技術者のためのゲーム理論の基礎(1)

首都大学東京　経営学専攻　渡辺隆裕

はじめに

ゲーム理論とコンピュータは，もともと父親が同じ

- ゲーム理論の始まり
  - 1928　J. von Neumann ミニマックス定理
  - 1944 J. von Neumann and O. Morgenstern「ゲームの理論と経済行動」

- J. von Neumann
  - 数学者(1903-1957)
  - コンピュータの父として知られる（プログラム内蔵方式，ノイマン式コンピュータ）

フォン・ノイマンはどっちだ？

「ちえの和webページ:コンピュータ偉人伝」より

ちえの和webページ
コンピュータ偉人伝

読者によるリクエスト　著者紹介　サイトマップ　コ

Google 検索 Web www.ijinden.com

コンピュータの基礎を築いた人

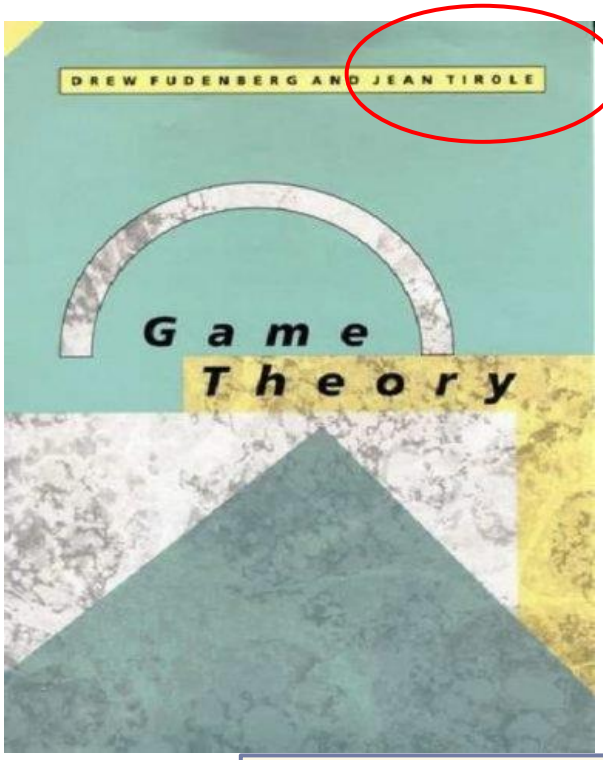
アラン・チューリング	チューリングマシンの考案者	1999/08/31 掲載
チャールズ・バベッジ	コンピュータの父:解析エンジンの設計者	2000/02/21 掲載
フォン・ノイマン	ノイマン型コンピュータの発案者	1999/08/24 掲載
クロード・シャノン	情報理論の元祖:ブール代数をコンピュータに入れた人	2000/03/20 掲載
ジョン・アタナソフ	米国特許における最初の電子式計算機の発明者	2000/05/01 掲載
ジョン・プレスパー・エッカート	最初の汎用コンピュータENIACの共同制作者	1998/10/05 掲載
ジョン・モークリー	最初の汎用コンピュータENIACの発案者	1998/10/05 掲載
ゴットフリート・ライプニッツ	乗除算ができる歯車式計算機の発明者(読者リクエスト)	

経済学とゲーム理論

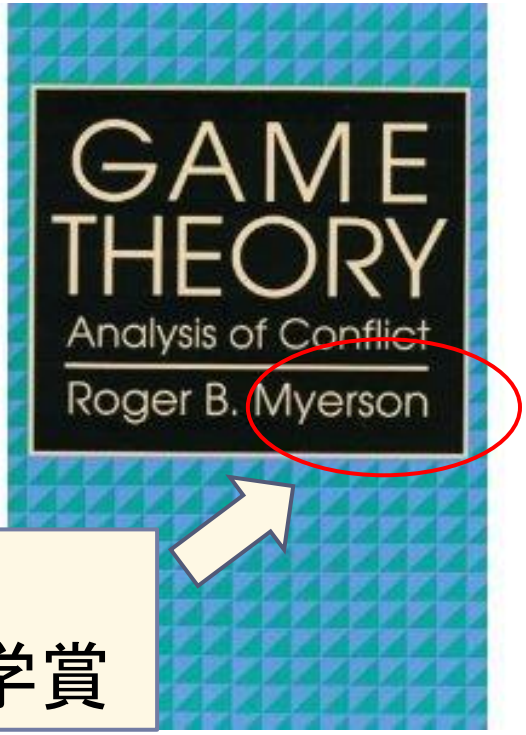
- ノーベル経済学賞を通して見るゲーム理論
  - 1994 Nash，Selten，Harsanyi ゲーム理論
  - 2005 Aumann，Schelling ゲーム理論

- しかし近年，受賞した研究はゲーム理論が中心的役割を果たしている.
  - 2014 Tirole　　産業組織論
  - 2012 Roth, Shapley 市場設計の実践
  - 2010 Diamond サーチ理論
  - 2009 Ostrom　共有資源の分析
  - 2008 Krugman 国際経済学
  - 2007 Hurwicz, Maskin, Myerson　メカニズムデザイン

ノーベル経済学賞受賞者とゲーム理論のテキスト

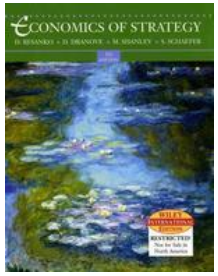


Jean Tirole
2014年　ノーベル経済学賞



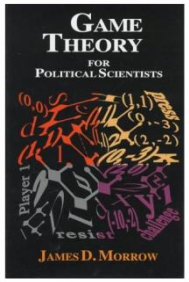
Roger Myerson
2007年　ノーベル経済学賞

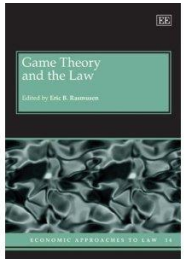
代表的な本で見る「経済学以外のゲーム理論」



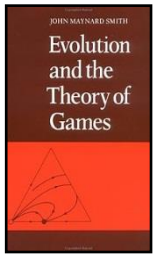
- 経営学： Economics of Strategy (他）
  - 戦略の経済学（経営戦略論），Northwestern Univ. (Kellogg)などのMBAテキスト，D. Besankoほか(2009)

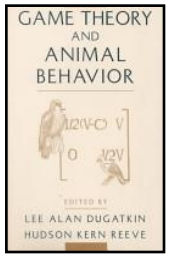
- 政治学： Game Theory for Political Scientists
  - 政治学者のためのゲーム理論
  - J. Morrow (1994), Princeton Univ. Press





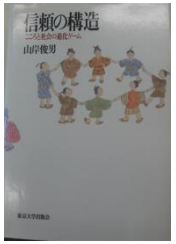
法学：
ゲーム理論と法





- 生物学: Evolution and Theory of Games, Game Theory and Animal Behavior
  - 進化とゲーム理論, J. Maynard Smith (1982)
  - ゲーム理論と動物行動 Dugatkinほか(2000)

本で見る「経済学以外のゲーム理論」

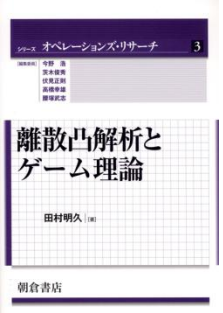


- 社会心理学
  - 「信頼の構造」（山岸俊男）東大出版会

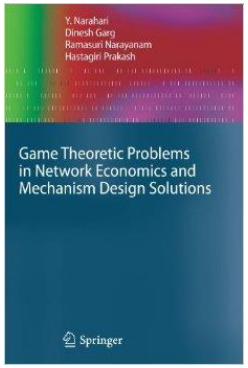
- 国際法，国際関係論
  - 「ゲーム理論で読み解く国際法」（森大輔）勁草書房
  - 「国際紛争と協調のゲーム」（鈴木基史，岡田章）有斐閣

- 会計学
  - 「ゲーム理論で考える企業会計」（田村威文）中央経済社

- OR・応用数学
  - 「離散凸解析とゲーム理論」（田村明久）朝倉書店

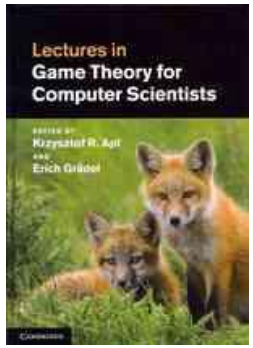


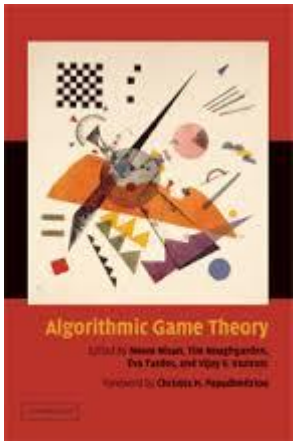
近年の計算機科学におけるゲーム理論



Game Theoretic Problems in Network Economics and Mechanism Design Solutions, Y. Narahari et.al., 2009

