１０．不完備情報の戦略形ゲーム

不確実性を扱うゲーム

- 完備情報ゲーム
  - 相手や自分の利得が完全に分かるゲーム
  - 相手の「行動」が分からなくてもよい－不完全情報
  - 戦略形ゲームはそもそも，相手の行動が分からない
  - 確率的な行動をとる場合もある－混合戦略
  - 完全情報と完備情報を区別する
- 不完備情報ゲーム
  - 相手や自分の利得が完全には分からない
  - 相手の好みが分からない
  - ある戦略をとったときの相手と自分の正確な利益やコストが算出できない

不完備情報ゲーム

- 相手（または，かつ）自分の利得が，不確実
  - 確率的に推測する
- 情報の非対称性
  - 自分と相手の持っている情報が同じであると，相手と自分の推測は同じ
  - 異なる場合に多くの問題－－情報の非対称性
  - 売り手と買い手（新商品の性能，中古品品質）
  - 依頼人と代理人
  - 専門家と素人

モデル34: I市コンビニ戦争PART7

- 2つのコンビニ:セレブとファミモ
- 同時にA駅かB駅かに出店する
- 両駅の利用客は，基本的には600人
- 別の場所に出店した場合⇒600人を獲得
- 同じ駅に出店した場合，900人の客を2つのコンビニが取り合う

- セレブには2つのタイプがある
  - タイプA:A駅で競争すると強い
  - タイプB:B駅で競争すると強い

■ セレブがタイプAの場合 ■ A駅に両方が出店 ⇒セレブ750人，ファミモ150人 ■ B駅に両方が出店 ⇒セレブ・ファミモ共に450人	■ セレブがタイプBの場合 ■ A駅に両方が出店 ⇒セレブ・ファミモ共に450人 ■ B駅に両方が出店 ⇒セレブ750人，ファミモ150人

2つのタイプに対する利得行列

セレブがタイプAの場合

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(750,150)	(600,600)
B駅	(600,600)	(450,450)

セレブがタイプBの場合

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(450,450)	(600,600)
B駅	(600,600)	(750,150)

- セレブは自分のタイプを分かっているとする.
- ファミモは，セレブを以下の確率で推測している:
  - タイプAである確率1/3
  - タイプBである確率2/3

不完備情報ゲームの戦略と解

- 異なるタイプのプレイヤーは，それぞれが行動を選ぶ

セレブの戦略

（A駅, A駅）　タイプAはA駅，タイプBもA駅を選ぶ

（A駅, B駅）　タイプAはA駅，タイプBはB駅を選ぶ

（B駅, A駅）　タイプAはB駅，タイプBはA駅を選ぶ

（B駅, B駅）　タイプAがB駅，タイプBもB駅を選ぶ

不完備情報の利得行列

セレブがタイプA

ファミモ ＼ セレブ	A駅	B駅
A駅	(750,150)	(600,600)
B駅	(600,600)	(450,450)

セレブがタイプB

ファミモ ＼ セレブ	A駅	B駅
A駅	(450,450)	(600,600)
B駅	(600,600)	(750,150)

ファミモ ＼ セレブ	A駅	B駅
(A駅, A駅)	((750, 450), 350)	((600, 600), 600)
(A駅, B駅)	((750, 600), 450)	((600, 750), 300)
(B駅, A駅)	((600, 450), 500)	((450, 600), 550)
(B駅, B駅)	((600, 600), 600)	((450, 750), 250)

不完備情報の利得行列—利得の計算方法

セレブがタイプA

ファミモ＼セレブ	A駅	B駅
A駅	(750,150)	(600,600)
B駅	(600,600)	(450,450)

セレブがタイプB

ファミモ＼セレブ	A駅	B駅
A駅	(450,450)	(600,600)
B駅	(600,600)	(750,150)

- セレブは自分のタイプを認識できる.
- ファミモは，セレブを確率で推測

  タイプA : 1/3

  タイプB : 2/3

ファミモ＼セレブ	A駅	B駅
(A駅，A駅)	((750, 450), 350)	
(A駅，B駅)		
(B駅，A駅)		
(B駅，B駅)		

セレブの利得
(750,450)
左側がタイプAの利得
右側がタイプBの利得

ファミモの利得
セレブがタイプAなら150
セレブがタイプBなら450
期待値で計算

1/3×150+2/3×450=350

不完備情報の利得行列ーもう1つ

セレブがタイプA

ファミモ ＼ セレブ	A駅	B駅
A駅	(750,150)	(600,600)
B駅	(600,600)	(450,450)

セレブがタイプB

ファミモ ＼ セレブ	A駅	B駅
A駅	(750,150)	(600,600)
B駅	(600,600)	(450,450)

