# 第12章「協力ゲームの理論」における仁についての補足

渡辺隆裕

April 30, 2014

## 1　協力ゲームの正規化

協力ゲームにおけるほとんどの解（コア，仁，シャープレイ値）は，特性関数の正の1次変換に対して影響を受けないことが知られている．

3人ゲームで説明すると，プレイヤーを $A$,$B$,$C$ とし，ある正の数 $r$ とある3つの実数（正でも負でも良い）$s_A$，$s_B$，$s_C$ に対して，特性関数 $v$ を以下のような特性関数 $w$ に変換したとしよう．

$$\begin{aligned} &w(A) = rv(A) + s_A, && w(B) = rv(B) + s_B, && w(C) = rv(C) + s_C, \\ &w(AB) = rv(AB) + (s_A + s_B), && w(BC) = rv(BC) + (s_B + s_C), && w(AC) = rv(AC) + (s_A + s_C), \\ &w(ABC) = rv(ABC) + (s_A + s_B + s_C). \end{aligned}$$

このとき新しい特性関数 $w$ で求めた仁やシャープレイ値を $(y_1, y_2, y_3)$ とし，元の特性関数 $v$ の仁やシャープレイ値を $(x_1, x_2, x_3)$ とすると，

$$y_i = rx_i + s_i \quad i = A, B, C,$$

となることが知られている．また $x_i$ が特性関数 $v$ のコアの配分であることと，$y_i$ が特性関数 $w$ のコアの配分になることも同値である．

ここで $r = 1$，$s_A = -v(A)$，$s_B = -v(B)$，$s_C = -v(C)$ とすると，$w(A) = w(B) = w(C) = 0$ となり，ゲームの解の計算が容易になる．これを**ゼロ正規化**と呼ぶ．仁の計算などはゼロ正規化して行うと簡単になる．ゼロ正規化されたゲームの仁を $(y_A, y_B, y_C)$ とすると

$$x_i = y_i + v(i) \quad i = A, B, C,$$

とすれば，元のゲームの仁を $(x_A, x_B, x_C)$ を得ることができる．

**例 1.** テキストの *P462*，モデル *45* をゼロ正規化してみよう．モデル *45* における特性関数は

$$\begin{aligned} &v(A)=6, && v(B)=4, && v(C)=0,\\ &v(AB)=18, && v(BC)=18, && v(AC)=16,\\ &v(ABC)=48, \end{aligned}$$

であった．これをゼロ正規化すると

$$\begin{aligned} &w(A)=v(A)-6=0, && w(B)=v(B)-4=0, && w(C)=v(C)-0=0,\\ &w(AB)=v(AB)-(6+4)=8, && w(BC)=v(BC)-(4+0)=14, && w(AC)=v(AC)-(6+0)=10,\\ &w(ABC)=v(ABC)-(6+4+0)=38, \end{aligned}$$

となる．このゼロ正規化されたゲームの仁を $(y_A, y_B, y_C)$ として計算すると，

$$y_A=12,\quad y_B=13,\quad y_C=13,$$

となる．これと

$$x_A=y_A+v(A),\quad x_B=y_B+v(B),\quad x_C=y_C+v(C),$$

を使うと，元のゲームの仁 $(18, 17, 13)$ が計算できる．

# 2 3 人ゲームの仁を求める

## 2.1 テキストのモデル 45 の例

一般には，仁は線形計画問題を繰り返して解くことによって得られることが知られている．この線形計画法は，一般的には解くことが難しいが，3 人ゲームの場合には何とか問題を解くことが可能である．しかし，テキストに示した方法では，時として誤った解を与えるので（後述），以下，別の方法を示す．

具体例として，テキストのモデル 45 を考える．

配分 $(x_A, x_B, x_C)$ が与えられた時に，各提携の不満を表にすると

| 提携 | $A$ | $B$ | $C$ | $AB$ | $BC$ | $AC$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 不満 | $6-x_A$ | $4-x_B$ | $-x(c)$ | $18-(x_A+x_B)$ | $18-(x_B+x_C)$ | $16-(x_A+x_C)$ |

となる (テキストの表 12.2).