Lectures in Game Theory for Computer Scientists, Krzysztof R. Apt , Erich Graedel (eds.), 2011





Algorithmic Game Theory
Noam Nisan et.al. eds., 2007

なぜ，いま，技術者のための，ゲーム理論？

- ゲーム理論に対する誤解
  - 人間の行動を，的確に予測してくれるのではないか？
  - ゲーム理論によって，他者に「勝てる」のではないか？

それは無理（実験経済学が発展すれば？）

- 社会科学での用いられ方
  - 社会を論理的・整合的に描写して，理解する．
  - ゲーム理論と言う共通の土台で，さまざまな現象を説明する

エンジニアにはあまり興味が無い．．．かも

なぜ，いま，技術者のための，ゲーム理論

1. プレイヤーがコンピュータ
   - 人間の行動ではなく，プログラムやアルゴリズムに従って動作するコンピュータ
2. 「メカニズムデザイン」という考え方
   - 独立した個人の行動を考慮したシステム＝メカニズムの設計
   - 個人の最適行動を織り込んだ，システム全体の最適
     - ネットワークプロトコルの設計
     - オークション，売買システム，評判・評価システム
     - マッチング
3. エンジニアから見た経営戦略の理解
   - 経営戦略論，マーケティング
   - 特許戦略，研究開発戦略，立地と製品差別化etc…

本セミナーのプログラム

- 10:00－10:10　開会挨拶－セミナーの概要
- 10:10－12:00　初歩から学ぶゲーム理論
  - 渡辺隆裕（首都大学東京 経営学専攻）
- 13:00–14:15　ビジネスとゲーム理論
  - 松林伸生（慶應義塾大学 理工学部管理工学科）
- 14:25–15:25　マッチングとその応用
  - 岩崎 敦（電気通信大学大学院 情報システム学研究科）
- 15:40–16:40　オークションのデザイン
  - 福田恵美子（防衛大学校 情報工学科）
- 16:40–17:00　まとめ
  - 渡辺隆裕（首都大学東京 経営学専攻）

1. 戦略形ゲームを作る

ゲーム理論の分類

- ゲーム理論は，様々な理論からできている．
  - 1年間講義しても終わらない．．．
- もっとも大まかな分類

非協力ゲーム

プレイヤーが行動を選ぶと利得が決まる
プレイヤーが選ぶ行動を分析

戦略形ゲーム

プレイヤーが同時に行動を選択

展開形ゲーム

プレイヤーが，さまざまなタイミングや情報のもとで行動を選択

協力ゲーム

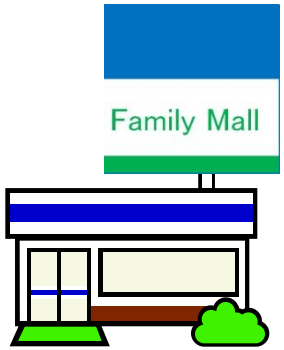
提携ごとに利得が与えられている
利益の分配や提携の形成を分析

戦略形ゲームを作る

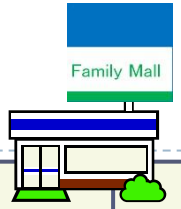
- 戦略形ゲームとは？
  - 各プレイヤーが，同時に「戦略」を選ぶ
  - 同時とは，時間差がないことではなく，相手の行動が分からずに，自分の行動を選ぶこと
- 戦略形ゲームは プレイヤー，戦略，利得の3要素で構成される

戦略形ゲームの例1： I市コンビニ立地競争

- 2つのコンビニ，セレブとファミモ
- どちらの駅に出店するか？
  - A駅（Akabadai)の店舗利用客　600人
  - B駅（Black River)の店舗利用客　300人
- 違う場所に出店すれば客を独占
- 同じ場所に出店した場合，ファミモが人気
  - ファミモは，セレブの2倍の客数を獲得できる
  - A駅に出店：セレブ200人，ファミモ400人
  - B駅に出店：セレブ100人，ファミモ200人
- 客数を利得と考える
- 各コンビニは，同時に（相手の行動を知らずに）自分の行動を決めるものとする



２人のゲームは利得行列で表す



セレブ＼ファミモ	A駅		B駅	
A駅	200	400	600	300
B駅	300	600	100	200

- ２人ゲームの利得は，利得行列と呼ばれる表で表現される

２．戦略形ゲームを解く（１）

戦略の支配による考え方

セレブは，A駅とB駅のどちらに立地する？

セレブ＼ファミモ	A駅		B駅	
A駅	200	400	600	300
B駅	300	600	100	200

- 大きい利得を狙うなら ⇒A駅（600を狙う）
- 低い利得を避けるなら⇒A駅（100を避ける）

セレブの視点：

セレブ＼ファミモ	A駅		B駅	
A駅	200		600	
B駅	300		100	

- ファミモがA駅を選ぶと⇒セレブはB駅の方が利得が高い
- ファミモがB駅を選ぶと⇒セレブはA駅の方が利得が高い
- セレブの良い選択は，ファミモの選択に依存する**（ゲーム的状況）**

ゲームは最適化ではない

⇒セレブにとって単に**最適戦略**と呼べる戦略は存在しない

ファミモの視点で考える

セレブ＼ファミモ	A駅		B駅	
A駅	celeb	Family Mall	celeb	Family Mall
		400		300
B駅	celeb	Family Mall	celeb	Family Mall
		600		200

- セレブがA駅を選ぶと⇒ファミモはB駅よりA駅の方が利得が高い
- セレブがB駅を選ぶと⇒ファミモはB駅よりA駅の方が利得が高い
- セレブはA駅を選ぶことが良い

ファミモに限れば，最適戦略と呼べそうな戦略がある

ゲームを解く考え方1：戦略の支配

- 自分の2つの戦略に優劣がつくかを検討する
  - 自分の戦略AとBを比べたとき，
  - 他のプレイヤーがどんな戦略を選んでもAよりBの方が利得が高いならば
  - 戦略Aは戦略Bを支配すると言う
- 戦略の支配によってゲームを解く
  - プレイヤーは支配された戦略は選ばない（もっと良い戦略があるから）
  - プレイヤーは，すべての戦略を支配する戦略があれば，それを選ぶ．その戦略を支配戦略と呼ぶ．

戦略の支配を考える

セレブ＼ファミモ	A駅		B駅	
A駅	200	400	600	300
B駅	300	600	100	200

- セレブの戦略には，支配関係はない

- ファミモは，「A駅」が「B駅」を支配する
- 「A駅」はファミモの支配戦略
- ファミモはA駅を選択

- セレブは「ファミモがA駅を選択する」と推論し，B駅を選択する

ゲームを解く考え方1：戦略の支配

1. プレイヤーは支配された戦略は選ばない（どんなときも，それより良い戦略がある！）
2. プレイヤーは，すべての戦略を支配する戦略があれば，それを選ぶ．その戦略を支配戦略と呼ぶ．
3. プレイヤーが2人のゲームでは：
   a. 両方のプレイヤーに支配戦略があれば，両方のプレイヤーともに支配戦略を選ぶ
   b. 一方のプレイヤーに支配戦略があれば，そのプレイヤーは支配戦略を選ぶ．もう一方のプレイヤーはそれを推論して，相手が支配戦略を選んだときに一番高い利得の戦略を選ぶ

- aはゲーム的状況ではなく，プレイヤーは1人で意思決定できる
- aに比べてbが成立するためには，より多くの仮定を必要とする
- 支配戦略はゲーム理論の中でも，もっとも現実問題に適用可能性が高いコンセプトといえる（もし，存在すれば）

囚人のジレンマ

- 支配戦略だけ考えても，興味深い現象はある
- 数学者タッカー(A.W.Tucker)が作り出した以下のストーリー
- 2人の囚人AとB，重罪を犯している
- 別件で逮捕，重罪の自白を迫られるが黙秘
- 司法取引:「おまえだけが自白すれば無罪だぞ」

A＼B	黙秘	自白
黙秘	(懲役1年,懲役1年)	(懲役１０年,無罪)
自白	(無罪,懲役１０年)	(懲役５年,懲役５年)

