれば，トリガー戦略を選び合うことはナッシュ均衡では？

- n回繰り返しゲームで考えてみる

トリガー時の利得

$$4 + 4R + \cdots + 4R^{n-2} + 4R^{n-1}$$

- 相手がトリガー戦略を用いている時，自分はトリガー戦略より利得を高くする戦略がある．それは？

最後の1回裏切る戦略！

$$4 + 4R + \cdots + 4R^{n-2} + 10R^{n-1}$$

峰不二子戦略！

- 無限の時との違いは？

最後の回があるので，そこで裏切っても，その後に罰則できない！

- 峰不二子戦略を取り合うことはナッシュ均衡か？

相手が峰不二子戦略の時は，最後から2回目に裏切ると，利得を高くできるので均衡ではない！

結局，すべての回で協力しないことだけがナッシュ均衡

# まとめ

- 繰り返しゲームの戦略と利得を定義した
- トリガー戦略，協力－オウム返しなど，代表的な戦略を考察する.
- 無限期間のゲーム
  - 割引が十分に小さい（割引因子が1に近い）と，協力が達成できる（フォーク定理）
  - トリガー戦略によって，協力を達成
- 有限期間のゲーム
  - バックワードインダクションにより，すべての回で協力しないことが部分ゲーム完全均衡
  - ナッシュ均衡だけ考えても，すべての回で協力しない（トリガー戦略による協力は，峰不二子戦略で達成できないから）

# ９．不確実性とゲーム理論

# 不確実性を扱う

- 不確実性を確率で表す
  - 不確実な現象は確率で表す
  - 期待値で比較する
  - 利得の期待値⇒期待効用・期待利得
  - （利得≒効用）≠金額
  - 金額の期待値は期待効用ではない！
    - リスクの影響を考える

# 期待値とリスク

- 「1/2の確率で100万円が当たり，1/2の確率で何ももらえない（0円）」という「くじ」があるとする
- あなたは，このくじと「50万円を確実にもらう」ということと，どちらを好むだろうか

期待値と同じ金額を確実にもらうことは同値ではない

## 「くじ」の期待値

½ ×100万円 + ½ ×0= 50万円

- 50万円を確実にもらうことを好む人　―　リスク回避的
- 「くじ」を好む人　―　リスク選好的
- 同値（無差別）な人　― リスク中立的

# 確実性同値とリスクプレミアム

- 「くじ」より50万円を確実にもらうことを好むリスク回避的な人も，どこかでくじと同値になる金額はあるはず

くじ ＜ 50万円を確実にもらう

50万円を好む

くじ ＜ 49万円を確実にもらう

49万円を好む

くじ ＝ $x$万円を確実にもらう

等価値

くじ ＞ 1万円を確実にもらう

くじを好む

この$x$を「くじ」と確実性同値な金額と呼ぶ

$50-x$をこの人のリスクプレミアムと呼ぶ

# 期待利得（期待効用）

- 金額 $\neq$ 利得
  - 金額に対する「利得（効用）」をうまく測ると，「くじ」に対応する利得と，利得の期待値を等しくできる
- 効用関数（利得を測る関数）$u(x)$を考える．
- 例えば$x$(万円)に対する効用関数として
を考えてみよう．

