# ９. 不確実性とゲーム理論

# 不確実性を扱う

- 不確実性を確率で表す
  - 不確実な現象は確率で表す
  - 期待値で比較する
  - 利得の期待値⇒期待効用・期待利得
  - （利得≒効用）≠金額
  - 金額の期待値は期待効用ではない！
    - リスクの影響を考える

# 期待値とリスク

- 「1/2の確率で100万円が当たり，1/2の確率で何ももらえない（0円）」という「くじ」があるとする
- あなたは，このくじと「50万円を確実にもらう」ということと，どちらを好むだろうか

「くじ」の期待値

½ ×100万円 + ½ ×0= 50万円

期待値と同じ金額を確実にもらうことは同値ではない

- 50万円を確実にもらうことを好む人　―　リスク回避的
- 「くじ」を好む人　―　リスク選好的
- 同値（無差別）な人　― リスク中立的

# 確実性同値とリスクプレミアム

- 「くじ」より50万円を確実にもらうことを好むリスク回避的な人も，どこかでくじと同値になる金額はあるはず

くじ ＜ 50万円を確実にもらう

50万円を好む

くじ ＜ 49万円を確実にもらう

49万円を好む

くじ ＝ $x$万円を確実にもらう

等価値

くじ ＞ 1万円を確実にもらう

くじを好む

この$x$を「くじ」と**確実性同値**な金額と呼ぶ

$50\text{-}x$をこの人の**リスクプレミアム**と呼ぶ

# 期待利得(期待効用)

- 金額 $\neq$ 利得
  - 金額に対する「利得(効用)」をうまく測ると,「くじ」に対応する利得と,利得の期待値を等しくできる
- 効用関数(利得を測る関数)$u(x)$を考える.
- 例えば$x$(万円)に対する効用関数として を考えてみよう.