囚人のジレンマ

女＼男	協力する		協力しない	
協力する				
	2	2	−1	3
協力しない				
	3	−1	0	0

- 囚人のジレンマ
- あなたならどうする？

囚人のジレンマの特徴

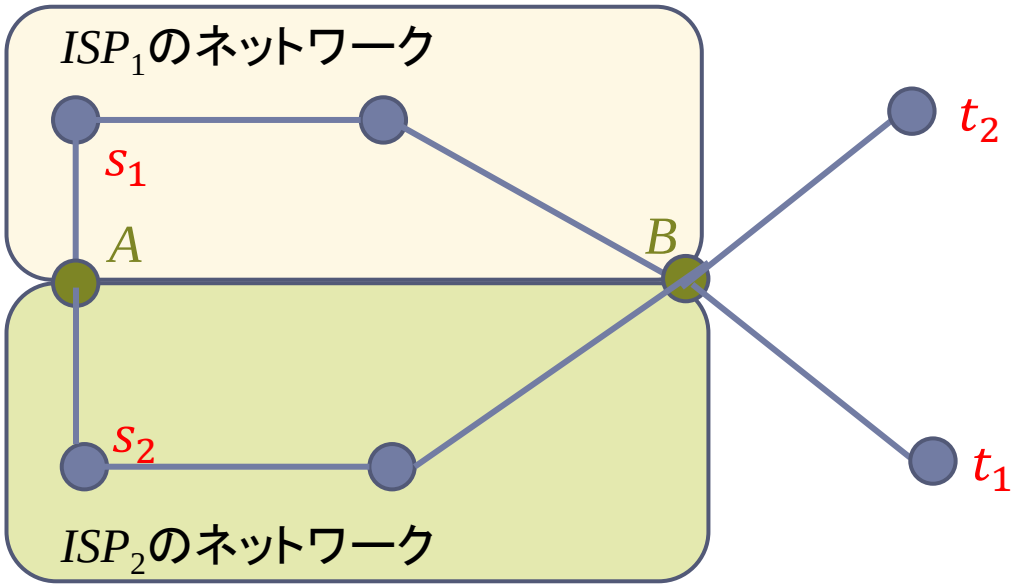
- 次の3つの条件が成立
  1. 相手が「協力」するなら，自分は「協力しない」方が良い．
  2. 相手が「協力しない」としても，自分は「協力しない」方が良い
  3. しかし「両方が協力しない」より，「両方が協力したほう」が良い

- 個別最適と全体最適
  - 個人は最適な戦略（利得が最大になる戦略）を選んでいる
  - すべてのプレイヤーの利得が，さらに高くなる戦略の組がある⇒全体として最適ではない
    - 「全体として最適」の意味を正確に定義する必要がある

囚人のジレンマの例 ― ISPルーティングゲーム

ISPルーティングゲーム

- Tardos and Vazirani, *Algorithmic game Theory Chapter 1*, or
- Asu Ozdaglar, *Game Theory with Engineering Applications,* Lecture in MIT



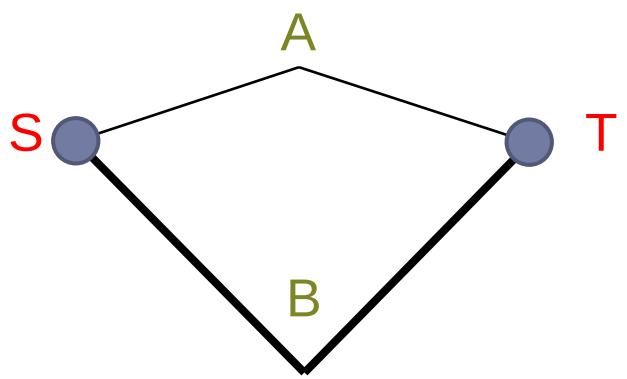
- ISPi は自分のsiからtiへトラフィックを送る
- 各ISPのネットワークの枝をトラフィックが流れると，そのISPは枝1つにつき費用1を負担する
- 各ISPはAとBのどちらのルーターを選ぶべきか

ISP2 / ISP1	A		B	
A	ISP1	ISP2	ISP1	ISP2
	-4	-4	-1	-5
B	ISP1	ISP2	ISP1	ISP2
	-5	-1	-2	-2

ISP同士が複数の接続点でピアリングしている時，
A:ホットポテトルーティング：
ISP間の通信は送信側に近い接続点を通るようなルーティング方法
B:コールドポテトルーティング：
ISP間の通信は受信側に近い接続点を通るようなルーティング方法

共有地の悲劇(Tragedy of Commons) – 囚人のジレンマn人版

混雑のあるネットワークルート（もしくは無線帯域）の選択ゲーム



- n人のプレイヤーがSからTへ通信を行う
- 各プレイヤーはAかBのルートを選択する
- Aは通信量が少ないと速度が早いが，回線が細いため，1人の通信につき，$1/n$ずつ通信時間が増加する（m人が通信すると速度はm/n）
- Bは，速度が遅いが，回線が太く，何人が通信しても，通信時間は1

- 他のプレイヤーが何を選択しても，各プレイヤーはBよりAを選択したほうが良い（支配戦略）－プレイヤー全員の通信時間の合計はn
- m人がAを選択した時，プレイヤー全員の通信時間の合計は

$$\left(\frac{m}{n}\right) \times m + 1 \times (n - m) = \frac{1}{n}\left(m - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}n$$

- 半数のプレイヤーがBを選択することが，プレイヤー全員の通信時間の合計が最小（$\frac{3}{4}n$）に！

1と2のまとめ

まとめ

- 戦略形ゲーム（同時ゲーム）は3要素
  - プレイヤー，戦略，利得
- ゲームでは，プレイヤーに単純な「最適」戦略はない
  - 相手の戦略によって何が最適かは変わる
- しかし，もしプレイヤーに「相手が何を選んでも，それを選ぶ戦略」＝支配戦略があれば，それは最適な戦略と言える
  - 支配戦略があれば，プレイヤーはそれを選ぶ
- ２人ゲームでは，一方に支配戦略があれば，もう一方はそれを推測して，それに対して一番良い戦略を選ぶ.
- 囚人のジレンマ，共有地の悲劇一個人にとっての最適な戦略は，全体にとって最適な結果ではない.

３．戦略形ゲームを解く（２）

ナッシュ均衡

例2：コンビニ立地競争⇒B駅の利用客を750に変更

ファミモ / セレブ	A駅		B駅	
A駅	celeb	Family Mall	celeb	Family Mall
	200	400	600	750
B駅	celeb	Family Mall	celeb	Family Mall
	750	600	250	500

- 利用客：A駅　600人　B駅 750人
- 違う場所に出店すれば客を独占
- 同じ場所に出店した場合，ファミモがセレブの2倍の客を獲得
  - A駅に出店：セレブ200人，ファミモ400人
  - B駅に出店：セレブ250人，ファミモ500人

例2：コンビニ立地競争（B駅利用客750）

ファミモ / セレブ	A駅		B駅	
A駅	200	400	600	750
B駅	750	600	250	500

- セレブ：　ファミモがA駅ならばB駅，B駅ならばA駅が良い
- ファミモ：セレブがA駅ならばB駅，B駅ならばA駅が良い
- 両方のプレイヤー共に支配戦略がない

ゲームの解ーナッシュ均衡

- 支配戦略がないときのゲームの解は？
  - それは，ゲームのプレイヤー自身も予想する戦略の組と考える
  - それならばゲームの解は，各プレイヤーが自分に最適な戦略を選びあう戦略の組でなければならない
  - なぜなら，それ以外の予想は，最適な戦略を選んでいないプレイヤーが，自分の戦略を最適な戦略に変更するので解にならないはず

- ナッシュ均衡
  - 最適な戦略を選びあう戦略の組
  - 戦略の組がナッシュ均衡
    - どのプレイヤーも，（他者がその戦略を選んでいるもとで），自分だけが他の戦略に変えても利得が高くならない

ナッシュ均衡ではない戦略の組ー両方ともA駅を選ぶ

セレブ＼ファミモ	A駅		B駅	
A駅	200	400	600	750
B駅	750	600	250	500

- セレブもファミモも両方ともA駅を選ぶ戦略の組は，ナッシュ均衡ではない
  - もし，このような予想をプレイヤーがするならば，セレブかファミモのどちらかは戦略をB駅に変更するはず
  - もはやゲームの解ではない

ナッシュ均衡ーセレブがA駅，ファミモがB駅を選ぶ

セレブ＼ファミモ	A駅		B駅	
A駅	200	400	600	750
B駅	750	600	250	500

- セレブがA駅，ファミモがB駅を選ぶ戦略の組はナッシュ均衡
  - もし，このような予想をプレイヤーがするならば，セレブもファミモも戦略を変更するインセンティブはない
  - ゲームの解！