仁は，実行可能で個人合理性を満たすことから，$x_A, x_B, x_C$ を

$$x_A + x_B + x_C = 48, \quad x_A \geq 6, \quad x_B \geq 4, \quad x_C \geq 0,$$

でなければならない．従って，この不等式を満たすように $x_A, x_B, x_C$ を動かし，表の中の最大の不満が最小になる $x_A, x_B, x_C$ を求めれば良い．

そこで（表の中のどの提携の不満が最大不満になるかは分からないが），その最大不満を $M$ とすると，すべての不満は $M$ より小さくなっているので，$M$ と $x_A, x_B, x_C$ は次の式を満たすことが分かる．

$$6 - x_A \leq M, \tag{1}$$

$$4 - x_B \leq M, \tag{2}$$

$$-x_C \leq M, \tag{3}$$

$$18 - (x_A + x_B) \leq M, \tag{4}$$

$$18 - (x_B + x_C) \leq M, \tag{5}$$

$$16 - (x_A + x_C) \leq M, \tag{6}$$

**最大不満を最小化するとは，上記の式 (1)-(6) を満たす最小の $M$ を求めることであり，最小になった $M$ においては，上記の式 (1)-(6) のどれかの式は等号になっている．その等号になっている式に対応する提携が，最大不満を持つ提携である．**

この問題は，以下のように解く．ここで $x_A + x_B + x_C = 48$ を，$x_A + x_B = 48 - x_C$ として式 (4) に代入すると，$18 - (48 - x_C) \leq M$ となり，これより $x_C \leq 30 + M$ を得る．これと式 (3) を合わせると $x_C$ の範囲を表す不等式になり，

$$-M \leq x_C \leq 30 + M$$

という式を得る．

同様に，$x_B + x_C = 48 - x_A$ として式 (5) に代入し，これと式 (1) を合わせると $6 - M \leq x_A \leq 30 + M$ を得る．また，$x_A + x_C = 48 - x_B$ として式 (6) に代入し，これと式 (2) を合わせると $4 - M \leq x_B \leq 30 + M$ を得る．

これらを $x_A, x_B, x_C$ の順に整理すると

$$\begin{aligned} 6 - M \le x_A &\le 30 + M & (7) \\ 4 - M \le x_B &\le 32 + M & (8) \\ -M \le x_C &\le 30 + M & (9) \end{aligned}$$

となる．

ここで式 (7) において $M$ をできる限り小さくしようとすると，一番左の項は値が大きくなり，一番右の項は値が小さくなる．したがって，$M$ をできる限り小さくしようとすると，$x_A$ が存在する範囲は小さくなる．どこまで $M$ を小さくできるか考えてみると，もし $6 - M > 30 + M$ となれば，このような $x_A$ は存在しないことになる．したがって $x_A$ が存在するためには $6 - M \le 30 + M$ の時で，$M \ge -24/2 = -12$ でなければならない．

同様に，$x_B$ が存在する範囲するためには $M \ge -28/2 = -14$ であり，$x_C$ が存在する範囲で $M$ が最小になるのは $M \ge -15$ である．

さて，上記の方法はテキストの求め方に対応している．しかし，式 (7)-(9) を満たすためにはテキストには書かれていない，もう 1 つの重要な条件がある．（岸本 (2015) を参照）この 3 つの不等式を足し合わせると，$x_A, x_B, x_C$ は

$$10 - 3M \le x_A + x_B + x_C \le 92 + 3M$$

を満たさなければならない．ここで $x_A + x_B + x_C = 48$ より，$10 - 3M \le 48$，$48 \le 92 + 3M$，が満たさなければならない．したがって $M \ge -38/3$，$M \ge -44/3$ である．

これらをすべてを合わせると $M$ は

$$M \ge -12 \quad M \ge -14 \quad M \ge -15 \quad M \ge -38/3 \quad M \ge -44/3$$

でなければならず，これを満たしながら $M$ を最小にするには $M = -12$ でなければならない．これが最大不満を最小にする $M$ である．（$-12, -14, -15, -38/3, -44/3$ の中の一番大きい値）

$M = -12$ で等式となっているのは，式 (7) であることから最大の不満を持つ提携は $A$ と $BC$ であり，その不満が $-12$ であることが分かる．また $x_A = 6 - M = 30 + M$ から $x_A = 18$ が決定できる．

このように最大の不満を最小化し，1 人のプレイヤーの配分を決めることができれば，その配分を先の問題に代入して変数を 1 つ減らし，さらに残りの不満の中の最大の不満を最小にするように配分を決めてゆく．

テキストの例だと提携の不満が以下のように表せる．

| 提携 | $A$ | $B$ | $C$ | $AB$ | $BC$ | $AC$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 不満 | $6-18$ | $4-x_B$ | $-x_C$ | $18-(18+x_B)$ | $18-(x_B+x_C)$ | $16-(18+x_C)$ |

さらに $x_A+x_B+x_C=48$ と $x_A=18$ であるから，$x_C=30-x_B$ となり，これを代入して $x_B$ だけの式に直すと，

| 提携 | $A$ | $B$ | $C$ | $AB$ | $BC$ | $AC$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 不満 | $-12$ | $4-x_B$ | $x_B-30$ | $-x_B$ | $-12$ | $-32-xB$ |