$$u(x)=\left(\frac{x}{100}\right)^{\frac{2}{3}}$$

- 特徴

グラフで解説

  - $u(0)=0$，$u(100)=1$
  - このように最低額を0，最高額を1に基準化するとうまくいく

$$\boxed{u(50)=(0.5)^{\frac{2}{3}}=0.63}$$

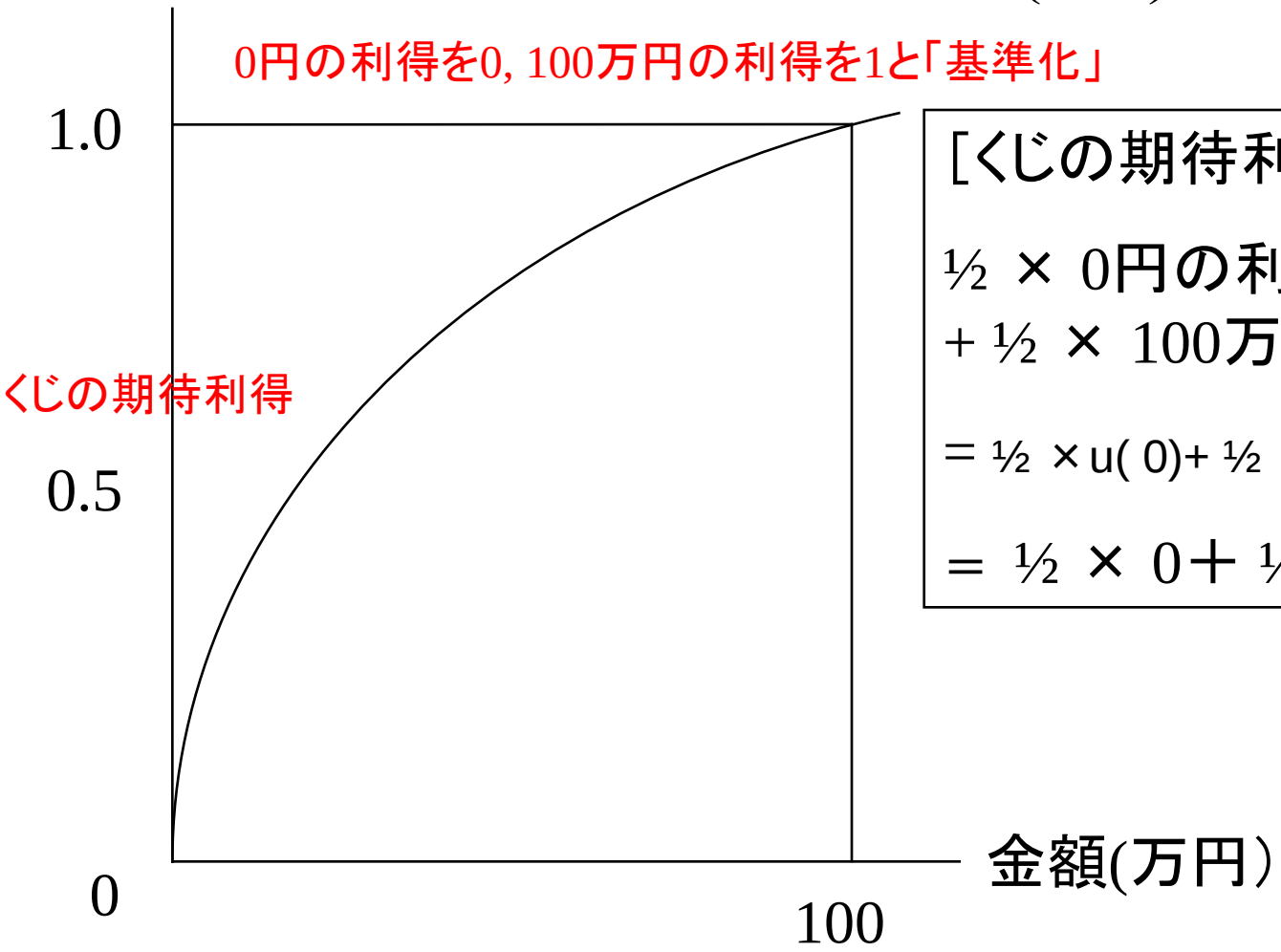
↑50万円の利得は0.5より大きい

$$\boxed{u(35)=(0.35)^{\frac{2}{3}}=0.5}$$

↑確実性同値額は35万円

# 利得と金額の関係ーリスク回避的な場合

効用関数 $u(x)=\left(\frac{x}{100}\right)^{\frac{2}{3}}$ で測ってみよう




［くじの期待利得］

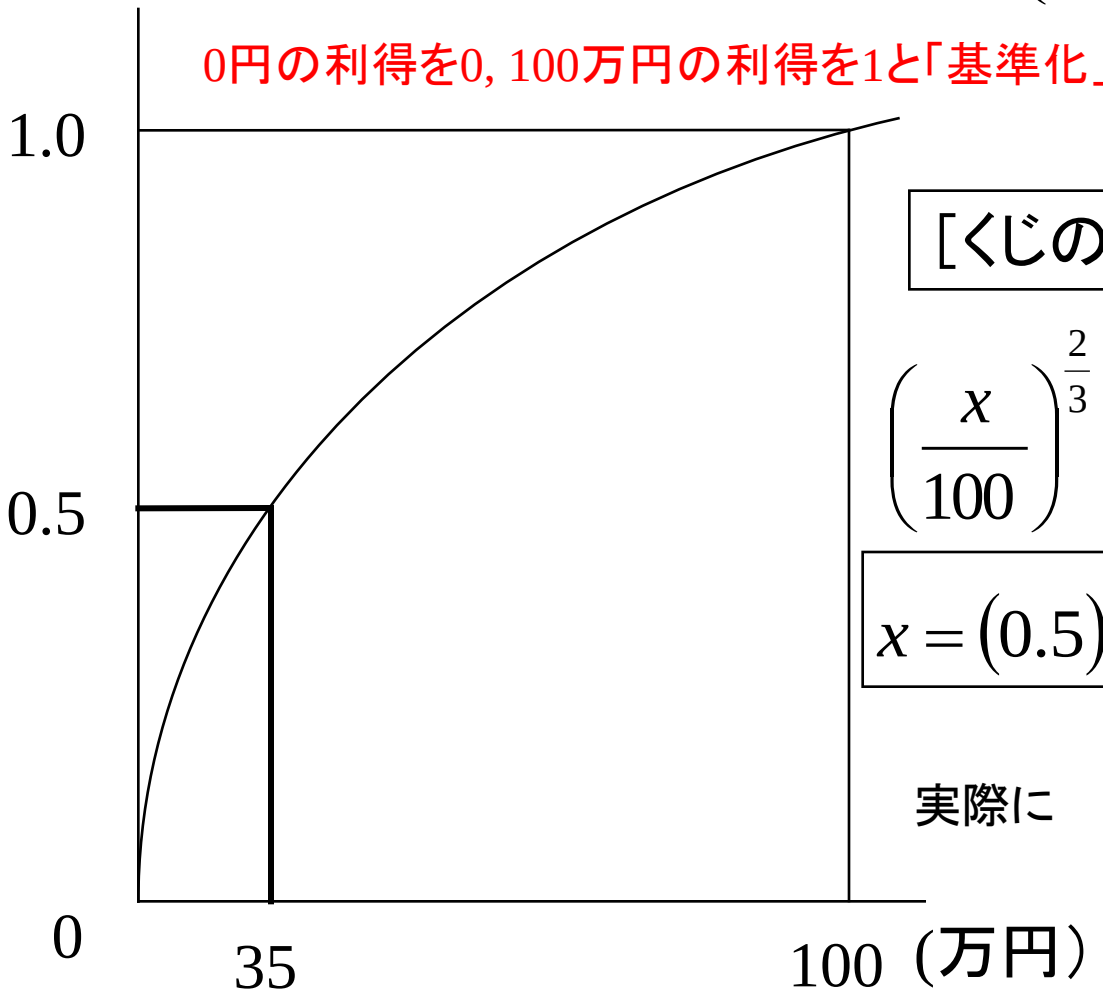
½ × 0円の利得
＋ ½ × 100万円の利得

＝ ½ ×u( 0)+ ½ ×u(100)

＝ ½ × 0＋ ½ × 1=0.5

# 利得と金額の関係ーリスク回避的な場合

効用関数 $u(x)=\left(\frac{x}{100}\right)^{\frac{2}{3}}$ で測ってみよう




［くじの期待利得］　0.5

$\left(\frac{x}{100}\right)^{\frac{2}{3}}=0.5$ となる金額は？

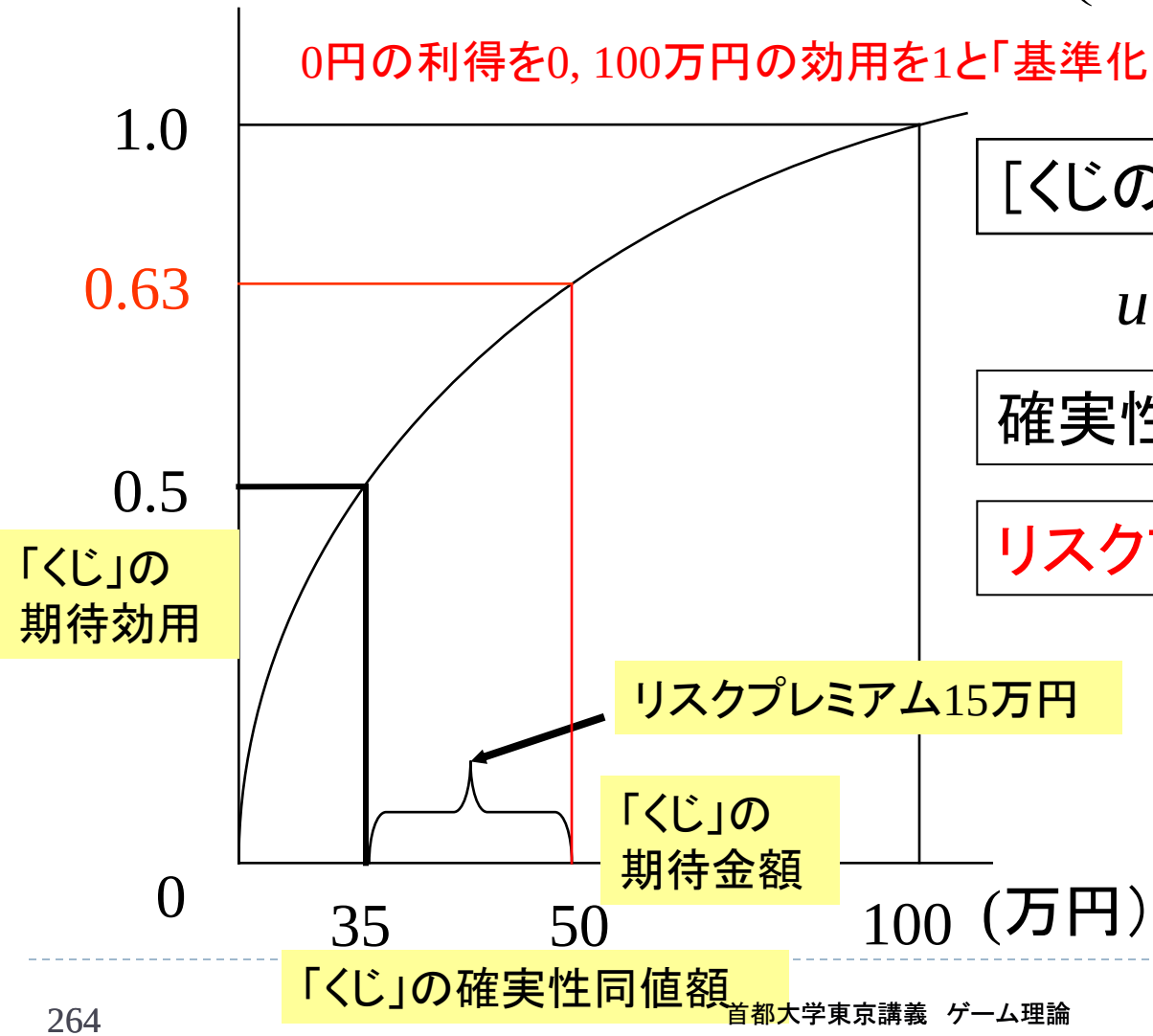
$$x=(0.5)^{\frac{3}{2}}\times 100=0.35\times 100=35$$