もう1つのナッシュ均衡ーセレブがB駅，ファミモがA駅を選ぶ

セレブ＼ファミモ	A駅		B駅	
A駅	200	400	600	750
B駅	750	600	250	500

- ナッシュ均衡は1つではない
- セレブがB駅，ファミモがA駅を選ぶ戦略の組もナッシュ均衡
- どのナッシュ均衡がゲームの解であるかは大きな問題

なぜナッシュ均衡がゲームの解か？

解釈1：合理的プレイヤーの予測と自己拘束性

- ナッシュ均衡以外が解であるような理論・予測・予言のもとでは，人間は行動を変える
  - 渋滞・帰省ラッシュの予測
  - じゃんけんの出しやすい手
  - 株や競馬の儲け話
- ゲームの解をプレイヤーが知っても，それがゲームの解であり続けるには，ナッシュ均衡でなければならない
  - 必要条件
  - ナッシュ均衡の自己拘束性

解釈2：プレイヤーの学習・進化のダイナミクスの定常状態

  - 後で説明

チキンゲーム（chicken）

- 支配戦略がない典型的なゲーム
- 2つのナッシュ均衡ー混合戦略（確率を用いた戦略）を使うともう1つある

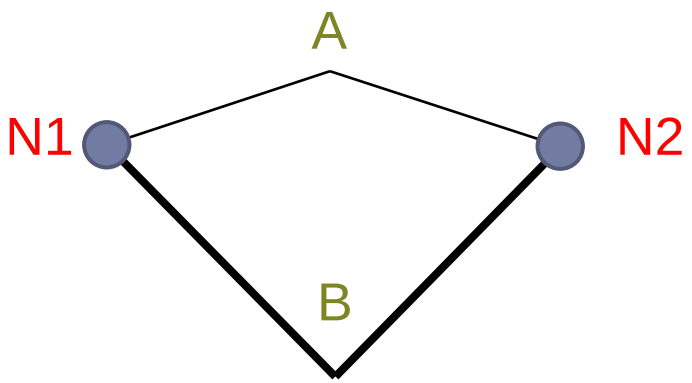
（例）10万円を分ける交渉

P2 / P1	弱気		強気	
弱気	P1	P2	P1	P2
	5	5	2	8
強気	P1	P2	P1	P2
	8	2	0	0

- チキンゲーム
  - 相手が強気なら，自分は弱気が最適な戦略
  - 相手が弱気なら，自分は強気が最適な戦略
  - 両方が強気に出ると，最悪の結果に

混雑のあるネットワークによるチキンゲームの例

混雑のあるネットワークルート（もしくは無線帯域）の選択ゲーム



- 2人のプレイヤーP1，P2がSからTへ通信を行う
- 各プレイヤーはAかBのルートを選択
- Aは1人が通信すると通信時間は1と早いが回線が細く混雑し，2人が通信すると通信時間は3に
- Bは速度が遅いが回線が太く，1人が通信すると通信時間は2，2人が通信しても通信時間は2.1
- 速度＝コストと考え，速度にマイナスをつけたものを利得とする．

P2 / P1	A		B	
A	P1	P2	P1	P2
	-3	-3	-1	-2
B	P1	P2	P1	P2
	-2	-1	-2.1	-2.1

調整ゲーム（coordination）

- 支配戦略がない典型的な，もう1つゲーム
- 2つのナッシュ均衡ー混合戦略（確率を用いた戦略）を使うともう1つある

（例）両性の戦い

女＼男	演劇		映画	
演劇	女	男	女	男
	2	1	0	0
映画	女	男	女	男
	0	0	1	2

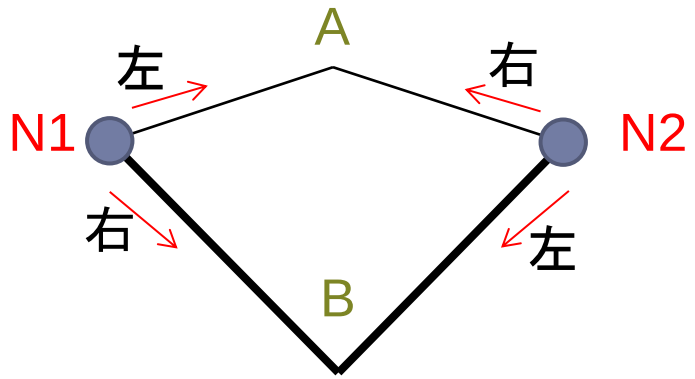
集合時間と文化

P1＼P2	早め		遅刻	
早め	P1	P2	P1	P2
	1	1	-1	0
遅刻	P1	P2	P1	P2
	0	-1	1	1

- 両性の戦い（Battle of Sexes）
  - 演劇に行きたいP1と映画を見たいP2
  - ２人で同じ所に行くと，好きな場所なら２点，そうでない場所なら１点
  - 会えないと共に０点

調整ゲーム＝チキンゲーム？

混雑のあるネットワークルート
（もしくは無線帯域）の選択ゲーム



- さっきと同じ
- ただし，各プレイヤーは，右ルートか，左ルートを選択
- A：1人が通信：通信時間1
  2人が通信：通信時間3
- B：1人が通信：通信時間は2
  2人が通信：通信時間は2.1
- 速度＝コストと考え，速度にマイナスをつけたものを利得とする．

P2 / P1	右		左	
右	P1	P2	P1	P2
	-2	-1	-2.1	-2.1
左	P1	P2	P1	P2
	-3	-3	-1	-2

調整ゲーム＝チキンゲーム？

調整ゲーム？チキンゲーム？

- 調整ゲーム，チキンゲームは，あまり明確には定義されていない．
- チキンゲーム：各プレイヤーが異なる戦略を選び合うことが，na ナッシュ均衡（負の外部性，混雑）
  - 正確には，異なる戦略を選び合うことがナッシュ均衡となるゲームは「反調整ゲーム」と呼ばれ，チキンゲームはその中の1つ
- 調整ゲーム：各プレイヤーが同じ戦略を選び合うことがナッシュ均衡（正の外部性，シナジー効果）
- n人ゲームでも，アバウトではあるが，上記概念が拡張される

- 2人のプレイヤーが，よく考えて行動をするゲームの場合は，この2つは戦略の名前を付け替えることで，同じになる
- 多数のプレイヤーの場合，また学習や進化の枠組みでは，この2つは区別する必要がある（後述）

支配戦略とナッシュ均衡

- 2人に支配戦略がある場合
  - 2人とも支配戦略を選ぶ
- 1人だけに支配戦略がある場合
  - 1人だけ支配戦略を選び，もう1人は，その支配戦略に対する最適な戦略を選ぶ

	A		B	
A	200	400	600	300
B	300	600	100	200

両方ともナッシュ均衡の特殊ケース

	協力		非協力	
協力	2	2	-1	3
非協力	3	-1	0	0

ゲームの解は，ナッシュ均衡だけの定義でOK？

支配戦略とナッシュ均衡

- 支配戦略を用いた解は，ナッシュ均衡に含まれる
- しかし，支配戦略がないナッシュ均衡をプレイヤーが選択しあうことが成立するには，プレイヤーが支配戦略を選択することよりも，多くの仮定を必要とする．
  - ゲームの解の「予測力」は支配戦略より低くなる

↓

- 大雑把に言えば，支配戦略は「使える」が，ナッシュ均衡は「使えないとき」がある．
- メカニズムデザイン（マッチング，オークション）では，プレイヤーに支配戦略があるようなメカニズムが成功を収めている．

古いタイプのゲーム理論の講義では，この辺りが意識されていない

3のまとめ

まとめ

- 一般的なゲームの解は，ナッシュ均衡である
  - 各プレイヤーが，自分に最適な戦略を選びあう戦略の組
- ナッシュ均衡がゲームの解である理由はいくつかある
  - プレイヤーが推測した結果は，自己拘束性を持つべき
  - 進化と学習の動学過程の定常状態（後述）
- 支配戦略があるゲームの解も，ナッシュ均衡の特殊ケースであるが，支配戦略があるゲームの方がプレイヤーがそれをプレイすると考えるべき理由（可能性）が大きくなる
- 支配戦略がなく，ナッシュ均衡が（純粋戦略で）存在するゲームの典型的な例として，調整ゲームとチキンゲームがある.