$$u(x) = \left(\frac{x}{100}\right)^{\frac{2}{3}}$$

- 特徴
  - $u(0)=0, \ u(100)=1$
  - このように最低額を0,最高額を1に基準化するとうまくいく

グラフで解説

$$\boxed{u(50) = (0.5)^{\frac{2}{3}} = 0.63}$$

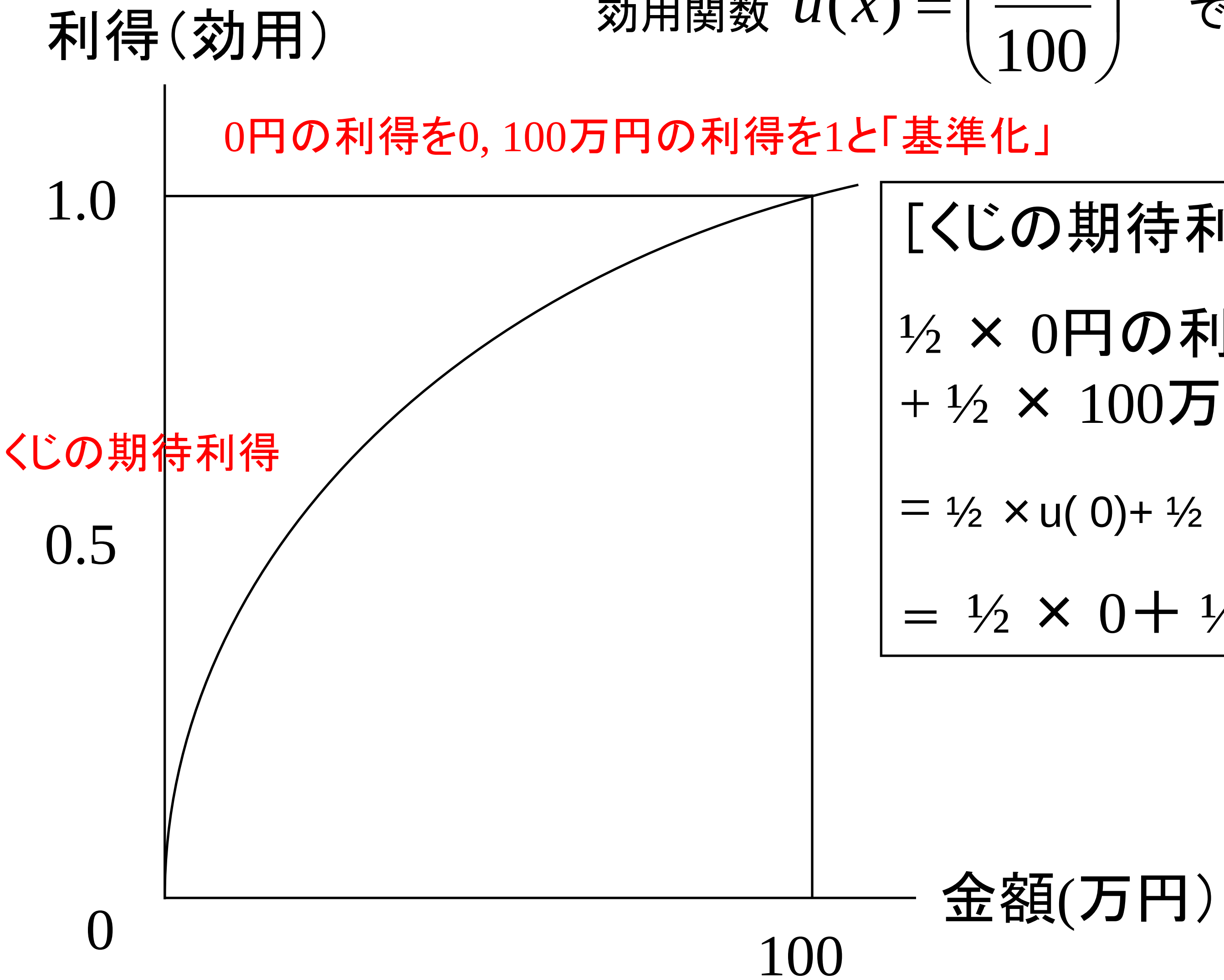
↑50万円の利得は0.5より大きい

$$\boxed{u(35) = (0.35)^{\frac{2}{3}} = 0.5}$$

↑確実性同値額は35万円

# 利得と金額の関係ーリスク回避的な場合

効用関数 $u(x) = \left(\dfrac{x}{100}\right)^{\frac{2}{3}}$ で測ってみよう




［くじの期待利得］

½ × 0円の利得
＋½ × 100万円の利得

＝½ ×u( 0)+ ½ ×u(100)