実際に $u(35)=(0.35)^{\frac{2}{3}}=0.5$

確実性同値額

# 利得と金額の関係ーリスク回避的な場合

効用関数 $u(x)=\left(\frac{x}{100}\right)^{\frac{2}{3}}$ で測ってみよう




［くじの期待効用］　0.5

$$u(35)=(0.35)^{\frac{2}{3}}=0.5$$

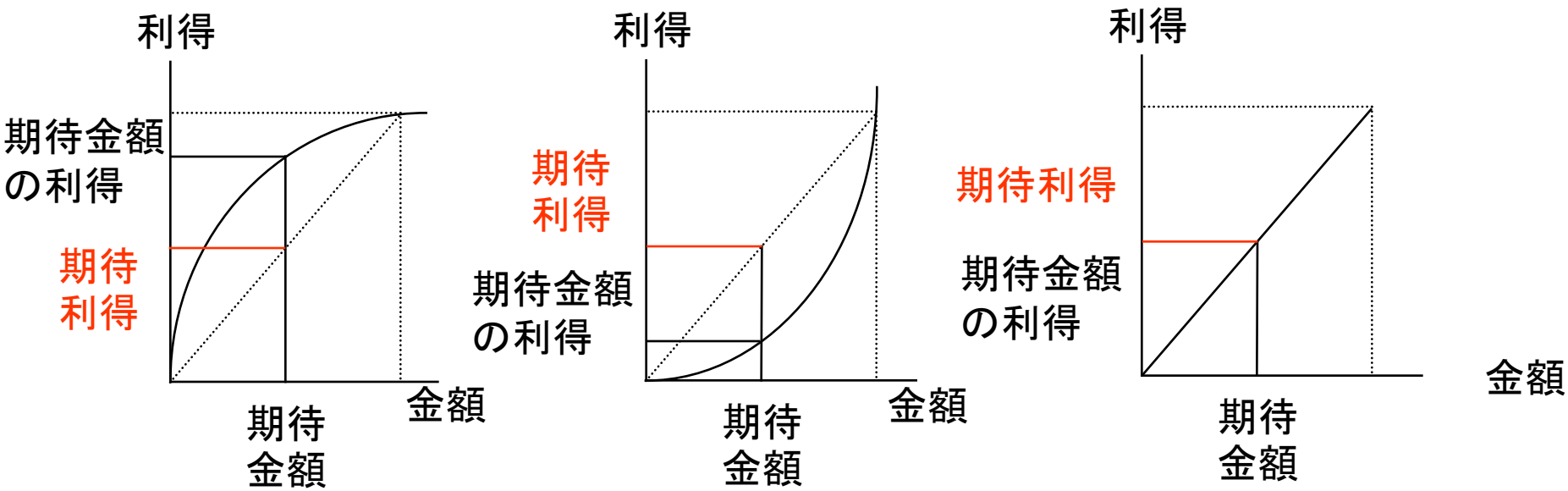
確実性同値額　35万円

リスクプレミアム　15万円

金額50万円（を確実にもらう）効用は？

$$u(50)=(0.5)^{\frac{2}{3}}=0.63$$

# リスク態度と利得のグラフ




**リスク回避的**

「期待金額」の利得
＞期待利得

グラフが上に膨らんでいる

金額に対する「限界効用」が逓減

**リスク選好的**

「期待金額」の利得
＜期待利得

グラフが下に膨らんでいる

金額に対する「限界効用」が逓増

**リスク中立的**

「期待金額」の利得
=期待利得

グラフは直線

金額に対する「限界効用」は一定

# まとめ：期待利得（期待効用）

- 金額 $\neq$ 利得
  - 金額に対する「利得（効用）」をうまく測ると，「くじ」に対応する利得と，利得の期待値を等しくできる
- 効用関数（利得を測る関数）$u(x)$を考える.
- くじの期待金額(金額の期待値）を$x$ ，期待利得（利得の期待値）を$y$とすると…

$$u(z) = y$$

- $u(x)>y$ リスク回避的
- $u(x)=y$ リスク中立的
- $u(x)<y$ リスク選好的

$z$ ：確実性同値額

$$z = u^{-1}(y)$$

$z - x$ ：*リスクプレミアム*

# 演習

- 「1/2の確率で100万円が当たり，1/2の確率で何ももらえない（0円）」という「くじ」を考える

$$u(x)=\left(\frac{x}{100}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{x}{100}}$$

- 左の効用関数を考える
  - 問題１　「くじ」の期待金額を求めよ
  - 問題２　「くじ」の期待効用を求めよ
  - 問題３　「くじ」の確実性同値額を計算せよ
  - 問題４　「くじ」のリスクプレミアムを計算せよ
  - 問題５　先ほど講義で考えた効用関数⇒ とどちらがリスク回避的か？

$$u(x)=\left(\frac{x}{100}\right)^{\frac{2}{3}}$$

# インティブ契約とモラルハザード

# プリンシパルとエージェント問題

- 依頼人（プリンシパル）と代理人（エージェント）
  - 野球選手の大リーグ移籍ー選手と代理人
  - メーカーと販売店
  - メーカーと部品を製造する工場
  - 雇用主と被雇用者，上司と部下
- インセンティブ契約とモラルハザード
  - 代理人が努力したかどうかを依頼人が完全に観察（モニタリング）できず，成果のみ観察できるとき
    - 依頼人は代理人の持っている情報を持っていない
    - 情報の非対称性
  - 契約によって，代理人の努力を引き出す
  - インセンティブ契約

# モデル　代理店のチケット販売

- 依頼人は代理店へチケット販売を依頼
- 代理店の要求
  - 固定額報酬　60万円　又は
  - インセンティブ契約　売上げの10%
- 代理店の努力水準と費用
  - 低努力　20万円相当の費用
  - 高努力　50万円相当の費用
- 努力と成果
  - 低努力 チケットは1500枚しか売れない
  - 高努力 80%の確率で2500枚，20%の確率で1500枚
  - チケットは1枚5000円
  - 依頼人の利得（チケットの売上 × 30%）－（代理店への報酬）
  - 代理店の利得（代理店への報酬）－（努力の費用）
- 依頼人はどちらの報酬を選択すべきか？

# 代理人のインセンティブを考える

- ここで依頼人と代理店は共にリスク中立的であるとして考える
- すなわち期待利得＝期待金額

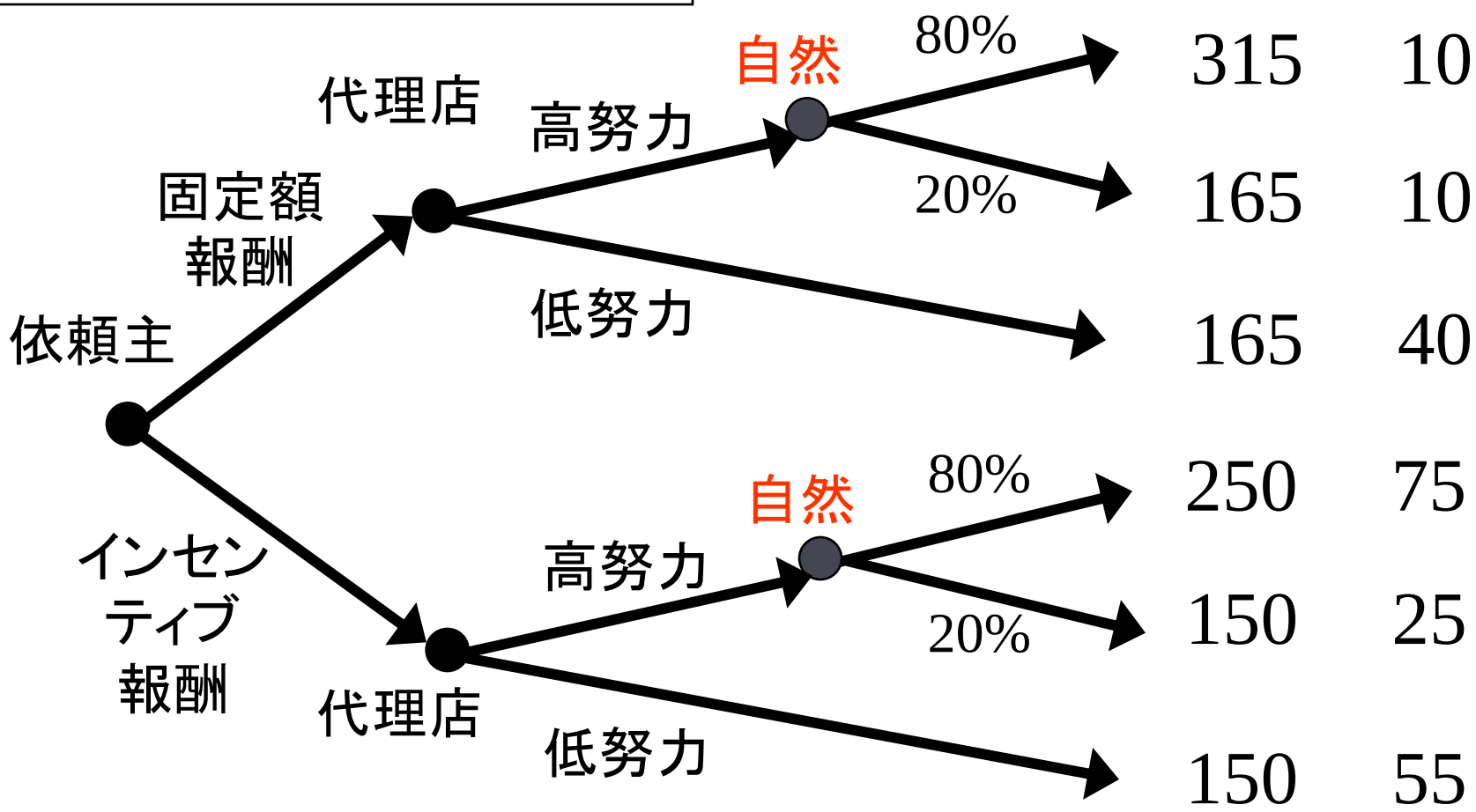
  - 依頼人の期待金額：代理店が高努力をした場合
    - 固定報酬契約

    0.8×(5,000×2,500×0.3ー60万円）
    ＋0.2 ×(５,000×1,500×0.3ー60万円）
    ＝0.8×315万円+0.2×１６５万円＝285万円
    - インセンティブ報酬契約

    0.8×(5,000×2,500×0.3ー ５,000×2,500×0.1）
    ＋0.2 ×(5,000×1,500×0.3ー ５,000×1,500×0.1）
    ＝0.8×250万円+0.2×１50万円＝230万円
  - 代理店が必ず高い努力をするならば，依頼人は固定額報酬の方が高い利益を得られる
  - 代理店の努力インセンティブを無視した議論