４．戦略形ゲームを解く（３）

混合戦略のナッシュ均衡

コインの表裏合わせ (Matching Pennies)

P2 / P1	A		B	
A	P1	P2	P1	P2
	-1	+1	+1	-1
B	P1	P2	P1	P2
	+1	-1	-1	+1

- このゲームには，一見するとナッシュ均衡はない…
- 最初にフォン・ノイマン達が問題にしたのはこのタイプのゲーム
- プレイヤーは混合戦略（確率を用いた戦略）を使うと考える

- 両方のプレイヤーが共に，表と裏を1/2ずつの確率で選択する戦略がナッシュ均衡

じゃんけん

P1 \ P2	グー		チョキ		パー	
グー	P1	P2	P1	P2	P1	P2
	0	0	+1	-1	-1	+1
チョキ	P1	P2	P1	P2	P1	P2
	-1	+1	0	0	+1	-1
パー	P1	P2	P1	P2	P1	P2
	+1	-1	-1	+1	0	0

- グー，チョキ，パーを1/3ずつの確率で選ぶことがナッシュ均衡

混合戦略まで考えればすべてのn人ゲームにナッシュ均衡は存在する.

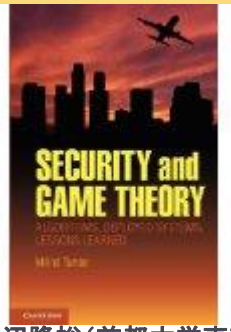
J. F. Nash (1951)

混合戦略ナッシュ均衡

- フォン・ノイマンとモルゲンシュテルン，ナッシュなどは「すべてのゲームに解が存在するか」という問題に興味があった
- 混合戦略まで拡張すれば，プレイヤーが何人でも，戦略がいくつでも必ずナッシュ均衡は存在する
  - ゼロ和ゲーム⇒フォン・ノイマン（ミニマックス定理）
  - 非ゼロ和ゲーム⇒ナッシュ（ナッシュ均衡の存在定理）
- 混合戦略はゲーム理論の「理論」としての中心的概念

混合戦略は「現実」への応用は可能か？

- 従来，意思決定において，乱数を使うという発想は，理論上は興味があっても，現実への応用は難しいと考えられていた．
- しかし近年は警備やセキュリティに混合戦略を応用しようとする試みが注目されている．



- Milind Tambe (2011), Security and Game Theory: Algorithms, Deployed Systems, Lessons Learned, Cambridge University Press.
- 岩崎敦，東藤大樹(2013)，ゲーム理論・メカニズムデザインに関する研究動向，人工知能学会誌，Vol.28，No.3.

混合戦略の応用:警備・セキュリティと混合戦略

- 従来，意思決定において，乱数を使うという発想は，理論上は興味があっても，現実への応用は難しいと考えられていた.
- しかし近年は警備やセキュリティに混合戦略を応用しようとする試みが注目されている.

- Milind Tambe (2011), Security and Game Theory: Algorithms, Deployed Systems, Lessons Learned, Cambridge University Press.
- 岩崎敦，東藤大樹(2013)，ゲーム理論・メカニズムデザインに関する研究動向，人工知能学会誌，Vol.28，No.3.

P2 / P1	A		B	
A	P1	P2	P1	P2
	+1	-1	-2	+2
B	P1	P2	P1	P2
	-5	+5	+1	-1

- P1:警備「Aを警備，Bを警備」
- P2:テロリスト「Aを攻撃，Bを攻撃」
- Aの方が重要施設

混合戦略の考え方：サッカーのPK戦

PKの成功率がキッカー（失敗率がキーパー）の利得

- P1：キッカー「右に蹴るか，左に蹴るか」（自分から見て）
- P2：キーパー「右に飛ぶか，左に飛ぶか」（相手から見て）

キッカー：異なる方向に飛びたい，キーパー：同じ方向に飛びたい

キッカー＼キーパー	右		左	
右	P1	P2	P1	P2
	0.9	0.1	0.5	0.5
左	P1	P2	P1	P2
	0.3	0.7	0.6	0.4

Q.右が得意なキッカーの場合，キッカーは右と左，どちらに蹴る確率を高くすべきか？

混合戦略の考え方：直観どおりではない？

- 混合戦略の計算方法は，
  他の文献を参照のこと

キーパー / キッカー	右		左	
右	P1	P2	P1	P2
	0.9	0.1	0.5	0.5
左	P1	P2	P1	P2
	0.3	0.7	0.6	0.4

- キッカーが，得意である右に飛ぶ確率を高くすると
  - キーパーは右に飛ぶ方が，左に飛ぶより絶対良い
  - キーパーは右に絶対飛ぶ
  - キッカーは，左に飛んだ方が良い．なので，右に飛ぶ確率を高くしていることに矛盾してしまう

  ⇒ナッシュ均衡にはならない

- 混合戦略のナッシュ均衡は
- キッカー：右に3/7，左に4/7
- キーパー：左に1/7，右に6/7
- キッカーが右に飛ぶ確率は左より小さい！

自分が得意な方を選ぶ確率を小さく，不得意な方を選ぶ確率を大きくすることが解となる

チキンゲーム，調整ゲームにはナッシュ均衡が3つ

- チキンゲーム，調整ゲームには，混合戦略を用いたナッシュ均衡が1つあり，合計3つのナッシュ均衡がある
  - 混合戦略を用いないナッシュ均衡は純粋戦略のナッシュ均衡と呼ぶ

- 「戦略Aを選ぶ」＝「確率1で戦略Aを選ぶ混合戦略」なので，上記の表現は正確ではないが．．．

P1 \ P2	A		B	
A	P1	P2	P1	P2
	2	2	0	0
B	P1	P2	P1	P2
	0	0	1	1

両プレイヤー共に，Aを1/3，Bを2/3で選ぶナッシュ均衡がある

P1 \ P2	A		B	
A	P1	P2	P1	P2
	0	0	2	1
B	P1	P2	P1	P2
	1	2	0	0

プレイヤー1はAを1/3，Bを2/3
プレイヤー2はAを2/3，Bを1/3
で選ぶナッシュ均衡がある

５．ゼロ和ゲームと非ゼロ和ゲーム

ゲーム理論は勝ち負けを決める理論か？

- **ゲーム理論は相手に勝つための理論か？**
  - ゲーム理論の始まりではYES
  - von Neumann and Morgenstern (1947)
    - Theory of Games and Economic Behavior
  - そのゲームはゼロ和ゲーム
- ゼロサムゲーム（ゼロ和ゲーム）
  - 全員の利得の和がゼロになるゲーム
    - 全員の利得の和が同じゲームは，ゼロにならなくてもゼロ和ゲームと同じ性質を持つ（定和ゲーム）
  - 誰かが勝てば，誰かが負ける
    - 将棋，チェス，スポーツの試合など
  - **資源の取り合う，パイを分け合うゲーム**

ゼロ和ゲーム

じゃんけん

- 勝つと相手に1万円もらうゲーム（あいこは0）
- このゲームはゼロ和ゲーム

P1 \ P2	グー		チョキ		パー	
グー	P1	P2	P1	P2	P1	P2
	0	0	+1	-1	-1	+1
チョキ	P1	P2	P1	P2	P1	P2
	-1	+1	0	0	+1	-1
パー	P1	P2	P1	P2	P1	P2
	+1	-1	-1	+1	0	0

じゃんけん

- 勝った人は（他の人から1万円もらえる．負けとあいこはもらえない
- このゲームは非ゼロ和ゲーム

P1 \ P2	グー		チョキ		パー	
グー	P1	P2	P1	P2	P1	P2
	0	0	+1	0	0	+1
チョキ	P1	P2	P1	P2	P1	P2
	0	+1	0	0	+1	0
パー	P1	P2	P1	P2	P1	P2
	+1	0	0	+1	0	0

ゼロ和ゲーム

- サッカーのPKゲームのように，利得の和がある定数である定数和ゲームも，ゼロ和ゲームと考えて良い．
  - ちなみに0.5からの乖離を利得とすることでゼロ和ゲームになる

キッカー＼キーパー	右		左	
右	P1	P2	P1	P2
	0.9	0.1	0.5	0.5
左	P1	P2	P1	P2
	0.3	0.7	0.6	0.4

キッカー＼キーパー	右		左	
右	P1	P2	P1	P2
	0.4	-0.4	0	0
左	P1	P2	P1	P2
	-0.2	0.2	0.1	-0.1

囚人のジレンマ，調整ゲームは非ゼロ和ゲーム

囚人ジレンマ

	協力		非協力	
協力	2	2	-1	3
非協力	3	-1	0	0

調整ゲーム

P1 \ P2	A		B	
A	P1	P2	P1	P2
	2	2	0	0
B	P1	P2	P1	P2
	0	0	1	1

チキンゲーム（10万円を分ける交渉）

P1 \ P2	弱気		強気	
弱気	P1	P2	P1	P2
	5	5	2	8
強気	P1	P2	P1	P2
	8	2	0	0

どれも非ゼロ和ゲーム

ここに示した非ゼロ和ゲームには，ゼロ和ゲームにはない特徴がある．それは？

非ゼロ和ゲームとWIN-WIN

- 囚人のジレンマ，調整ゲーム，チキンゲームにはゼロ和ゲームにはない特徴がある.
- 上記のゲームでは，ある結果より，別の結果が，プレイヤー全員の利得を大きくしている
  - いわゆるwin-winの状態がある
  - それはナッシュ均衡であるときもあり（チキン，調整），そうでないときもある（囚人のジレンマ）
- もちろん非ゼロ和ゲームでも，一方の利得が上がれば，一方の利得が下がるゲームもある
  - 競争的なゲームと呼ばれる

黎明期のゼロ和ゲームの分析：いかに「競争」に勝つか

非ゼロ和ゲーム以降の分析：時には「協調」し，いかにWIN-WINにするか，という目的が加わった.