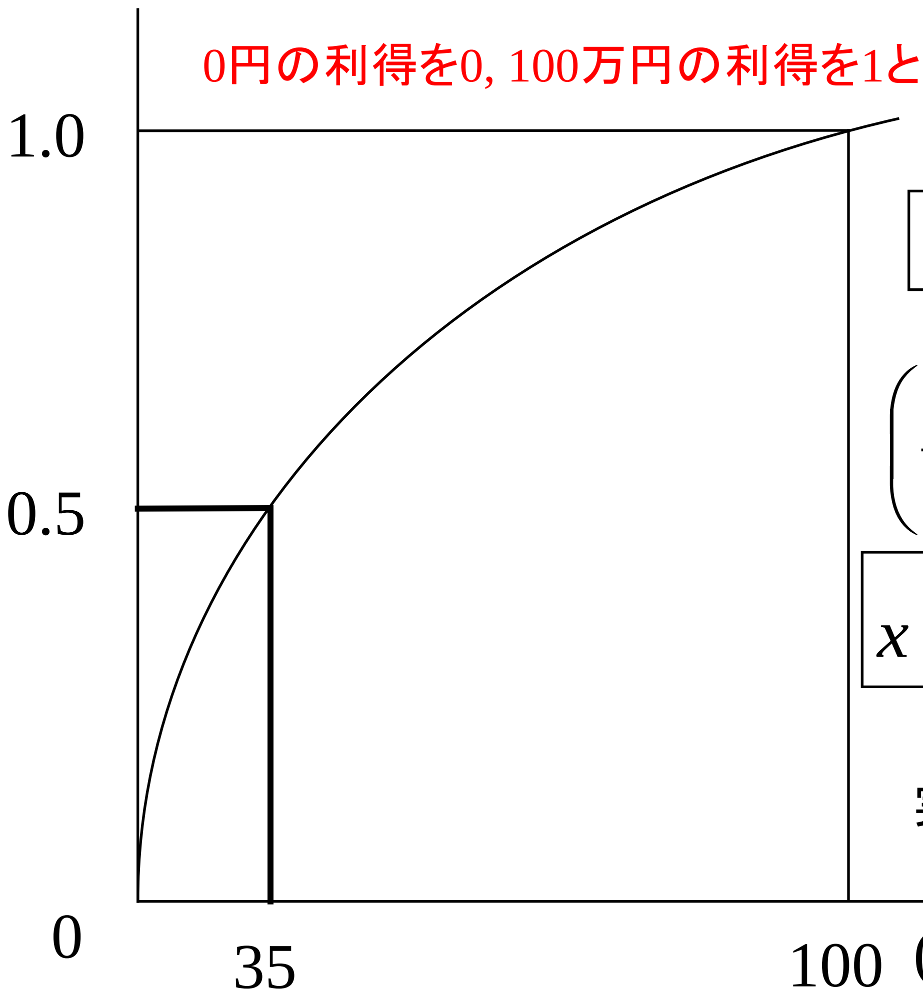
＝ ½ × 0＋ ½ × 1=0.5

# 利得と金額の関係ーリスク回避的な場合

利得（効用）

効用関数 $u(x)=\left(\dfrac{x}{100}\right)^{\frac{2}{3}}$ で測ってみよう

0円の利得を0, 100万円の利得を1と「基準化」




［くじの期待利得］　0.5