# ゲームの木

確率的な事象を「自然」という仮想的なプレイヤーの選択として組み込む

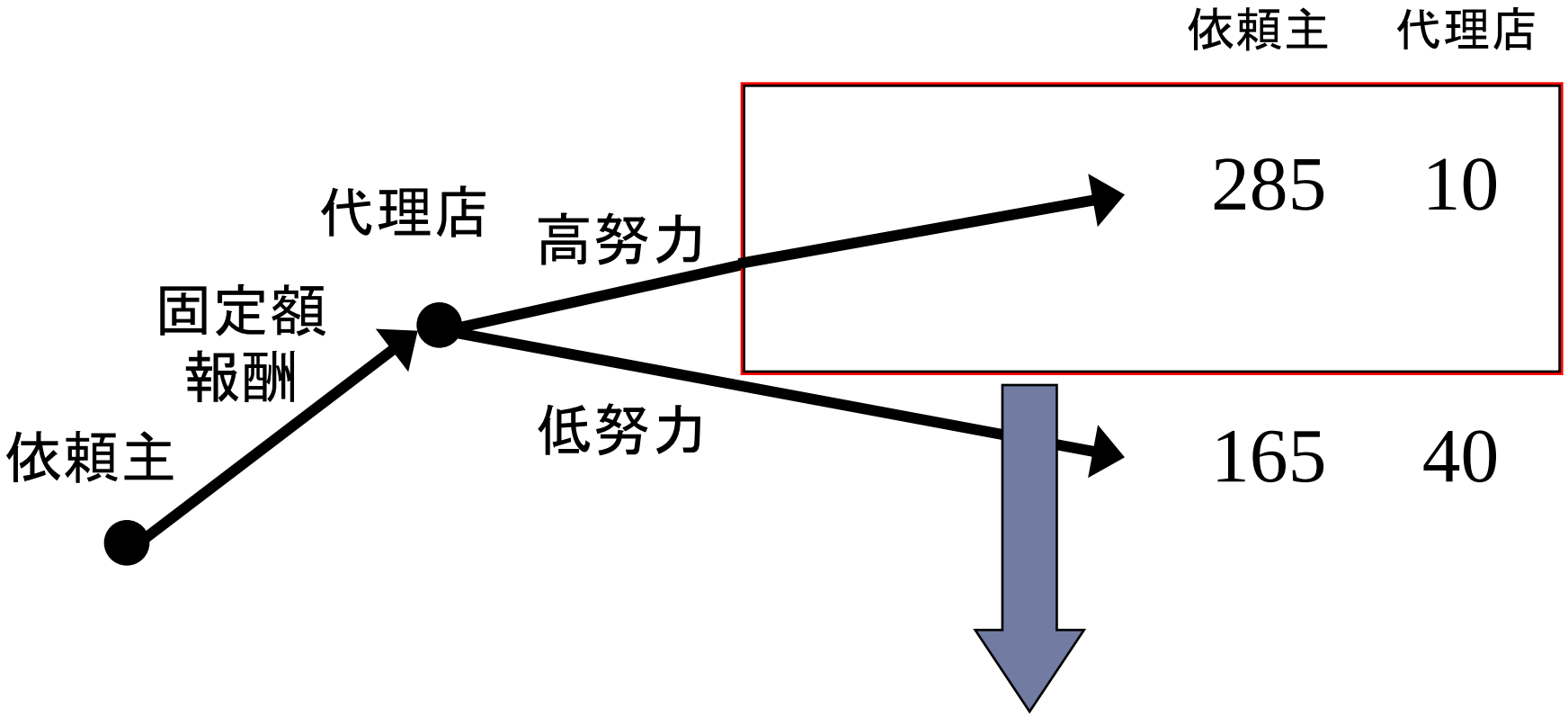



完全情報ゲーム（前のプレイヤーの行動はすべて分かる）

利得の単位 「万円」

バックワードインダクションで解ける！

# 自然の選択を期待利得に換算する

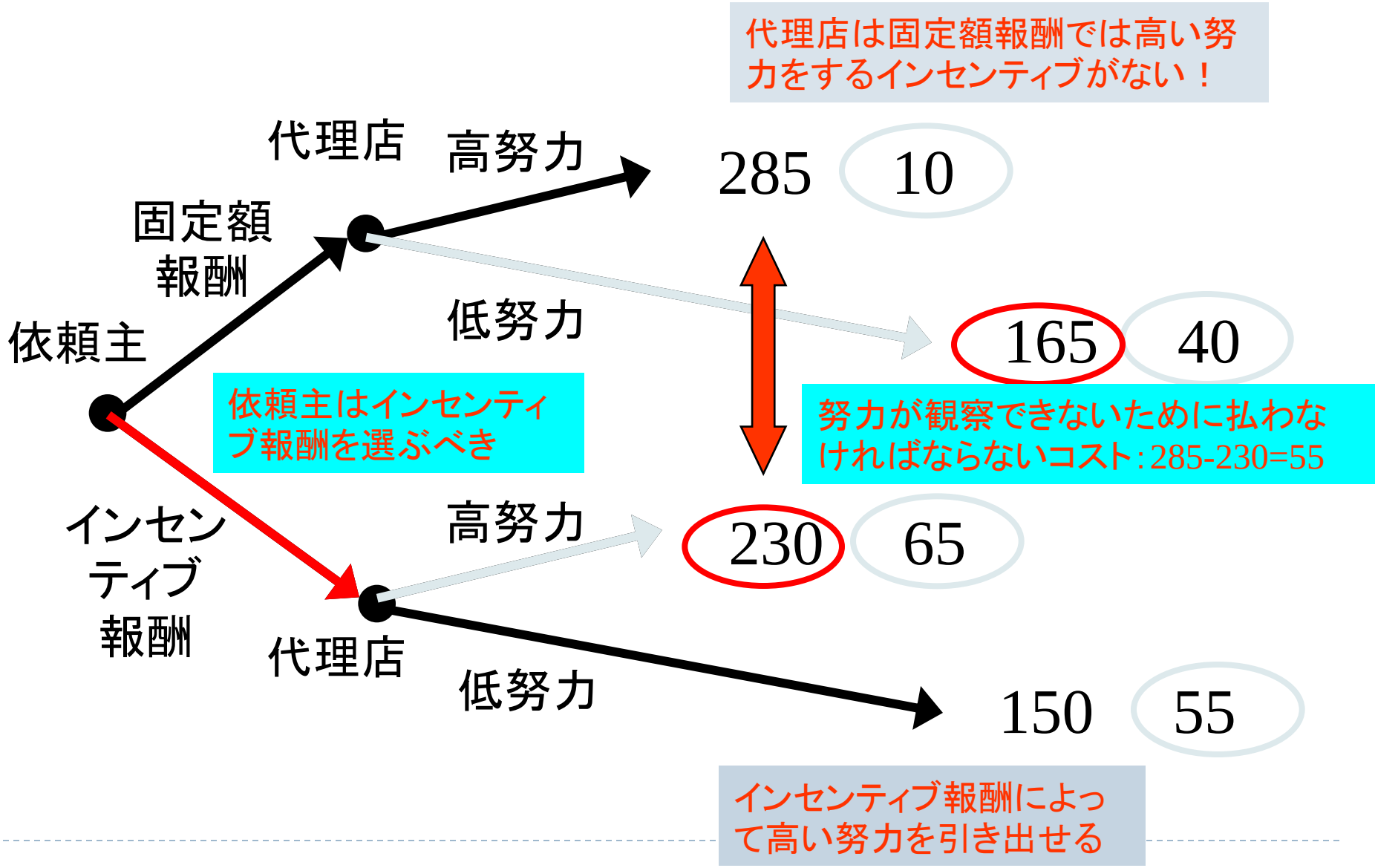



リスク中立的（期待利得＝期待金額）とすると

依頼主の期待利得：0.8×315+0.2×165=285

代理店の期待利得：0.8×10 + 0.2×10 =10

# バックワードインダクションで解く



# 情報のための費用

- 情報レントの例:「オークション」
  - 買い手1の評価額 1500円，買い手2の評価額2500円
  - もし買い手の評価額を観察できたら，買い手2に直接最後通牒交渉をする⇒2500円で売れる
  - しかし，買い手の評価額は観察できない
  - オークションをする
  - 売買価格は1500円⇒1000円の情報レント

- 固定額契約ではインセンティブを引き出せない
  - インセンティブ契約が必要⇒期待金額は230万円
- もし相手が努力するかどうかを観察できたなら？
  - 依頼主は固定額契約で285万円を得られる
  - 55万円は，情報を観察できないために代理人に支払わなければならない費用と考えられる⇒情報レント