ゼロ和ゲームとマキシミニ戦略

- 現在のゲーム理論の解はナッシュ均衡である　⇒Nash(1951)
- では　von Neumann and Morgenstern (1947)　は何をゼロ和ゲームの解と考えていたのか？

- マキシミニ(maxmin)戦略
  - 自分の戦略に対して，相手が最小の（最悪の）利得を与える戦略を選ぶと考えて，それを最大にする戦略

プレイヤー1（P1)のマキシミニ戦略は？

P2 / P1	A		B	
A	P1	P2	P1	P2
	2	-2	0	0
B	P1	P2	P1	P2
	0	0	-1	1

P1がAを選んだ時，利得が最小となるのは⇒0
P1がBを選んだ時，利得が最小となるのは⇒-1

AがP1のマキシミニ戦略！

セロ和ゲームでは，マキシミニ戦略＝ナッシュ均衡

- 初期のゲーム理論のもっとも基本となる定理がミニマックス定理(minmax theorem)である
- この定理は，自分がマキシミニ戦略を選んだ時に，その利得を最小にするのは，相手のマキシミニ戦略となる，ことを示している．
- このことからゼロ和ゲームでは，マキシミニ戦略を選び合うことはナッシュ均衡になることが分かる（下記説明参照）

プレイヤー1（P1)のマキシミニ戦略は？

P2 / P1	A		B	
A	P1	P2	P1	P2
	2	-2	0	0
B	P1	P2	P1	P2
	0	0	-1	1

- AがP1のマキシミニ戦略
- ミニマックス定理⇒P1がAを選ぶ時，P2のP2のマキシミニ戦略Bは，P1の利得を最小にしている

⇒P2が戦略を変えると，Aの利得は（最小じゃなくなるので）増加する
⇒Bの利得は減少する（ゼロ和ゲームだから）

なおマキシミニ戦略，ミニマックス定理は，混合戦略を用いる場合が問題の核心となるが，ここでは省略する

ゼロ和ゲームと非ゼロ和ゲーム

- 非ゼロ和ゲームではマキシミニ戦略はナッシュ均衡とは限らない
- すなわち，相手がマキシミニ戦略を選んでいる時，自分にはマキシミニ戦略より良い戦略があることがある
  - もはやマキシミニ戦略を選ぶ理由はない
- 現在のゲームの解はナッシュ均衡

ゼロ和ゲームは，ゲーム理論を応用しやすいクラスである

- 自分がマキシミニ戦略を選んでいるとき，もし相手がマキシミニ戦略を選ばなくても，自分の利得は増加する
  - 非ゼロ和ゲームのナッシュ均衡ではこれは言えない
  - ナッシュ均衡は，相手がそのナッシュ均衡戦略を選んでくれないとダメ

	A		B	
A	200	400	600	300
B	300	600	100	200

- セレブは，ファミモの支配戦略を読んでBを選ぶ
- しかし，ファミモが（クレージーで）Bを選ぶなら，Aを選んだほうが良い

6のまとめ

まとめ

- ゼロ和ゲームは相手と勝ち負けを競う
- 非ゼロ和ゲームは，競争だけではなく，協力や協調を分析する
  - 相手に勝つためだけではなく，双方が得をしながら自分の利得が多くなる方法を考えることが重要
  - 囚人のジレンマ，交渉，弱虫ゲーム，調整ゲーム
- ゼロ和ゲーム（競争的非ゼロ和ゲーム）は，相手がゲーム理論通りに行動しなくても，うまく行くことが多い．

個人的な見解であるが

- ゼロ和ゲーム（競争的ゲーム）は必勝戦略を探すゲームであり，個人の意思決定・個人の最適化に近いと言える．将棋の強いプログラム（電脳戦）などで分かるように，技術的な問題は「最適な解を探すための工夫」であるように感じる
- これに対し，調整・協調の非ゼロ和ゲームは，最適化とは考え方の異なるゲーム理論的特徴を強く持っている．繰り返し囚人のジレンマの実験（アクセルロッド等）でも分かるように，必ずしも複雑なプログラムが強いわけではなく，協調や調整のための単純な「仕掛け」が必要とされる．

ナッシュ均衡の存在証明とナッシュ博士

- ナッシュの業績
  - ナッシュ均衡を考えただけではなく，（次の章の混合戦略まで含めれば），すべてのゲーム理論にナッシュ均衡が必ず存在することを数学的に証明した．
- 1994年にノーベル経済学賞
- 精神的な病に苦しむ半生
- 映画「ビューティフルマインド」

2002年
アカデミー賞
受賞作品

ビューティフル
マインド

EURO2010にて

６. 学習と進化のダイナミクス

ナッシュ均衡の別な解釈

ナッシュ均衡のもう1つの解釈

- ここまでのゲーム理論では，プレイヤーは少数で，１回きりのゲームで，よく考えて戦略を選ぶ，としてきた.
- 生物学などでよく用いられる進化ゲームや，プレイヤーが学習するゲームでは，プレイヤーは（1）多数存在し（2）長期間ゲームを続け（3）考えて戦略を選択するのではなく，固有の戦略を選び続け（4）1つの期間に僅かな比率のプレイヤーだけ戦略を変更する，と考える.

例：デファクトスタンダードの進化ゲーム

- ある通信機器について，規格Aと規格Bの機器を多数の消費者が購入している．t 期$(t = 0,1, \dots)$ において，規格Aを購入してる消費者の比率を$x(t)$，規格Bを購入してる消費者の比率を$1 - x(t)$とする．
- 同じ規格どうしは通信が可能だが，異なる規格間の通信は不可
- A規格の方がB規格より優れていることが分かってきたが，もう既に消費者はそれぞれの規格の機器を購入しており，買い替えがなかなかできない．
- 各期に各消費者は，すべての消費者とランダムにマッチングし，通信をする．
- この時の利得行列は以下で与えられるとする．

P2 / P1	A		B	
A	P1	P2	P1	P2
	2	2	0	0
B	P1	P2	P1	P2
	0	0	1	1

- 各期末に，各規格の消費者はそれぞれ確率λで機器を買い換える．
- 消費者はt期の消費者の比率$x(t)$を所与として，すべての消費者の平均利得の高い機器を買う．
  - 消費者全体の数はここでは変化しないとする．