$$\left(\dfrac{x}{100}\right)^{\frac{2}{3}}=0.5$$ となる金額は？

$$\boxed{x=(0.5)^{\frac{3}{2}}\times 100=0.35\times 100=35}$$

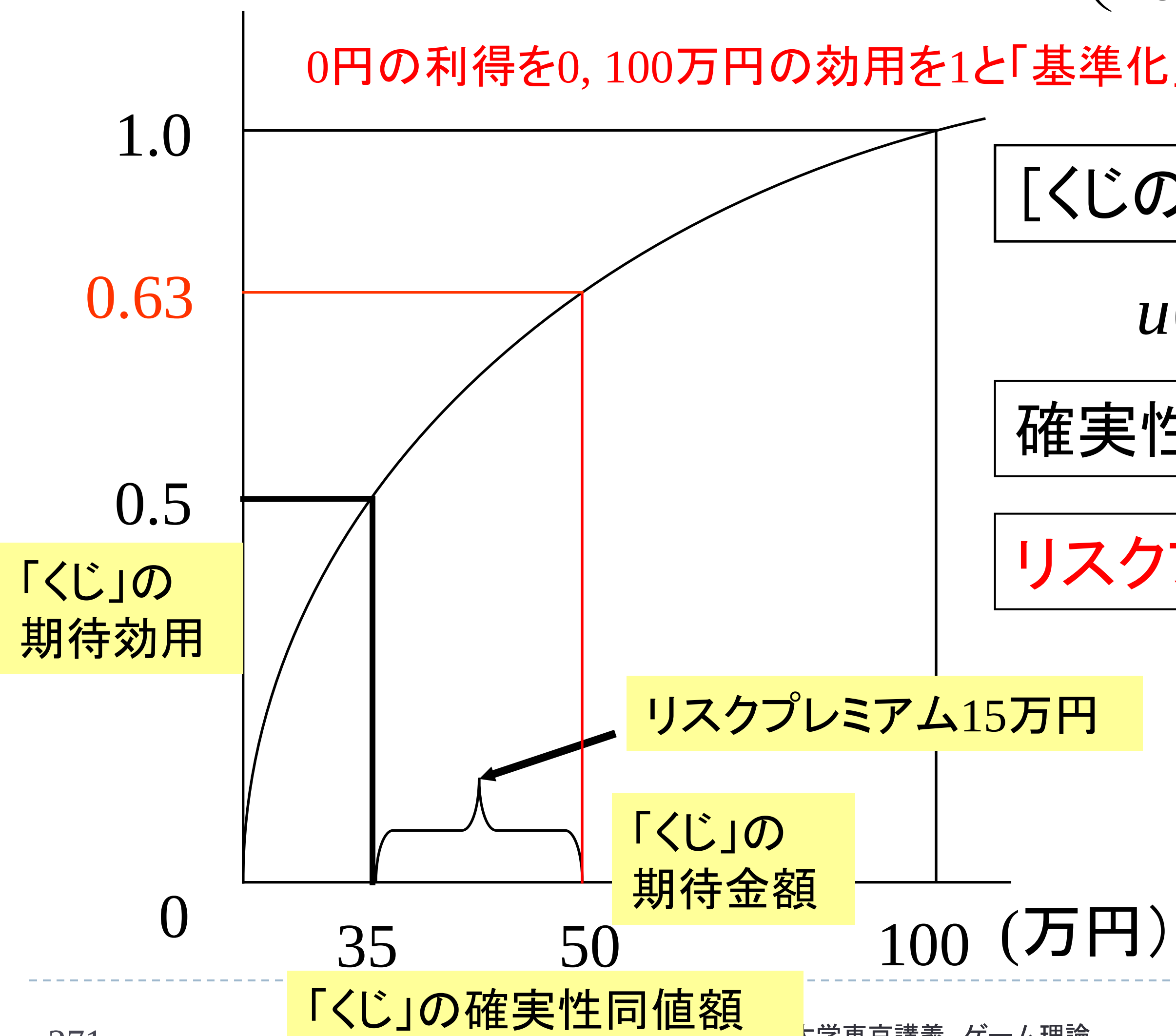
実際に　$u(35)=(0.35)^{\frac{2}{3}}=0.5$

確実性同値額

# 利得と金額の関係ーリスク回避的な場合

効用(利得)