これらの不満の最大値をまた改めて $M$ と置き，同様に考えると解が求められる．

同じ $M$ を用いると混乱するので，ここでは不満の最大値を $M'$ としよう．$M'$ と $x_B$ は次の式を満たす．

$$4-x_B \le M', \tag{10}$$

$$x_B-30 \le M', \tag{11}$$

$$-x_B \le M', \tag{12}$$

$$-32-x_B \le M', \tag{13}$$

よって，$x_B \ge 4-M'$,$x_B \le 30+M'$, $x_B \ge -M'$,$x_B \ge -32-M'$ である．$-32-M' \le -M' \le 4-M'$ であるから，$x_B$ が存在するためには

$$4-M' \le x_B \le 30+M'$$

を満たさなければならない．これを満たすためには $4-M' \le 30+M'$ でなければならず，これから $M' \ge -13$ でなければならない．最小の $M'$ は $M'=-13$ であり，これから $x_B=17$ が決まる．

さらに $x_C=30-x_B$ より $x_C=13$ となり，仁は $x_A=18$，$x_B=17$，$x_C=13$ となる．

## 2.2 テキストの解法では失敗する場合

テキストの方法では失敗する場合は，次の例である．

$$v(A)=0 \qquad v(B)=0 \qquad v(C)=0$$
$$v(AB)=4 \quad v(BC)=6 \quad v(AC)=5$$
$$v(ABC)=10$$

式 (7)-(9) と同じような式を導くと，

$$-M \le x_A \ \le \ 4+M \tag{14}$$
$$-M \le x_B \ \le \ 5+M \tag{15}$$
$$-M \le x_C \ \le \ 6+M \tag{16}$$

となる．これから $x_A, x_B, x_C$ が存在するためには $M$ が $-M \le 4+M$，$-M \le 5+M$，$-M \le 6+M$ を満たさなければならず．これより $M \ge -2$，$M \ge -2.5$，$M \ge -3$ を満たさなければならないことから最小の $M$ はとなるので $M=-2$ となる．$x_A=2$ であり，$A$ と $BC$ の不満は共に $M=-2$ で，それは全ての提携で最大の不満となっていなければならない．テキストの方法では $M=-2$,$x_A=2$ になっているが，これは最大の不満を最小にしていることにならない．以下にそれを示す．

ここで $x_A+x_B+x_C=10$ に $x_A=2$ を代入して，$x_B+x_C=8$ を得る．ここで $AB$ の不満を計算すると，

$$v(AB)-(x_A+x_B)=4-(2+x_B)=2-x_B$$

となる．$A$ と $BC$ の不満が $-2$ で，それが最大の不満となるためには，$2-x_B \le -2$ でなければならない．これより $x_B \ge 4$ でなければならない．

次に $AC$ の不満を計算すると，

$$v(AC)-(x_A+x_C)=v(AC)-(v(ABC)-x_B)=5-(10-x_B)=-5+x_B$$

となる．$x_B \ge 4$ から，$AC$ の不満は $-1$ 以上でなければならない．しかし，これは提携の不満は $A$ と $BC$ が最大であり，その値が $-2$ であることに矛盾してしまう．$x_A=2$ では最大の不満は $A$ と $BC$ ではなく，$AB$ か $BC$ になってしまう．

このようにテキストの簡便な方法では，最大の不満を最小化することに失敗することがあり，仁がうまく求められないことがある．先に示したように，もう少し条件が必要なのである．

先の例と同じように，3 つの不等式 (14)-(16) を足し合わせると，$x_A, x_B, x_C$ は

$$-3M \le x_A+x_B+x_C \le 15+3M$$

を満たさなければならない．ここで $x_A+x_B+x_C=10$ より，$-3M\leq 10$，$10\leq 15+3M$，が満たさなければならない．したがって $M\geq -10/3$，$M\geq -5/3$ となる．**したがって** $M=-2$ **では** $M\geq -5/3$ を満たさないのである．

この 3 つの不等式 (14)-(16) を足し合わせた時の条件が効いている時にどのようにすれば良いのだろうか．**現在，考えている最中である**．

# 3　未完成ながらもまとめ

3 人ゲームの仁を求める方法は未完成であるが，途中まで，一般的な方法をまとめてみよう．

3 人ゲームのプレイヤーを $A$,$B$,$C$ とし，特性関数が与えられているとする．配分 $(x_A,x_B,x_C)$ が与えられた時に，各提携の不満を表にすると以下のようになる．

| 提携 | $A$ | $B$ | $C$ | $AB$ | $BC$ | $AC$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 不満 | $v(A)-x_A$ | $v(B)-x_B$ | $v_C-x(c)$ | $v(AB)-(x_A+x_B)$ | $v(BC)-(x_B+x_C)$ | $v(AC)-(x_A+x_C)$ |