# リスクとインセンティブ報酬

- ここまでは代理店も依頼主もリスク中立的と考えた
- もし代理店がリスク回避的ならどうか？
  - 「期待利得」に換算して考える
  - しかし「期待利得」はイメージが沸きにくい．．．
  - 先の「くじ」の例－0円が0，100万円が1，14万円が0.5と言われても
  - 期待利得を確実性同値額に換算し，リスクプレミアムで考える

- 新しく考察すべき点
  - 依頼主はリスク中立的なので同じ
  - 固定額契約では，代理店の報酬は固定している（不確実性がない）ので同じ
  - 代理店のインセンティブ報酬について，リスクプレミアムを考慮する

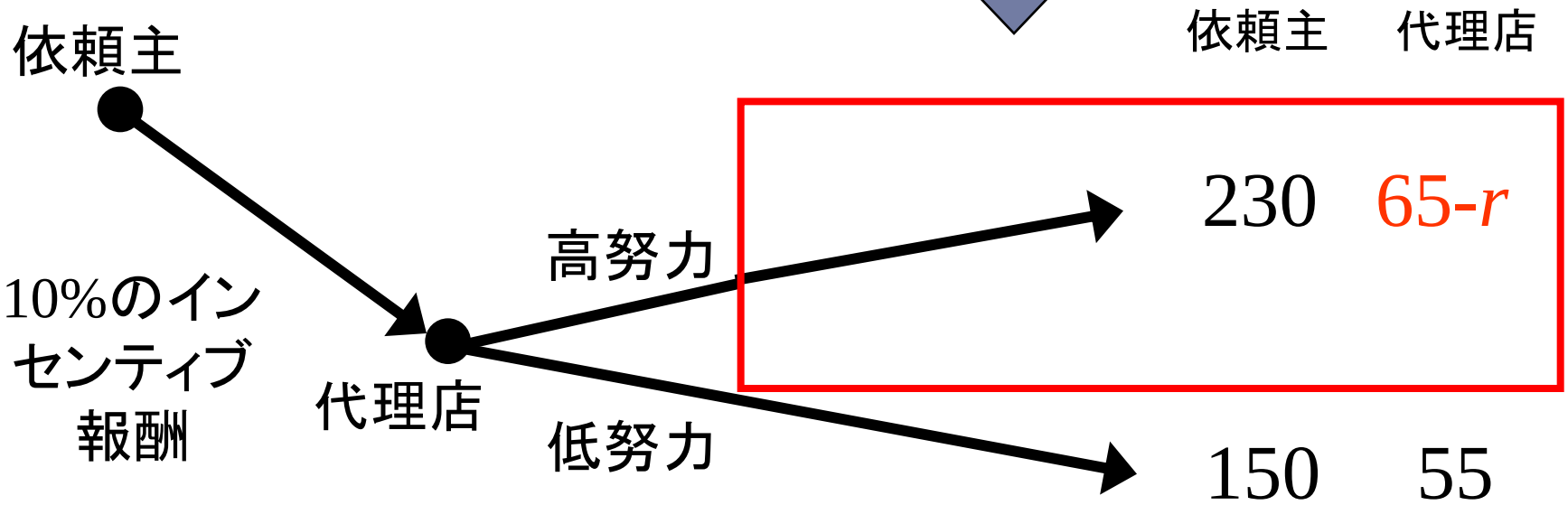
# リスク回避度が高いと努力を引き出せない

- 代理店の期待金額：0.8×75 + 0.2×25=65
- しかし代理店がリスク回避的ならば，確実性同値額はこれより低いはず

リスクプレミアムを$r$とすると

$r$>10 ならば，代理店は55万円を確実に得ることを好み，努力をしない

代理人のリスク回避度が高いと努力を引き出せない



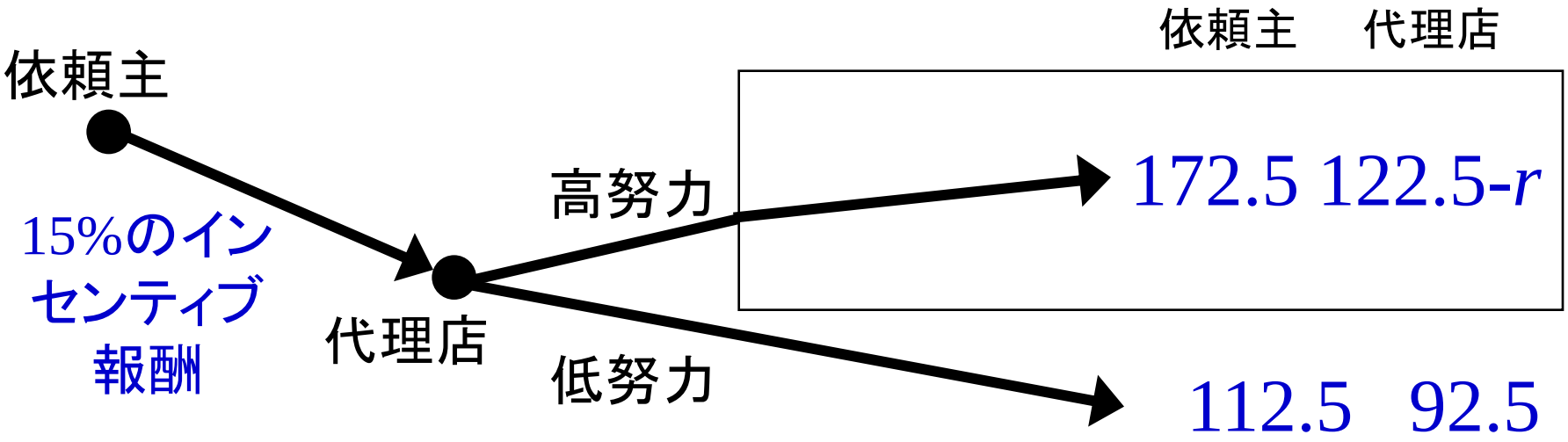
# 報酬額を増加させれば努力を引き出せる

- 代理店の期待金額：0.8×137.5 + 0.2×62.5=122.5
- リスクプレミアムをrとすると，r<30ならば代理店の努力を引き出せる

代理店がリスク中立的なときは依頼主の期待利得は230

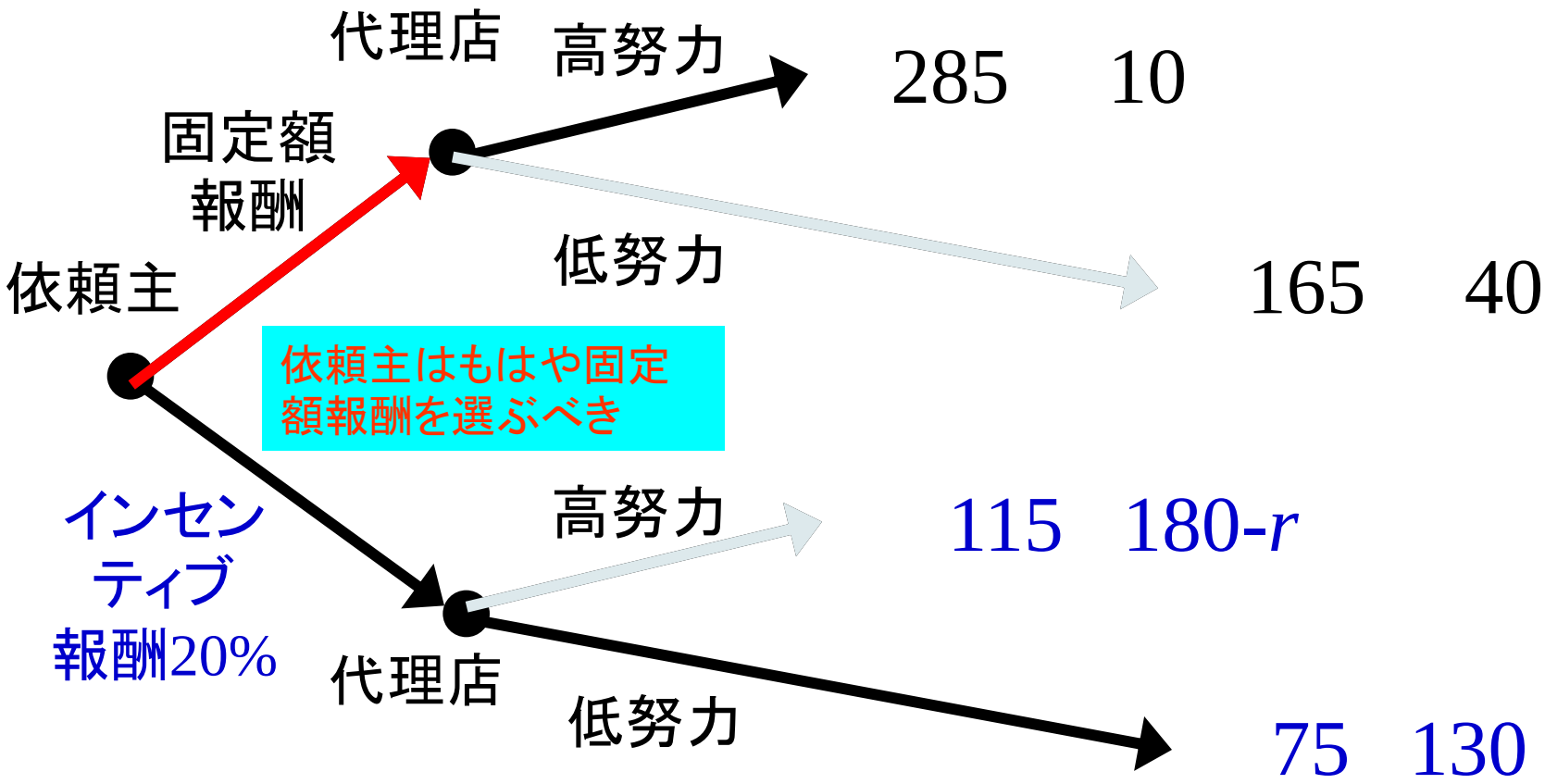
努力を引き出すために依頼主の利得は減少

努力を引き出すために依頼主が支払う情報レントは増加



# リスクプレミアムがさらに大きいと？

インセンティブ報酬を
20%に上げると？




確かに高いリスクプレミアム
(r<50)でも高努力を引き出せる

# インセンティブ報酬まとめ

- 代理人の行動が完全に観察できず，成果だけ観察可能のとき
  - 成果に応じた報酬＝インセンティブ報酬で代理人の努力を引き出せる
- しかし努力と成果が直結せず不確実性が存在する時
  - 依頼人は高努力を引き出すための報酬を上昇させなければならない
  - 情報レントの増加，代理人と依頼人のリスク分担
  - 代理人のリスクプレミアムが高い（リスク回避度が大きい，不確実性の度合いが大きい）ほど，依頼人が負担しなければならないコストは高くなる
  - リスクプレミアムが非常に高いと，固定額報酬の方が良く，インセンティブ報酬が働かない
    - 努力と成果が直結せず，不確実性が大きい場合はダメ

# １０．不完備情報の戦略形ゲーム

# 不確実性を扱うゲーム

- 完備情報ゲーム
  - 相手や自分の利得が完全に分かるゲーム
  - 相手の「行動」が分からなくてもよい－不完全情報
  - 戦略形ゲームはそもそも，相手の行動が分からない
  - 確率的な行動をとる場合もある－混合戦略
  - 完全情報と完備情報を区別する
- 不完備情報ゲーム
  - 相手や自分の利得が完全には分からない
  - 相手の好みが分からない
  - ある戦略をとったときの相手と自分の正確な利益やコストが算出できない

# 不完備情報ゲーム

- 相手（または，かつ）自分の利得が，不確実
  - 確率的に推測する
- 情報の非対称性
  - 自分と相手の持っている情報が同じであると，相手と自分の推測は同じ
  - 異なる場合に多くの問題ーー情報の非対称性
  - 売り手と買い手（新商品の性能，中古品品質）
  - 依頼人と代理人
  - 専門家と素人

# モデル34： I市コンビニ戦争PART7

- 2つのコンビニ：セレブとファミモ
- 同時にA駅かB駅かに出店する
- 両駅の利用客は，基本的には600人
- 別の場所に出店した場合⇒600人を獲得
- 同じ駅に出店した場合，900人の客を2つのコンビニが取り合う

---

- セレブには2つのタイプがある
  - タイプA：A駅で競争すると強い
  - タイプB：B駅で競争すると強い

- セレブがタイプAの場合
- A駅に両方が出店
  ⇒セレブ750人，ファミモ150人
- B駅に両方が出店
  ⇒セレブ・ファミモ共に450人

- セレブがタイプBの場合
- A駅に両方が出店
  ⇒セレブ・ファミモ共に450人
- B駅に両方が出店
  ⇒セレブ750人，ファミモ150人

# 2つのタイプに対する利得行列

セレブがタイプAの場合

| ファミモ / セレブ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| A駅 | ( 750,150) | ( 600,600) |
| B駅 | ( 600,600) | ( 450,450) |

セレブがタイプBの場合

| ファミモ / セレブ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| A駅 | ( 450,450) | ( 600,600) |
| B駅 | ( 600,600) | ( 750,150) |

- セレブは自分のタイプを分かっているとする.
- ファミモは，セレブを以下の確率で推測している:
  - タイプAである確率1/3
  - タイプBである確率2/3

# 不完備情報ゲームの戦略と解

- 異なるタイプのプレイヤーは，それぞれが行動を選ぶ

**セレブの戦略**

（A駅, A駅）　タイプAはA駅，タイプBもA駅を選ぶ

（A駅, B駅）　タイプAはA駅，タイプBはB駅を選ぶ

（B駅, A駅）　タイプAはB駅，タイプBはA駅を選ぶ

（B駅, B駅）　タイプAがB駅，タイプBもB駅を選ぶ

