

6.3 ゼロ和ゲームとミニマックス定理

ゲーム理論は勝ち負けを決める理論か？

■ ゲーム理論は相手に勝つための理論か？

- ゲーム理論の始まりではYES
- von Neumann and Morgenstern (1947)
 - Theory of Games and Economic Behavior

■ そのゲームはゼロ和ゲーム

■ ゼロサムゲーム(ゼロ和ゲーム)

- 全員の利得の和がゼロになるゲーム
 - 全員の利得の和が同じゲームは, ゼロにならなくてもゼロ和ゲームと同じ性質を持つ(定和ゲーム)
- 誰かが勝てば, 誰かが負ける
 - 将棋, チェス, スポーツの試合など
- 資源の取り合う, パイを分け合うゲーム

ゼロ和ゲーム

じゃんけん1

- 勝った方は、負けた方から1万円もらうゲーム
(あいこは0)
- このゲームはゼロ和ゲーム

P1 \ P2	グー	チョキ	パー
グー	(0, 0)	(+1, -1)	(-1, +1)
チョキ	(-1, +1)	(0, 0)	(+1, -1)
パー	(+1, -1)	(-1, +1)	(0, 0)

じゃんけん2

- ▶ 勝った方は(他の人から)1万円もらえる. 負けた方や、あいこはもらえない
- ▶ このゲームは非ゼロ和ゲーム

P1 \ P2	グー	チョキ	パー
グー	(0, 0)	(+1, 0)	(0, +1)
チョキ	(0, +1)	(0, 0)	(+1, 0)
パー	(+1, 0)	(0, +1)	(0, 0)

ゼロ和ゲーム

- サッカーのPKのように、**利得の和が定数である定数和ゲーム**も、ゼロ和ゲームと考えて良い。
 - ちなみに0.5からの乖離を利得とすることでゼロ和ゲームになる

		キーパー					
		右	左			右	左
キッカー	右	(0.9, 0.1)	(0.5, 0.5)	キッカー	右	(0.4, -0.4)	(0 , 0)
	左	(0.3, 0.7)	(0.6, 0.4)		左	(-0.2, 0.2)	(0.2, -0.1)

- ゲームの利得から定数を引いても、ゲームの解は変化しないことが分かっている(期待効用原理)

囚人のジレンマ, 調整ゲームは非ゼロ和ゲーム

囚人ジレンマ

		協力		非協力	
		協力	非協力	協力	非協力
協力	協力	2	2	-1	3
	非協力	3	-1	0	0

調整ゲーム

		2	
		A	B
1	A	(2, 2)	(0, 0)
	B	(0, 0)	(1, 1)

チキンゲーム(10万円を分ける交渉)

どれも非ゼロ和ゲーム

		2	
		妥協	強硬
1	妥協	(5, 5)	(2, 8)
	強硬	(8, 2)	(0, 0)

ここに示した非ゼロ和ゲームには、ゼロ和ゲームにはない特徴がある。それは？

非ゼロ和ゲームとWIN-WIN

- 囚人のジレンマ, 調整ゲーム, チキンゲームにはゼロ和ゲームにはない特徴がある.
- 上記のゲームでは, ある結果より, 別の結果が, プレイヤー全員の利得を大きくしている
 - いわゆるwin-winの状態がある
 - それはナッシュ均衡であるときもあり(チキン, 調整), そうでないときもある(囚人のジレンマ)
- もちろん非ゼロ和ゲームでも, 一方の利得が上がれば, 一方の利得が下がるゲームもある
 - 競争的なゲームと呼ばれる

黎明期のゼロ和ゲームの分析: いかに「競争」に勝つか

非ゼロ和ゲーム以降の分析: 時には「協調」し, いかにWIN-WINにするか, という目的が加わった.