効用関数 $u(x)=\left(\dfrac{x}{100}\right)^{\frac{2}{3}}$ で測ってみよう




[くじの期待効用]　0.5

$$u(35)=(0.35)^{\frac{2}{3}}=0.5$$

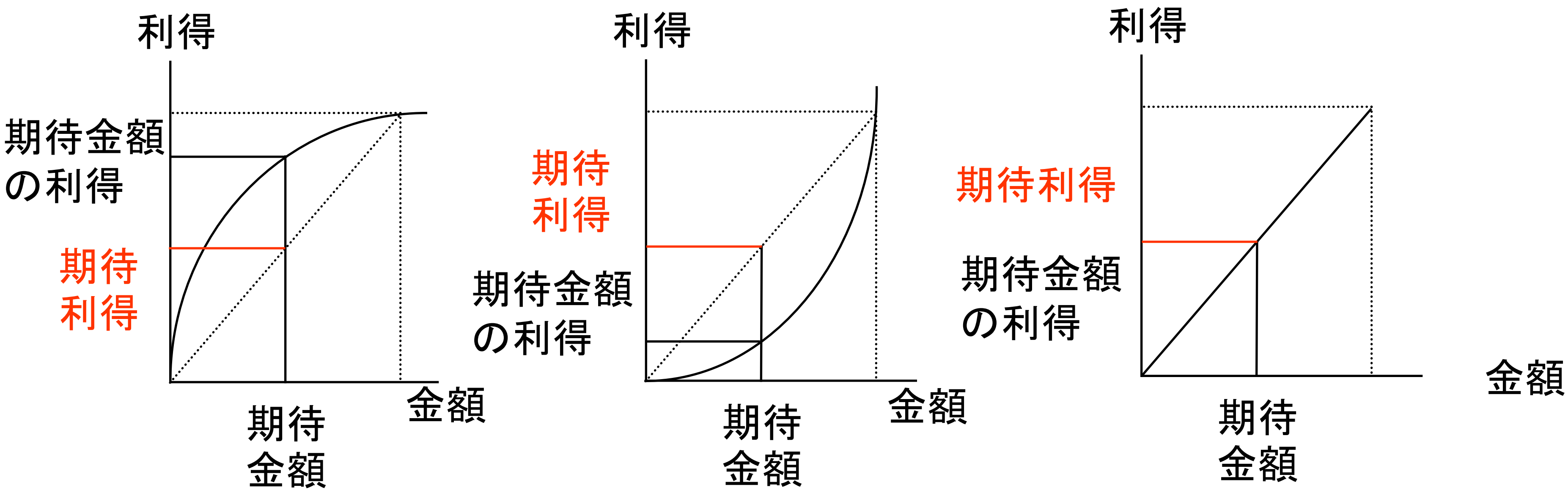
確実性同値額　35万円

リスクプレミアム　15万円

金額50万円(を確実にもらう)効用は？

$$u(50)=(0.5)^{\frac{2}{3}}=0.63$$

# リスク態度と利得のグラフ




## リスク回避的

「期待金額」の利得
＞期待利得

グラフが上に膨らんでいる

金額に対する「限界効用」
が逓減

## リスク選好的

「期待金額」の利得
＜期待利得

グラフが下に膨らんでいる

金額に対する「限界効用」
が逓増

## リスク中立的

「期待金額」の利得
=期待利得

グラフは直線

金額に対する「限界効用」
は一定

# まとめ:期待利得(期待効用)

- 金額 $\neq$ 利得
  - 金額に対する「利得(効用)」をうまく測ると,「くじ」に対応する利得と,利得の期待値を等しくできる
- 効用関数(利得を測る関数)$u(x)$を考える.
- くじの期待金額(金額の期待値)を$x$ ,期待利得(利得の期待値)を$y$とすると…

$$u(z) = y$$

- $u(x)>y$ リスク回避的
- $u(x)=y$ リスク中立的
- $u(x)<y$ リスク選好的

$z$ :確実性同値額

$$z = u^{-1}(y)$$

$z - x$ :*リスクプレミアム*

# 演習　演習

- 「1/2の確率で100万円が当たり，1/2の確率で何ももらえない（0円）」という「くじ」を考える

$$u(x)=\left(\frac{x}{100}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{x}{100}}$$

- 左の効用関数を考える
  - 問題１　「くじ」の期待金額を求めよ
  - 問題２　「くじ」の期待効用を求めよ
  - 問題３　「くじ」の確実性同値額を計算せよ
  - 問題４　「くじ」のリスクプレミアムを計算せよ
  - 問題５　先ほど講義で考えた効用関数⇒とどちらがリスク回避的か？

$$u(x)=\left(\frac{x}{100}\right)^{\frac{2}{3}}$$

# インティブ契約とモラルハザード

# プリンシパルとエージェント問題

- 依頼人（プリンシパル）と代理人（エージェント）
  - 野球選手の大リーグ移籍－選手と代理人
  - メーカーと販売店
  - メーカーと部品を製造する工場
  - 雇用主と被雇用者，上司と部下
- インセンティブ契約とモラルハザード
  - 代理人が努力したかどうかを依頼人が完全に観察（モニタリング）できず，成果のみ観察できるとき
    - 依頼人は代理人の持っている情報を持っていない
    - 情報の非対称性
  - 契約によって，代理人の努力を引き出す
  - インセンティブ契約

# モデル　代理店のチケット販売

- 依頼人は代理店へチケット販売を依頼
- 代理店の要求
  - 固定額報酬　60万円　又は
  - インセンティブ契約　売上げの10%
- 代理店の努力水準と費用
  - 低努力　20万円相当の費用
  - 高努力　50万円相当の費用
- 努力と成果
  - 低努力 チケットは1500枚しか売れない
  - 高努力 80%の確率で2500枚，20%の確率で1500枚
  - チケットは1枚5000円
  - 依頼人の利得（チケットの売上 × 30%）－（代理店への報酬）
  - 代理店の利得 （代理店への報酬）－（努力の費用）
- 依頼人はどちらの報酬を選択すべきか？

# 代理人のインセンティブを考える

- ここで依頼人と代理店は共にリスク中立的であるとして考える
- すなわち期待利得＝期待金額

- 依頼人の期待金額:代理店が高努力をした場合
  - 固定報酬契約

0.8×(5,000×2,500×0.3ー60万円）
　＋0.2 ×(5,000×1,500×0.3ー60万円）
＝0.8×315万円+0.2×165万円＝285万円