# 不完備情報の利得行列

セレブがタイプA

| セレブ＼ファミモ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| A駅 | (750,150) | (600,600) |
| B駅 | (600,600) | (450,450) |

セレブがタイプB

| セレブ＼ファミモ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| A駅 | (450,450) | (600,600) |
| B駅 | (600,600) | (750,150) |

| セレブ＼ファミモ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| (A駅, A駅) | ((750, 450), 350) | ((600, 600), 600) |
| (A駅, B駅) | ((750, 600), 450) | ((600, 750), 300) |
| (B駅, A駅) | ((600, 450), 500) | ((450, 600), 550) |
| (B駅, B駅) | ((600, 600), 600) | ((450, 750), 250) |

# 不完備情報の利得行列ー利得の計算方法

セレブがタイプA

| セレブ＼ファミモ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| A駅 | (750,150) | (600,600) |
| B駅 | (600,600) | (450,450) |

セレブがタイプB

| セレブ＼ファミモ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| A駅 | (450,450) | (600,600) |
| B駅 | (600,600) | (750,150) |

- セレブは自分のタイプを認識できる.
- ファミモは，セレブを確率で推測

タイプA：1/3

タイプB：2/3

| セレブ＼ファミモ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| （A駅，A駅） | ((750, 450), 350) | |
| （A駅，B駅） | | |
| （B駅，A駅） | | |
| （B駅，B駅） | | |

セレブの利得

(750,450)

左側がタイプAの利得

右側がタイプBの利得

ファミモの利得

セレブがタイプAなら150

セレブがタイプBなら450

期待値で計算

1/3×150+2/3×450=350

# 不完備情報の利得行列ーもう1つ

セレブがタイプA

| ファミモ / セレブ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| A駅 | (750,150) | (600,600) |
| B駅 | (600,600) | (450,450) |

セレブがタイプB

| ファミモ / セレブ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| A駅 | (750,150) | (600,600) |
| B駅 | (600,600) | (450,450) |

- セレブは自分のタイプを認識できる.
- ファミモは，セレブを確率で推測

タイプA：1/3

タイプB：2/3

| セレブ / ファミモ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| (A駅，A駅) | ((750, 450), 350) | |
| (A駅，B駅) | ((750, 600), 450) | |
| (B駅，A駅) | | |
| (B駅，B駅) | | |

セレブの利得(750,600)
左側がタイプA
右側がタイプB

ファミモの利得
セレブがタイプAなら150
セレブがタイプBなら600
期待値で計算

1/3×150+2/3×600=450

# 不完備情報の利得行列

セレブがタイプA

| セレブ＼ファミモ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| A駅 | (750,150) | (600,600) |
| B駅 | (600,600) | (450,450) |

セレブがタイプB

| セレブ＼ファミモ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| A駅 | (450,450) | (600,600) |
| B駅 | (600,600) | (750,150) |

| セレブ＼ファミモ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| (A駅, A駅) | ((750, 450), 350) | ((600, 600), 600) |
| (A駅, B駅) | ((750, 600), 450) | ((600, 750), 300) |
| (B駅, A駅) | ((600, 450), 500) | ((450, 600), 550) |
| (B駅, B駅) | ((600, 600), 600) | ((450, 750), 250) |

# 演習

- 以下の不完備情報ゲームの利得行列を作成せよ
- セレブに，タイプAとタイプBの2つのタイプがある
- セレブは自分のタイプを分かっているとする.
- ファミモは，セレブを以下の確率で推測している:
  - タイプAである確率1/4
  - タイプBである確率3/4