- セレブは自分のタイプを認識できる.
- ファミモは，セレブを確率で推測

  タイプA：1/3

  タイプB：2/3

ファミモ ＼ セレブ	A駅	B駅
(A駅，A駅)	((750, 450), 350)	
(A駅，B駅)	((750, 600), 450)	
(B駅，A駅)		
(B駅，B駅)		

セレブの利得(750,600)
左側がタイプA
右側がタイプB

ファミモの利得
セレブがタイプAなら150
セレブがタイプBなら600
期待値で計算

1/3×150+2/3×600=450

不完備情報の利得行列

セレブがタイプA

ファミモ＼セレブ	A駅	B駅
A駅	(750,150)	(600,600)
B駅	(600,600)	(450,450)

セレブがタイプB

ファミモ＼セレブ	A駅	B駅
A駅	(450,450)	(600,600)
B駅	(600,600)	(750,150)

ファミモ＼セレブ	A駅	B駅
(A駅，A駅)	((750, 450), 350)	((600, 600), 600)
(A駅，B駅)	((750, 600), 450)	((600, 750), 300)
(B駅，A駅)	((600, 450), 500)	((450, 600), 550)
(B駅，B駅)	((600, 600), 600)	((450, 750), 250)

演習　不完備情報ゲームの利得行列

- 以下の不完備情報ゲームの利得行列を作成せよ
- プレイヤー1：タイプAとタイプBの2つのタイプ
- プレイヤー1自分のタイプを分かっているとする.
- プレイヤー2はプレイヤー1を以下の確率で推測
  - タイプAである確率1/4
  - タイプBである確率3/4

プレイヤー1がタイプA

1 \ 2	L	R
U	(0, 8)	(16,16)
D	(8,16)	(8 , 0)

プレイヤー1がタイプB

1 \ 2	L	R
U	(4, 4)	(4 ,0)
D	(12, 12)	(0,16)

解答　不完備情報ゲームの利得行列

1 \ 2	L	R
(U , U)	((0 , 4) , 5)	
(U , D)		
(D , U)		
(D , D)		

不完備情報ゲームの解はベイズナッシュ均衡

- 完備情報の解はナッシュ均衡
  - すべてのプレイヤーが，最適反応戦略を選びあう
- ベイズナッシュ均衡
  - すべてのプレイヤーのすべてのタイプが，最適反応戦略を選びあう戦略の組

- ベイズナッシュ均衡の求め方
  - これまでと同じ
  - すべてのプレイヤーのすべてのタイプに対して，最適反応戦略を求めていけば良い

ベイズナッシュ均衡を求める（1）

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
（A駅，A駅）	((750, 450), 350)	((600, 600), 600)
（A駅，B駅）	((750, 600), 450)	((600, 750), 300)
（B駅，A駅）	((600, 450), 500)	((450, 600), 550)
（B駅，B駅）	((600, 600), 600)	((450, 750), 250)

タイプAのセレブの最適反応戦略を求める
（セレブの左側の利得（赤色）に注目）

ファミモがA駅を選択すると？　A駅が最適反応

ファミモがB駅を選択すると？　A駅が最適反応

ベイズナッシュ均衡を求める(2)

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
（A駅，A駅）	((750, 450), 350)	((600, 600), 600)
（A駅，B駅）	((750, 600), 450)	((600, 750), 300)
（B駅，A駅）	((600, 450), 500)	((450, 600), 550)
（B駅，B駅）	((600, 600), 600)	((450, 750), 250)

タイプBのセレブの最適反応戦略を求める
（セレブの左側の利得(青色)に注目）

ファミモがA駅を選択すると？　B駅が最適反応
ファミモがB駅を選択すると？　B駅が最適反応

ベイズナッシュ均衡を求める(3)

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
(A駅, A駅)	((750, 450), 350)	((600, 600), 600)
(A駅, B駅)	((750, 600), 450)	((600, 750), 300)
(B駅, A駅)	((600, 450), 500)	((450, 600), 550)
(B駅, B駅)	((600, 600), 600)	((450, 750), 250)

ファミモの最適反応戦略を求める
(ファミモの利得(黒色)に注目)

セレブが(A駅, A駅)を選択すると?
(すなわち, タイプAがA駅, タイプBもA駅を選択すると?)