ゼロ和ゲームとマキシミニ戦略

- 現在のゲーム理論の解はナッシュ均衡である \Rightarrow Nash(1951)
- では von Neumann and Morgenstern (1947) は何をゼロ和ゲームの解と考えていたのか？

▶ マキシミニ(maxmin)戦略

- ▶ 自分の戦略に対して、相手が最小の(最悪の)利得を与える戦略を選ぶと考えて、それを最大にする戦略

プレイヤー1のマキシミニ戦略は？

		2	
		A	B
1	A	(2, -2)	(0, 0)
	B	(0, 0)	(-1, 1)

1がAを選んだ時、利得が最小となるのは $\Rightarrow 0$

1がBを選んだ時、利得が最小となるのは $\Rightarrow -1$

Aがプレイヤー1のマキシミニ戦略！

ゼロ和ゲームでは、マキシミニ戦略＝ナッシュ均衡

- 初期のゲーム理論のもっとも基本となる定理がミニマックス定理(minimax theorem)である
- この定理は、自分がマキシミニ戦略を選んだ時に、その利得を最小にするのは、相手のマキシミニ戦略となる、ことを示している。
- このことからゼロ和ゲームでは、マキシミニ戦略を選び合うことはナッシュ均衡になることが分かる(下記説明参照)

		2	
		A	B
1	A	(2, -2)	(0, 0)
	B	(0, 0)	(-1, 1)

プレイヤー1のマキシミニ戦略はA

- Aが1のマキシミニ戦略
 - ミニマックス定理⇒1がAを選ぶ時、2のマキシミニ戦略Bは、1の利得を最小にしている
- ⇒2が戦略を変えると、Aの利得は(最小じゃなくなるので)増加する
 ⇒Bの利得は減少する(ゼロ和ゲームだから)





















なおマキシミニ戦略、ミニマックス定理は、混合戦略を用いる場合が問題の核心となるが、ここでは省略する

ゼロ和ゲームと非ゼロ和ゲーム

- 非ゼロ和ゲームではマキシミニ戦略はナッシュ均衡とは限らない
- すなわち、相手がマキシミニ戦略を選んでいる時、自分にはマキシミニ戦略より良い戦略があることがある
 - もはやマキシミニ戦略を選ぶ理由はない
- 現在のゲームの解はナッシュ均衡

ゼロ和ゲームは、ゲーム理論を応用しやすいクラスである

- ▶ 自分がマキシミニ戦略を選んでいるとき、もし相手がマキシミニ戦略を選ばなくても、自分の利得は増加する
 - ▶ 非ゼロ和ゲームのナッシュ均衡ではこれは言えない
 - ▶ ナッシュ均衡は、相手がそのナッシュ均衡戦略を選んでもくれないとダメ

	Family Mall	A		B	
セレブ					
A	 	 	 	 	 
		200	400	600	300
B	 	 	 	 	 
		300	600	100	200

- セレブは、ファミモの支配戦略を読んでBを選ぶ
- しかし、ファミモが(クレージーで)Bを選ぶなら、Aを選んだほうが良い

まとめ

- ゼロ和ゲームは相手と勝ち負けを競う
- 非ゼロ和ゲームは、競争だけではなく、協力や協調を分析する
 - 相手に勝つためだけではなく、双方が得をしながら自分の利得が多くなる方法を考えることが重要
 - 囚人のジレンマ, 交渉, 弱虫ゲーム, 調整ゲーム

個人的な見解であるが

- ゼロ和ゲーム(競争的ゲーム)は必勝戦略を探すゲームであり、個人の意思決定・個人の最適化に近いと言える。将棋の強いプログラム(電腦戦)などで分かるように、技術的な問題は「最適な解を探すための工夫」であるように感じる
- これに対し、調整・協調の非ゼロ和ゲームは、最適化とは考え方の異なるゲーム理論的特徴を強く持っている。繰り返し囚人のジレンマの実験(アクセルロード等)でも分かるように、必ずしも複雑なプログラムが強いわけではなく、協調や調整のための単純な「仕掛け」が必要とされる。