表の中の最大である不満が最小になるような $x_A,x_B,x_C$ を求める．表の中のどこが最大不満になるかは分からないが，その最大不満を $M$ とすると，すべての不満は $M$ より小さくなっている．つまり $M$ と $x_A,x_B,x_C$ は次の式を満たす．

$$
\begin{aligned}
&v(A)-x_A\leq M, && v(B)-x_B\leq M, && v(C)-x_C\leq M,\\
&v(AB)-(x_A+x_B)\leq M, && v(BC)-(x_B+x_C)\leq M, && v(AC)-(x_A+x_C)\leq M,\\
&x_A+x_B+x_C=v(ABC).
\end{aligned}
$$

1 番目の式から $x_A\geq v(A)-M$ となる．一方，$x_B+x_C=v(ABC)-x_A$ を 5 番目の式 $v(BC)-(x_B+x_C)\leq M$ に代入し，$v(BC)-(v(ABC)-x_A)\leq M$ を得る．これを変形して $x_A\leq v(ABC)-v(BC)+M$ を得る．2 つの式を合わせると $v(A)-M\leq x_A\leq v(ABC)-v(BC)+M$ となる．同様に 2 番目と 6 番目の式から，$x_B$ の範囲として $v(B)-M\leq x_B\leq v(ABC)-v(AC)+M$ を得て，3 番目と 4 番目の式から $v(C)-M\leq x_C\leq v(ABC)-v(AB)+M$ を得る．まとめると

$$v(A)-M\leq x_A \leq v(ABC)-v(BC)+M \tag{17}$$

$$v(B)-M\leq x_B \leq v(ABC)-v(AC)+M \tag{18}$$

$$v(C)-M\leq x_C \leq v(ABC)-v(AB)+M \tag{19}$$

ここで式 (17) において $M$ をできる限り小さくしようとすると，一番左の項は値が大きくなり，一番右の項は値が小さくなる．したがって，$M$ をできる限り小さくしようとすると，$x_A$ が存在する範囲は小さくなる．どこまで $M$ を小さくできるか考えてみると，もし $v(A) - M > v(ABC) - v(BC) + M$ となれば，このような $x_A$ は存在しないことになる．したがって $x_A$ が存在するためには $M \geq \frac{1}{2}(v(A)+v(BC)-v(ABC))$ でなければならない．同様に $x_B$ が存在するためには $M \geq \frac{1}{2}(v(B)+v(AC)-v(ABC))$，$x_C$ が存在するためには $M \geq \frac{1}{2}(v(C)+v(AB)-v(ABC))$ である．

したがって $x_A$，$x_B$，$x_C$ がすべて存在するためには，

$$M \geq \max\{\frac{1}{2}(v(A)+v(BC)-v(ABC)), \frac{1}{2}(v(B)+v(AC)-v(ABC)), \frac{1}{2}(v(C)+v(AB)-v(ABC))\}$$

である．この範囲で $M$ が最小となるには

$$M = \max\{\frac{1}{2}(v(A)+v(BC)-v(ABC)), \frac{1}{2}(v(B)+v(AC)-v(ABC)), \frac{1}{2}(v(C)+v(AB)-v(ABC))\} \tag{20}$$

とすれば良い．

もし，第 1 項が最大値を与えるならば $x_A = v(A) - M (= v(ABC) - v(BC) + M)$ となり，最大の不満を最小化するために $A$ に対する配分が決まる．そしてこのときの最大の不満は $A$ と $BC$ になっているはずである．

同じように第 2 項が最大値ならば，$x_B = v(B) - M$ となり，このときの最大の不満は $B$ と $AC$．第 3 項が最大値ならば，$x_C = v(C) - M$ となり，このときの最大の不満は $C$ と $AB$ である．このようにして最大の不満を最小化し，1 人のプレイヤーの配分を決めることができれば，その配分を先の問題に代入して変数を 1 つ減らし，さらに残りの不満の中の最大の不満を最小にするように配分を決めてゆく．

ただし，このとき式 (17) から式 (19) を加えた，

$$(v(A)+v(B)+v(C)) - 3M \leq x_A + x_B + x_C \leq 3v(ABC) - (v(AB)+v(BC)+v(AC)) + 3M$$

が満たされていることをチェックしなければならない．これが満たされていない時は，よく分からない．