B駅が最適反応

ベイズナッシュ均衡を求める(4)

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
(A駅, A駅)	((750, 450), 350)	((600, 600), 600)
(A駅, B駅)	((750, 600), 450)	((600, 750), 300)
(B駅, A駅)	((600, 450), 500)	((450, 600), 550)
(B駅, B駅)	((600, 600), 600)	((450, 750), 250)

すべてのプレイヤーの，すべてのタイプが最適反応戦略を選んでいる戦略の組がベイズナッシュ均衡

セレブはタイプAがA駅，タイプBがB駅を選ぶ．
ファミモはA駅を選ぶ

セレブは自分の品揃えが得意な方を選んでいる！

結果の分析と解釈

セレブがタイプA

ファミモ＼セレブ	A駅	B駅
A駅	(750,150)	(600,600)
B駅	(600,600)	(450,450)

セレブがタイプB

ファミモ＼セレブ	A駅	B駅
A駅	(450,450)	(600,600)
B駅	(600,600)	(750,150)

- セレブは自分のタイプを認識できる.
- ファミモは，セレブを確率で推測

  タイプA : 1/3

  タイプB : 2/3

ベイズナッシュ均衡

セレブはタイプAがA駅，タイプBがB駅を選ぶ.
ファミモは，A駅を選ぶ

よく見ると？
タイプAのセレブは「A駅」が支配戦略
タイプBのセレブは「B駅」が支配戦略

→

どのプレイヤーのどのタイプも，支配戦略があるときは，ベイズナッシュ均衡ではそれを選ぶ

演習　ベイズナッシュ均衡を求める

前回演習の利得行列におけるベイズナッシュ均衡を求めてみよ.

1 \ 2	L	R
(U , U)	((0 , 4) , 5)	((16, 4) , 4)
(U , D)	((0 ,12) , 11)	((16, 0) , 16)
(D , U)	((8 , 4) , 7)	((8 , 4) , 0)
(D , D)	((8 ,12) , 13)	((8 , 0) , 12)

- 今度はどのプレイヤーのどのタイプにも支配戦略はない.
- 結果はどうなるだろうか？

ちなみに元のゲームは？

- プレイヤー1は自分のタイプが分かる.
- ファミモは，セレブを確率で推測

タイプA : 1/4

タイプB : 3/4

プレイヤー1がタイプA

1 \ 2	L	R
U	(0, 8)	(16,16)
D	(8,16)	(8 , 0)

プレイヤー1がタイプB

1 \ 2	L	R
U	(4, 4)	(4 ,0)
D	(12, 12)	(0,16)

不完備情報ゲームにおけるタイプとは？

- 不完備情報における「タイプ」とはプレイヤーの属性ではなく，持っている情報の違いによって生じる．
- 異なる情報を持っているプレイヤーが，異なる「タイプ」になる．
- プレイヤーの属性が異なっていても，情報を持っていなければ，同じタイプと考える．

- 先ほどのゲーム：A駅に強いセレブとB駅に強いセレブ
- セレブは，自分の属性を分かっていた⇒タイプA,タイプB
- もし，セレブは自分の属性が分からず，ファミモがそれを知っていたらどうなるのだろうか？
- セレブは，自分の属性を以下の確率で推測している：
  - Aに強い確率1/4　　Bに強い確率3/4

10.2 不完備情報の複占競争

不完備情報ゲームの応用

モデル36：輸入販売店の複占競争（不完備情報）

- 企業Aと企業Bの2企業が同質財の競争をしている
- 各企業は，同時に販売量を決定（クールノー競争）
- 企業Aは限界費用に関して2種類のタイプがある
  - タイプH（高費用タイプ） 30
  - タイプL（低費用タイプ） 18
- 企業Bの限界費用は30とする．
- 企業Aは自分のタイプが分かっている．
- 一方，企業Bは企業Aのタイプを知らず，タイプHである確率を1/4，タイプLである確率を3/4で推測している．
- 逆需要関数：両企業の販売量の合計を x，販売価格をpとするとp=120-x であるとする．
- 利潤を最大にするために，企業Aの各タイプと企業Bは，どれだけの商品を販売するか

不完備情報ゲームのクールノー競争

- 企業Aは自分のタイプが分かっている
  - 各タイプごとに，企業Bに対して利潤を最大化
  - 各タイプごとに，企業Bに対する最適反応戦略を選ぶ
- 企業Bは，企業Aのタイプを確率で推測
  - 自分の生産量に対して，企業AのタイプHと企業BのタイプLとの利潤を期待値で計算
- ベイズナッシュ均衡
  - すべてのプレイヤーのすべてのタイプが，最適反応戦略を選びあう戦略の組

企業A タイプH の最適反応戦略

- 各企業は，各タイプ毎に利潤を最大にする
- まず企業AのタイプHの利潤の最大化を考える.
- 企業AタイプHの販売量をx_{AH}, 企業Bをx_Bとする.