プレイヤー1がタイプA

| 1＼2 | L | R |
|---|---|---|
| U | ( 0, 8) | (16,16) |
| D | ( 8,16) | ( 8 , 0 ) |

プレイヤー1がタイプB

| 1＼2 | L | R |
|---|---|---|
| U | ( 4, 4) | ( 4 ,0) |
| D | (12, 12) | ( 0,16) |

# 解答ー不完備情報の利得行列

| 1 \ 2 | L | R |
|---|---|---|
| (U, U) | ((0, 4), 5) | |
| (U, D) | | |
| (D, U) | | |
| (D, D) | | |

# 解答ー不完備情報の利得行列

| 1 \ 2 | L | R |
|---|---|---|
| ( U , U ) | ( ( 0 , 4 ) , 5 ) | ( (16 , 4) , 4 ) |
| ( U , D ) | ( ( 0 ,12) , 11) | ( (16 , 0) , 16 ) |
| ( D , U ) | ( ( 8 , 4 ) , 7 ) | ( ( 8 , 4 ) , 0 ) |
| ( D , D ) | ( ( 8 ,12) , 13) | ( ( 8 , 0 ) , 12 ) |

# 不完備情報ゲームの解はベイズナッシュ均衡

- 完備情報の解はナッシュ均衡
  - すべてのプレイヤーが，最適反応戦略を選びあう
- ベイズナッシュ均衡
  - すべてのプレイヤーのすべてのタイプが，最適反応戦略を選びあう戦略の組

- ベイズナッシュ均衡の求め方
  - これまでと同じ
  - すべてのプレイヤーのすべてのタイプに対して，最適反応戦略を求めていけば良い

# ベイズナッシュ均衡を求める（1）

| セレブ＼ファミモ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| （A駅，A駅） | ((750, 450), 350) | ((600, 600), 600) |
| （A駅，B駅） | ((750, 600), 450) | ((600, 750), 300) |
| （B駅，A駅） | ((600, 450), 500) | ((450, 600), 550) |
| （B駅，B駅） | ((600, 600), 600) | ((450, 750), 250) |

タイプAのセレブの最適反応戦略を求める
（セレブの左側の利得（赤色）に注目）

ファミモがA駅を選択すると？　A駅が最適反応

ファミモがB駅を選択すると？　A駅が最適反応

# ベイズナッシュ均衡を求める(2)

| セレブ＼ファミモ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| (A駅, A駅) | ((750, 450), 350) | ((600, 600), 600) |
| (A駅, B駅) | ((750, 600), 450) | ((600, 750), 300) |
| (B駅, A駅) | ((600, 450), 500) | ((450, 600), 550) |
| (B駅, B駅) | ((600, 600), 600) | ((450, 750), 250) |

タイプBのセレブの最適反応戦略を求める
(セレブの左側の利得(青色)に注目)

ファミモがA駅を選択すると？　B駅が最適反応

ファミモがB駅を選択すると？　B駅が最適反応

# ベイズナッシュ均衡を求める(3)

| セレブ＼ファミモ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| (A駅, A駅) | ((750, 450), 350) | ((600, 600), 600) |
| (A駅, B駅) | ((750, 600), 450) | ((600, 750), 300) |
| (B駅, A駅) | ((600, 450), 500) | ((450, 600), 550) |
| (B駅, B駅) | ((600, 600), 600) | ((450, 750), 250) |

ファミモの最適反応戦略を求める
(ファミモの利得(黒色)に注目)

セレブが(A駅, A駅)を選択すると？
(すなわち，タイプAがA駅，タイプBもA駅を選択すると？)

B駅が最適反応

# ベイズナッシュ均衡を求める(4)

| セレブ＼ファミモ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| (A駅, A駅) | ((750, 450), 350) | ((600, 600), 600) |
| (A駅, B駅) | ((750, 600), 450) | ((600, 750), 300) |
| (B駅, A駅) | ((600, 450), 500) | ((450, 600), 550) |
| (B駅, B駅) | ((600, 600), 600) | ((450, 750), 250) |

すべてのプレイヤーの，すべてのタイプが最適反応戦略を選んでいる戦略の組がベイズナッシュ均衡

セレブはタイプAがA駅，タイプBがB駅を選ぶ．
ファミモはA駅を選ぶ

セレブは自分の品揃えが得意な方を選んでいる！

# 結果の分析と解釈

セレブがタイプA

| セレブ＼ファミモ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| A駅 | (750,150) | (600,600) |
| B駅 | (600,600) | (450,450) |

セレブがタイプB

| セレブ＼ファミモ | A駅 | B駅 |
|---|---|---|
| A駅 | (450,450) | (600,600) |
| B駅 | (600,600) | (750,150) |

- セレブは自分のタイプを認識できる.
- ファミモは，セレブを確率で推測

タイプA：1/3

タイプB：2/3

ベイズナッシュ均衡

セレブはタイプAがA駅，タイプBがB駅を選ぶ.
ファミモは，A駅を選ぶ

よく見ると？
タイプAのセレブは「A駅」が支配戦略
タイプBのセレブは「B駅」が支配戦略

どのプレイヤーのどのタイプも，支配戦略があるときは，ベイズナッシュ均衡ではそれを選ぶ

# 演習ーベイズナッシュ均衡を求める

前回演習の利得行列におけるベイズナッシュ均衡を求めてみよ.

- 今度はどのプレイヤーのどのタイプにも支配戦略はない.
- 結果はどうなるだろうか？

| 1 \ 2 | L | R |
|---|---|---|
| ( U , U ) | ( ( 0 , 4 ) , 5 ) | ( (16, 4) , 4 ) |
| ( U , D ) | ( ( 0 ,12) , 11) | ( (16, 0) , 16 ) |
| ( D , U ) | ( ( 8 , 4 ) , 7 ) | ( ( 8 , 4) , 0 ) |
| ( D , D ) | ( ( 8 ,12) , 13) | ( ( 8 , 0) , 12 ) |

ちなみに元のゲームは？

- プレイヤー1は自分のタイプが分かる.
- ファミモは，セレブを確率で推測

タイプA : 1/4

タイプB : 3/4

プレイヤー1がタイプA

| 1 \ 2 | L | R |
|---|---|---|
| U | (0, 8) | (16,16) |
| D | (8,16) | (8 , 0 ) |

プレイヤー1がタイプB

| 1 \ 2 | L | R |
|---|---|---|
| U | (4, 4) | (4 ,0) |
| D | (12, 12) | (0,16) |

# 演習ーベイズナッシュ均衡を求める

ベイズナッシュ均衡
★プレイヤー1
　タイプA　U
　タイプB　D
★プレイヤー2　L
を選択する.

| 1＼2 | L | R |
|---|---|---|
| ( U , U ) | ( ( 0 , 4 ) , 5 ) | ( (16, 4) , 4 ) |
| ( U , D ) | ( ( 0 ,12) , 11) | ( (16, 0) , 16 ) |
| ( D , U ) | ( ( 8 , 4 ) , 7 ) | ( ( 8 , 4) , 0 ) |
| ( D , D ) | ( ( 8 ,12) , 13) | ( ( 8 , 0) , 12 ) |

元のゲーム

- プレイヤー1は自分のタイプが分かる.
- ファミモは，セレブを確率で推測

タイプA：1/4
タイプB：3/4

プレイヤー1がタイプA

| 1＼2 | L | R |
|---|---|---|
| U | (0, 8) | (16,16) |
| D | (8,16) | (8 , 0 ) |

プレイヤー1がタイプB

| 1＼2 | L | R |
|---|---|---|
| U | (4, 4) | (4 ,0) |
| D | (12, 12) | (0,16) |

# 不完備情報ゲームにおけるタイプとは？

- 不完備情報における「タイプ」とはプレイヤーの属性ではなく，持っている情報の違いによって生じる.
- 異なる情報を持っているプレイヤーが，異なる「タイプ」になる.
- プレイヤーの属性が異なっていても，情報を持っていなければ，同じタイプと考える.

- 先ほどのゲーム：A駅に強いセレブとB駅に強いセレブ
- セレブは，自分の属性を分かっていた⇒タイプA,タイプB
- もし，セレブは自分の属性が分からず，ファミモがそれを知っていたらどうなるのだろうか？
- セレブは，自分の属性を以下の確率で推測している：
  - Aに強い確率1/4　　Bに強い確率3/4

# 10.2　不完備情報の複占競争

## 不完備情報ゲームの応用

# モデル36：輸入販売店の複占競争（不完備情報）

- 企業Aと企業Bの2企業が同質財の競争をしている
- 各企業は，同時に販売量を決定（クールノー競争）
- 企業Aは限界費用に関して2種類のタイプがある
  - タイプH（高費用タイプ） 30
  - タイプL（低費用タイプ） 18
- 企業Bの限界費用は30とする.
- 企業Aは自分のタイプが分かっている.
- 一方，企業Bは企業Aのタイプを知らず，タイプHである確率を1/4，タイプLである確率を3/4で推測している.
- 逆需要関数：両企業の販売量の合計を $x$，販売価格を$p$とすると$p=120-x$ であるとする.
- 利潤を最大にするために，企業Aの各タイプと企業Bは，どれだけの商品を販売するか

# 不完備情報ゲームのクールノー競争

- 企業Aは自分のタイプが分かっている
  - 各タイプごとに，企業Bに対して利潤を最大化
  - 各タイプごとに，企業Bに対する最適反応戦略を選ぶ
- 企業Bは，企業Aのタイプを確率で推測
  - 自分の生産量に対して，企業AのタイプHと企業BのタイプLとの利潤を期待値で計算
- ベイズナッシュ均衡
  - すべてのプレイヤーのすべてのタイプが，最適反応戦略を選びあう戦略の組

# 企業$A$　タイプ$H$　の最適反応戦略

- 各企業は，各タイプ毎に利潤を最大にする
- まず企業Aのタイプ$H$の利潤の最大化を考える.
- 企業Aタイプ$H$の販売量を$x_{AH}$, 企業Bを$x_B$とする.