例：デファクトスタンダードの進化ゲーム

時間の経過と $x(t)$ の変化

	$x(t)$	$1-x(t)$
自分＼相手	A	B
A	2	0
B	0	1

相手の利得の計算は必要ないので，
自分の利得だけ記した表で良い

期間 t において平均利得の高い規格は？

- 規格Aの消費者の平均利得： $2x(t)$
- 規格Bの消費者の平均利得： $1-x(t)$

$2x(t) > 1-x(t)$ ⇒ $x(t) > 1/3$

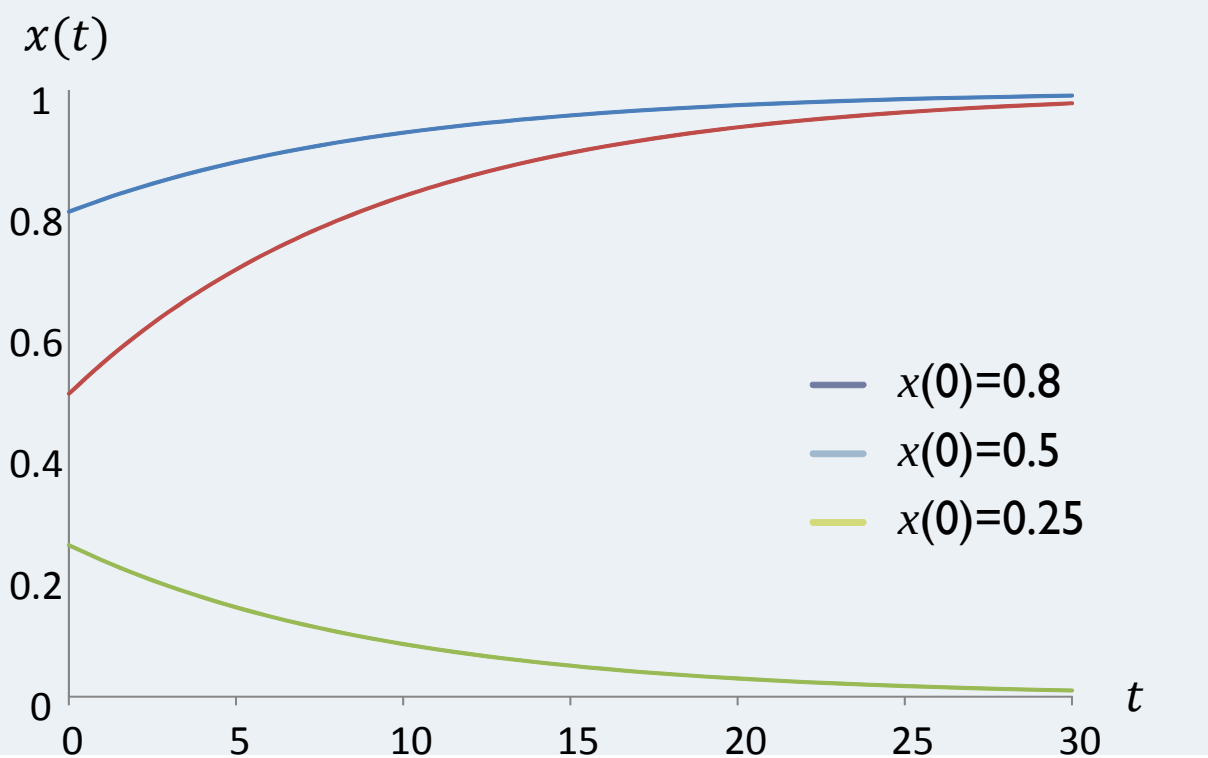
- $x(t) > 1/3$ ならば規格Aに買い換え
- $x(t) < 1/3$ ならば規格Bに買い換え

$$x(t+1) = \begin{cases} (1-\lambda)x(t) + \lambda & x(t) > 1/3 \\ (1-\lambda)x(t) & x(t) < 1/3 \end{cases}$$

- $t \to \infty$ としたときの定常比率x^*は，初期の消費者の比率$x(0)$によって決まる
- $x(0) > \frac{1}{3} \Rightarrow x^* = 1 \quad x(0) < \frac{1}{3} \Rightarrow x^* = 0$

$$x(t+1) = \begin{cases} (1-\lambda)x(t) + \lambda & x(t) > 1/3 \\ (1-\lambda)x(t) & x(t) < 1/3 \end{cases}$$

- $t \to \infty$ としたときの定常比率x^*は，初期の消費者の比率$x(0)$によって決まる
- $x(0) > \frac{1}{3} \Rightarrow x^* = 1 \quad x(0) < \frac{1}{3} \Rightarrow x^* = 0$



- なお，$x(0) = \frac{1}{3}$ の場合どうなるかは，期待利得が等しい時の動学をどのように定義するかに依存する．
- しかしこの状態は定常状態としては不安定
  ⇒僅かな変化（ノイズ）で，その状態からは離れていってしまう．

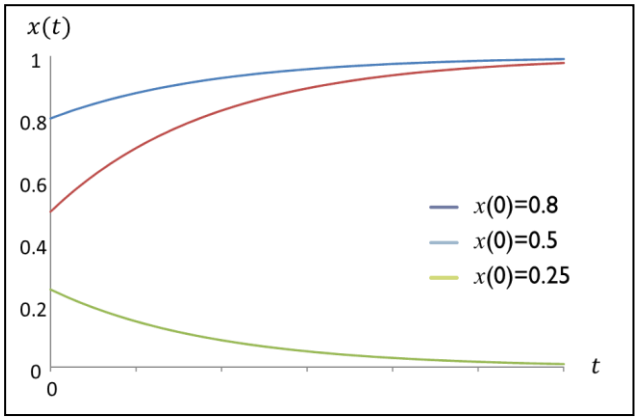
進化・学習のダイナミクスとナッシュ均衡

- 定常状態は，初期状態に依存するが，いずれもナッシュ均衡になる
  - ナッシュ均衡の進化・学習のダイナミクスによる解釈
- 「安定なナッシュ均衡」と「不安定なナッシュ均衡」が存在する
  - $x^* = \frac{1}{3}$ は不安定なナッシュ均衡
  - 動学に依存せず進化的安定性を定義する分析方法もある
    ⇒進化的安定戦略（ESS）
  - 戦略の数が3以上だと，安定なナッシュ均衡が必ずしも存在するとは限らない

ダイナミクスにおけるチキンゲームと調整ゲーム

調整ゲーム

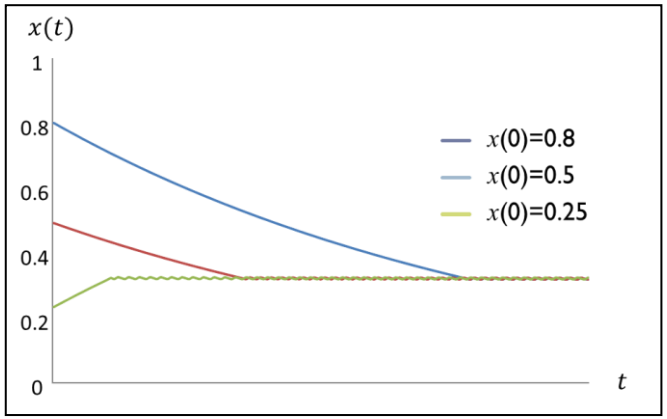
	$x(t)$	$1-x(t)$
自分＼相手	A	B
A	2	0
B	0	1



- $x(0) > \frac{1}{3} \Rightarrow x^* = 1$
- $x(0) < \frac{1}{3} \Rightarrow x^* = 0$

チキンゲーム

	$x(t)$	$1-x(t)$
自分＼相手	A	B
A	0	1
B	2	0



- $0 < x(0) < 1 \Rightarrow x^* = \frac{1}{3}$

λは十分に小さいとする.
正確には，離散時間モデルでは，定常状態付近で振動する

6のまとめ

まとめ

- 生物や社会における進化・学習のゲームではプレイヤーは
  - （1）多数（2）長期間のゲーム（3）固有の戦略を選び続ける（4）ある時点で僅かな比率のプレイヤーだけ戦略を変更
- 進化や学習のゲームの定常状態は，ナッシュ均衡になる（存在すれば）
  - ナッシュ均衡のもう1つの解釈
- すべてのナッシュ均衡が，ある初期状態からの定常状態として得られるわけではない．不安定なナッシュ均衡もある

	調整ゲーム	チキンゲーム（反調整ゲーム）
定常状態	初期状態によって，全員がAを選ぶか，全員をBを選ぶ	AとBを選ぶプレイヤーがある比率で混在する
ナッシュ均衡との対応	定常状態は，純粋戦略のナッシュ均衡に対応	定常状態は，混合戦略のナッシュ均衡に対応
不安定なナッシュ均衡	混合戦略のナッシュ均衡は不安定	純粋戦略のナッシュ均衡は不安定

講演全体のまとめ－私個人のメッセージ

まとめ

- 従来は支配戦略とナッシュ均衡の区別がそれほど意識されていなかったが，技術として安心して応用できるものは，支配戦略があるゲームであると考えられる.
- またゼロ和ゲームも応用可能性が高いが，それは最適化に近い考え方となる
  - 2人ゼロ和ゲームは線形計画法で解けるが，2人非ゼロ和ゲームは解けない
- これに対し，非ゼロ和ゲームの調整ゲームやチキンゲームのナッシュ均衡は，1度きりのゲームでは予測力は落ちる.
  - 実験結果もそれを支持している
  - 社会科学としては面白い現象
- ただし進化や学習のダイナミクスの定常状態として捉えれば，使えるかもしれない