- 企業AタイプHの利潤をπ_{AH}とすると，（限界費用は30）

$$\pi_{AH} = \{120 - (x_{AH} + x_B)\} x_{AH} - 30x_{AH}$$

$$= -x_{AH}^2 - x_{AH} x_B + 90x_{AH}$$

- 企業AタイプHは自分と相手である企業Bとの競争（利潤は x_{AH} と x_B の関数）

- 企業AタイプHの最適反応戦略

⇒ (π_{AH} をx_A で微分) =0

⇒ $-2x_{AH} - x_B + 90 = 0$

⇒

$$x_{AH} = -\frac{1}{2} x_B + 45$$

企業AタイプHの最適反応戦略

企業A タイプL の最適反応戦略

- 次に企業Aのタイプ℄Lの利潤の最大化を考える.
- 企業AタイプLの販売量をx_{AL}, 企業Bをx_Bとする.

- 企業AタイプLの利潤をπ_{AL}とすると, (限界費用は18)

$$\pi_{AL} = \{120 - (x_{AL} + x_B)\}\, x_{AL} - 18x_{AL}$$

$$= -x_{AL}^{\,2} - x_{AL}\, x_B + 102x_{AL}$$

- 企業AタイプHは自分と相手である企業Bとの競争(利潤は x_{AL} と x_B の関数)

- 企業AタイプLの最適反応戦略

→ $(\pi_{AL}$ をx_{AL} で微分$) = 0$

→ $$-2x_{AL} - x_B + 102 = 0$$

→ $$x_{AL} = -\frac{1}{2}x_B + 51$$

企業AタイプLの最適反応戦略

企業Bの最適反応戦略

- 最後に企業Bの利潤の最大化を考える.

- 企業Bの利潤をπ_Bとする.
- 限界費用は30
- 企業Bの販売量はx_B

もし企業AがタイプHの場合，利潤は

$$\{120-(x_{AH}+x_B)\}x_B-30x_B$$

もし企業AがタイプLの場合利潤は

$$\{120-(x_{AL}+x_B)\}x_B-30x_B$$

- 企業Bの利潤π_B　：　期待値として計算

$$\pi_B=\frac{1}{4}\times[\{120-(x_{AH}+x_B)\}x_B-30x_B]+\frac{3}{4}\times[\{120-(x_{AL}+x_B)\}x_B-30x_B]$$

$$=-x_B{}^2-(\frac{1}{4}x_{AH}+\frac{3}{4}x_{AL})x_B+90x_B$$

- 企業Bの最適反応戦略 ⇒ (π_B をx_B で微分) $=0$

⇒ $$-2x_B-(\frac{1}{4}x_{AH}+\frac{3}{4}x_{AL})+90=0$$ ⇒ $$x_B=-\frac{1}{8}x_{AH}-\frac{3}{8}x_{AL}+45$$

ベイズナッシュ均衡

■ 最適反応戦略

$$\begin{cases} x_{AH} = -\frac{1}{2}x_B + 45 \\ x_{AL} = -\frac{1}{2}x_B + 51 \\ x_B = -\frac{1}{8}x_{AH} - \frac{3}{8}x_{AL} + 45 \end{cases}$$

これらを連立方程式として解くと

$$x_{AH} = 31.5$$
$$x_{AL} = 37.5$$
$$x_B = 27$$

■ 企業AタイプHの均衡での利潤

$$\pi_{AH} = \{120 - (x_{AH} + x_B)\}\, x_{AH} - 30x_{AH} = 992.5$$

(完備情報では900)

■ 企業AタイプLの均衡での利潤

$$\pi_{AL} = \{120 - (x_{AL} + x_B)\}\, x_{AL} - 18x_{AL} = 1406.25$$

(完備情報では1444)

■ 企業Bの利潤

$$\pi_B = -x_B^2 - \left(\frac{1}{4}x_{AH} + \frac{3}{4}x_{AL}\right) x_B - 90x_B$$

演習　不完備情報のクールノー競争

- 企業Aと企業Bの2企業が同質財の競争をしている
- 各企業は，同時に販売量を決定（クールノー競争）
- 両企業の限界費用は同じで，2種類の場合がある
  - 高費用のとき　30　　　　　低費用のとき　18
- 企業Aは，限界費用（自分も相手も）が分かっている.
- 高費用と分かっている企業をタイプH,低費用と分かっている企業AをタイプLとする.
- 一方，企業Bは限界費用（自分も相手も）が分からず，タイプHである確率を1/4，タイプLである確率を3/4で推測している.
- 逆需要関数：両企業の販売量の合計を x，販売価格をpとするとp=120-x　であるとする.
- 利潤を最大にするために，企業Aの各タイプと企業Bは，どれだけの商品を販売するか.