- 企業Aタイプ$H$の利潤を$\pi_{AH}$とすると，（限界費用は30）

$$\pi_{AH} = \{120 - (x_{AH} + x_B)\}\, x_{AH} - 30x_{AH}$$

$$= -x_{AH}^2 - x_{AH}\, x_B + 90x_{AH}$$

- 企業Aタイプ$H$は自分と相手である企業Bとの競争（利潤は $x_{AH}$ と $x_B$ の関数）

- 企業Aタイプ$H$の最適反応戦略

⇒ ($\pi_{AH}$ を$x_A$ で微分) =0

⇒ $-2x_{AH} - x_B + 90 = 0$

⇒

$$x_{AH} = -\frac{1}{2}x_B + 45$$

企業Aタイプ$H$の
最適反応戦略

# 企業$A$　タイプ$L$　の最適反応戦略

- 次に企業Aのタイプ$L$の利潤の最大化を考える.
- 企業Aタイプ$L$の販売量を$x_{AL}$, 企業Bを$x_B$とする.

- 企業Aタイプ$L$の利潤を$\pi_{AL}$とすると,　(限界費用は18)

$$\pi_{AL} = \{120 - (x_{AL} + x_B)\}\, x_{AL} - 18x_{AL}$$

$$= -x_{AL}^2 - x_{AL}\, x_B + 102x_{AL}$$

- 企業Aタイプ$H$は自分と相手である企業Bとの競争（利潤は $x_{AL}$ と $x_B$ の関数）

- 企業Aタイプ$L$の最適反応戦略

⇒ ($\pi_{AL}$ を$x_{AL}$ で微分) =0

⇒ $-2x_{AL} - x_B + 102 = 0$

⇒

$$x_{AL} = -\frac{1}{2}x_B + 51$$

企業Aタイプ$L$の
最適反応戦略

# 企業$B$の最適反応戦略

- 最後に企業Bの利潤の最大化を考える.

- 企業Bの利潤を$\pi_B$とする.
- 限界費用は30
- 企業Bの販売量は$x_B$

もし企業Aがタイプ$H$の場合，利潤は

$$\{120-(x_{AH}+x_B)\}\,x_B-30x_B$$

もし企業Aがタイプ$L$の場合利潤は

$$\{120-(x_{AL}+x_B)\}\,x_B-30x_B$$

- 企業Bの利潤$\pi_B$ ： 期待値として計算

$$\pi_B=\frac{1}{4}\times[\{120-(x_{AH}+x_B)\}\,x_B-30x_B]+\frac{3}{4}\times[\{120-(x_{AL}+x_B)\}\,x_B-30x_B]$$

$$=-x_B^2-\left(\frac{1}{4}x_{AH}+\frac{3}{4}x_{AL}\right)x_B+90x_B$$

- 企業Bの最適反応戦略 ⇒ ($\pi_B$ を$x_B$ で微分) =0

⇒ $$-2x_B-\left(\frac{1}{4}x_{AH}+\frac{3}{4}x_{AL}\right)+90=0$$ ⇒ $$x_B=-\frac{1}{8}x_{AH}-\frac{3}{8}x_{AL}+45$$

# ベイズナッシュ均衡

■ 最適反応戦略

$$\begin{cases} x_{AH} = -\frac{1}{2}x_B + 45 \\ x_{AL} = -\frac{1}{2}x_B + 51 \\ x_B = -\frac{1}{8}x_{AH} - \frac{3}{8}x_{AL} + 45 \end{cases}$$

これらを連立方程式として解くと

$$x_{AH} = 31.5$$
$$x_{AL} = 37.5$$
$$x_B = 27$$

■ 企業Aタイプ H の均衡での利潤

$$\pi_{AH} = \{120 - (x_{AH} + x_B)\}\, x_{AH} - 30x_{AH} = 992.5$$

(完備情報では900)

■ 企業Aタイプ L の均衡での利潤

$$\pi_{AL} = \{120 - (x_{AL} + x_B)\}\, x_{AL} - 18x_{AL} = 1406.25$$

(完備情報では1444)

■ 企業Bの利潤

$$\pi_B = -x_B^2 - \left(\frac{1}{4}x_{AH} + \frac{3}{4}x_{AL}\right) x_B - 90x_B$$

# 演習:

- 企業Aと企業Bの2企業が同質財の競争をしている
- 各企業は，同時に販売量を決定（クールノー競争）
- 両企業の限界費用は同じで，2種類の場合がある
  - 高費用のとき　30　　低費用のとき　18
- 企業Aは，限界費用（自分も相手も）が分かっている.
- 高費用と分かっている企業をタイプH,低費用と分かっている企業AをタイプLとする.
- 一方，企業Bは限界費用（自分も相手も）が分からず，タイプHである確率を1/4，タイプLである確率を3/4で推測している.
- 逆需要関数：両企業の販売量の合計を $x$，販売価格を$p$とすると$p=120-x$　であるとする.
- 利潤を最大にするために，企業Aの各タイプと企業Bは，どれだけの商品を販売するか.

# 演習解答(1)

- 企業Aに関しては分析は同じ.
- 企業Aタイプ H の販売量を$x_{AH}$, タイプ L の販売量を$x_{AL}$, 企業Bを$x_B$とする.

---

- 企業Aタイプ H の利潤を$\pi_{AH}$とする(限界費用30)

$$\pi_{AH} = \{120 - (x_{AH} + x_B)\}\, x_{AH} - 30x_{AH} = -x_{AH}^2 - x_{AH}\, x_B + 90x_{AH}$$

- 企業Aタイプ H の最適反応戦略 ⇒ ($\pi_{AH}$ を$x_A$ で微分) =0

⇒ $-2x_{AH} - x_B + 90 = 0$ ⇒ $x_{AH} = -\frac{1}{2}x_B + 45$

---

- 同様に企業Bタイプ L の最適反応戦略を求めると

$$x_{AL} = -\frac{1}{2}x_B + 51$$

# 演習解答(2):企業$B$の最適反応戦略

- 企業Bの利潤: 今回はAのタイプによって限界費用が異なることに注意.

- 企業Bの利潤を$\pi_B$とする.
- 限界費用は30
- 企業Bの販売量は$x_B$

もし企業Aがタイプ$H$の場合, 利潤は

$$\{120-(x_{AH}+x_B)\}\,x_B-30x_B$$

もし企業Aがタイプ$L$の場合利潤は

$$\{120-(x_{AL}+x_B)\}\,x_B-18\,x_B$$

- 企業Bの利潤$\pi_B$ : 期待値として計算

$$\pi_B=\frac{1}{4}\times[\{120-(x_{AH}+x_B)\}\,x_B-30x_B]+\frac{3}{4}\times[\{120-(x_{AL}+x_B)\}\,x_B-18x_B]$$

$$=-x_B^2-\left(\frac{1}{4}x_{AH}+\frac{3}{4}x_{AL}\right)x_B+99x_B$$

- 企業Bの最適反応戦略 ⇒ ($\pi_B$ を$x_B$ で微分) =0

⇒ $$-2x_B-\left(\frac{1}{4}x_{AH}+\frac{3}{4}x_{AL}\right)+99=0$$ ⇒ $$x_B=-\frac{1}{8}x_{AH}-\frac{3}{8}x_{AL}+\frac{99}{2}$$

# 演習解答(3):ベイズナッシュ均衡

## ■ 最適反応戦略

$$\begin{cases} x_{AH} = -\frac{1}{2}x_B + 45 \\ x_{AL} = -\frac{1}{2}x_B + 51 \\ x_B = -\frac{1}{8}x_{AH} - \frac{3}{8}x_{AL} + \frac{99}{2} \end{cases}$$

これらを連立方程式
として解くと

$$x_{AH} = 28.5$$
$$x_{AL} = 34.5$$
$$x_B = 33$$