7. さらにゲーム理論！

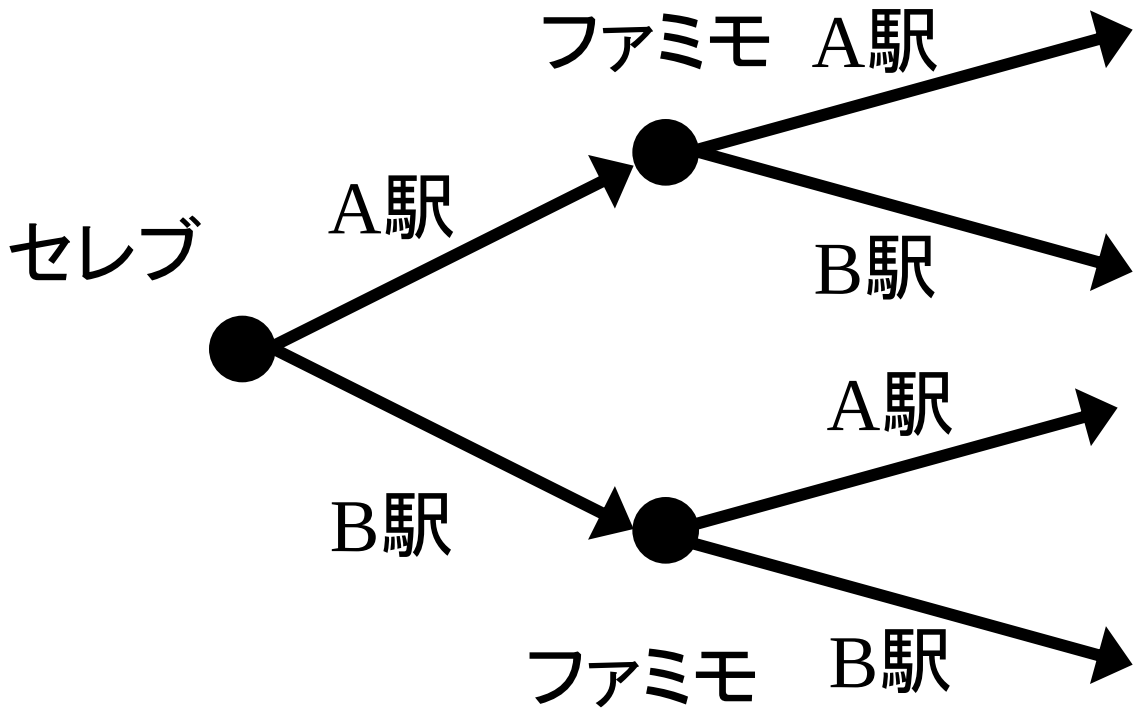
展開形ゲーム

各プレイヤーが，逐次行動するゲームを含む表現形式

例：セレブが先手，ファミモが後手のゲーム

- セレブの出店が早い
- ファミモはセレブの出店場所を知ってから，自分の出店場所を選べる（セレブが先手，ファミモが後手）
- 「A駅」の利用客　600人
- 「B駅」の利用客　300人
- 違う場所なら利用客を独占
- 同じ場所なら，ファミモはセレブの2倍の客数を獲得できる.
  - A駅：　セレブ 200人　　ファミモ 400人
  - B駅：　セレブ 100人　　ファミモ 200人

展開形ゲームはゲームの木で表現する



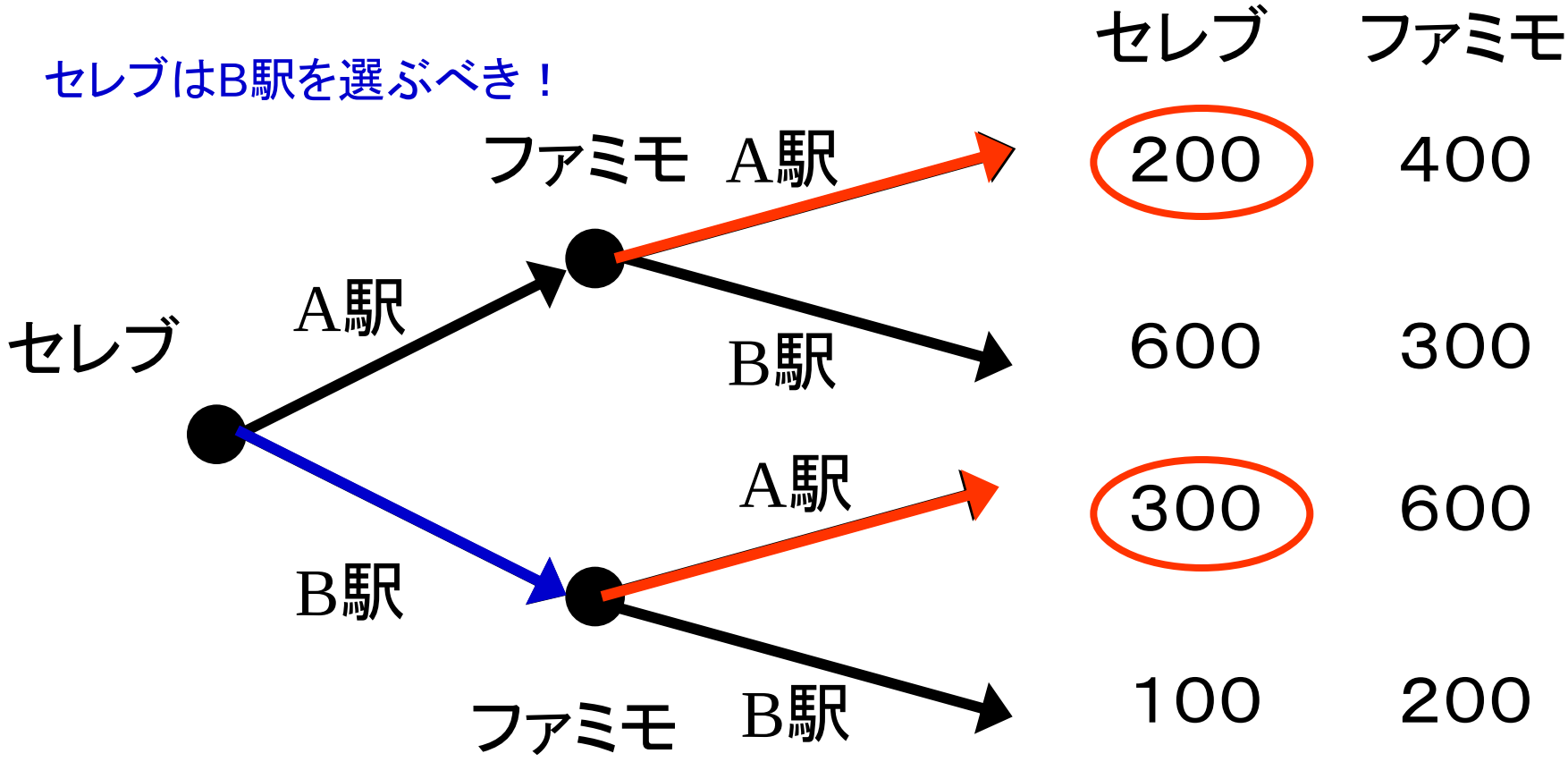
セレブ	ファミモ
200	400
600	300
300	600
100	200

展開形ゲームはバックワードインダクションで解く

- セレブは，後手のファミモの行動を先読みする
- したがってゲームは，後手の行動から遡って解く

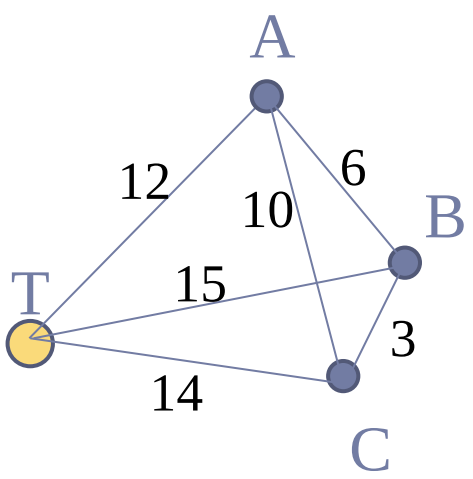
＝バックワードインダクション．

セレブはB駅を選ぶべき！



協力ゲーム

- プレイヤーの個人行動ではなく，提携を問題とする
- 非協力ゲーム：プレイヤーの戦略が与えられ，各プレイヤーが利得が大きくなるように戦略を選択する
- 協力ゲーム：プレイヤーが提携を組んだ時の利益（費用）が与えられ，全体の利益（費用）をどう配分（分担）するかを決める



例：
- A社，B社，C社が，Tから自社まで貨物を運搬
- 共同配送すれば1台で済む
- 輸送費用は以下の通り
- 1社単独：A 24　B 30　C 28
- 2社共同：A-B 33　B-C 32　A-C 36
- 3社共同：A-B-C 35

3社で共同配送をする時，どのように費用を分担するか？
（TSPゲーム（巡回セールスマンゲーム））

さらに勉強を深めたい人は？

- アマゾンなどで本を検索し，上位にある本で勉強してみて下さい
- たぶん1位は…

ゼミナールゲーム理論入門
渡辺隆裕著, 日本経済新聞社, 3500円

もう少し気軽に．．．

図解雑学ゲーム理論
渡辺隆裕著, ナツメ社, 1470円

韓国語版も
あります

宣伝です．すみません．

ありがとうございました.