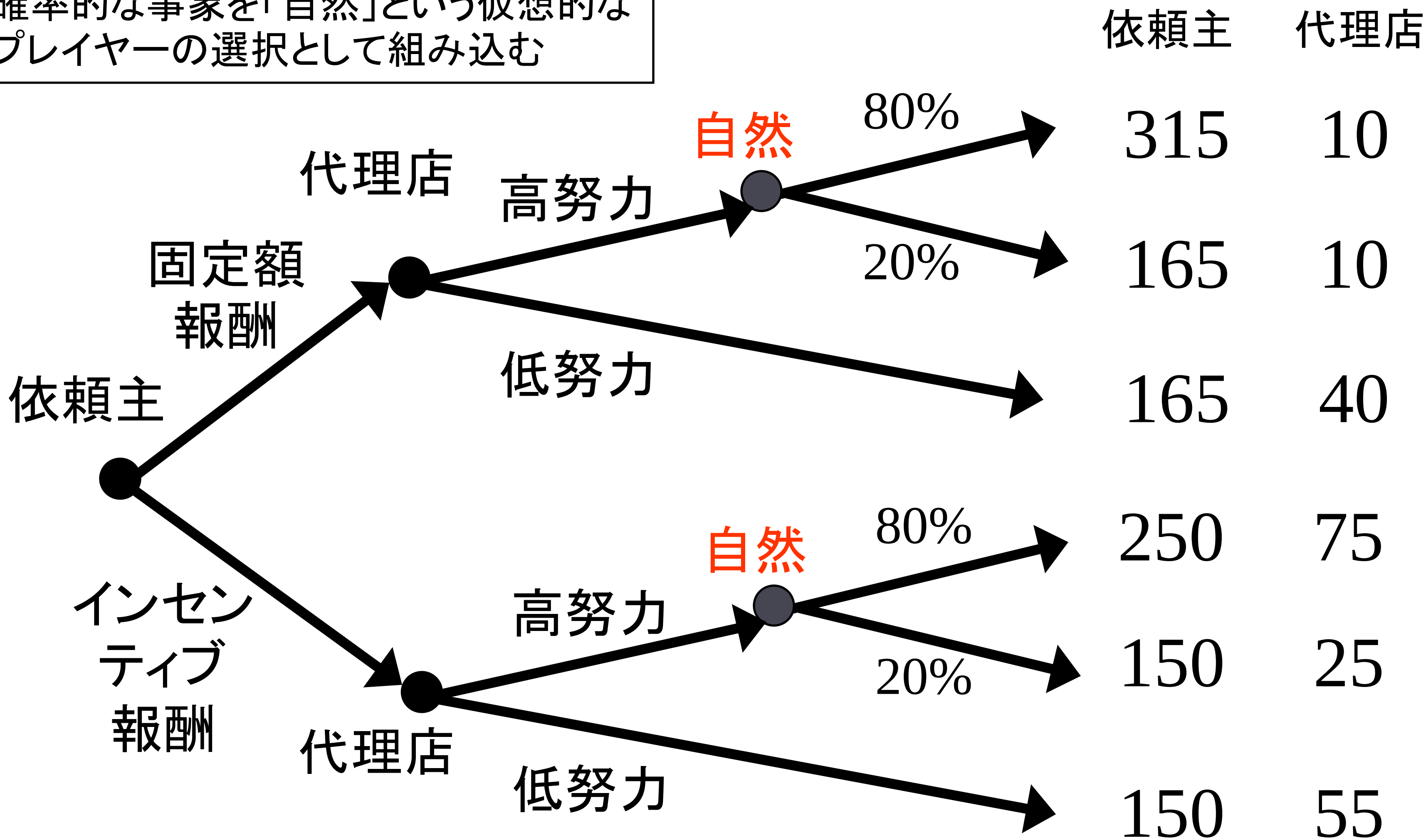
  - インセンティブ報酬契約

0.8×(5,000×2,500×0.3ー 5,000×2,500×0.1）
　＋0.2 ×(5,000×1,500×0.3ー 5,000×1,500×0.1）
＝0.8×250万円+0.2×150万円＝230万円

- 代理店が必ず高い努力をするならば，依頼人は固定額報酬の方が高い利益を得られる
- 代理店の努力インセンティブを無視した議論

# ゲームの木

確率的な事象を「自然」という仮想的なプレイヤーの選択として組み込む

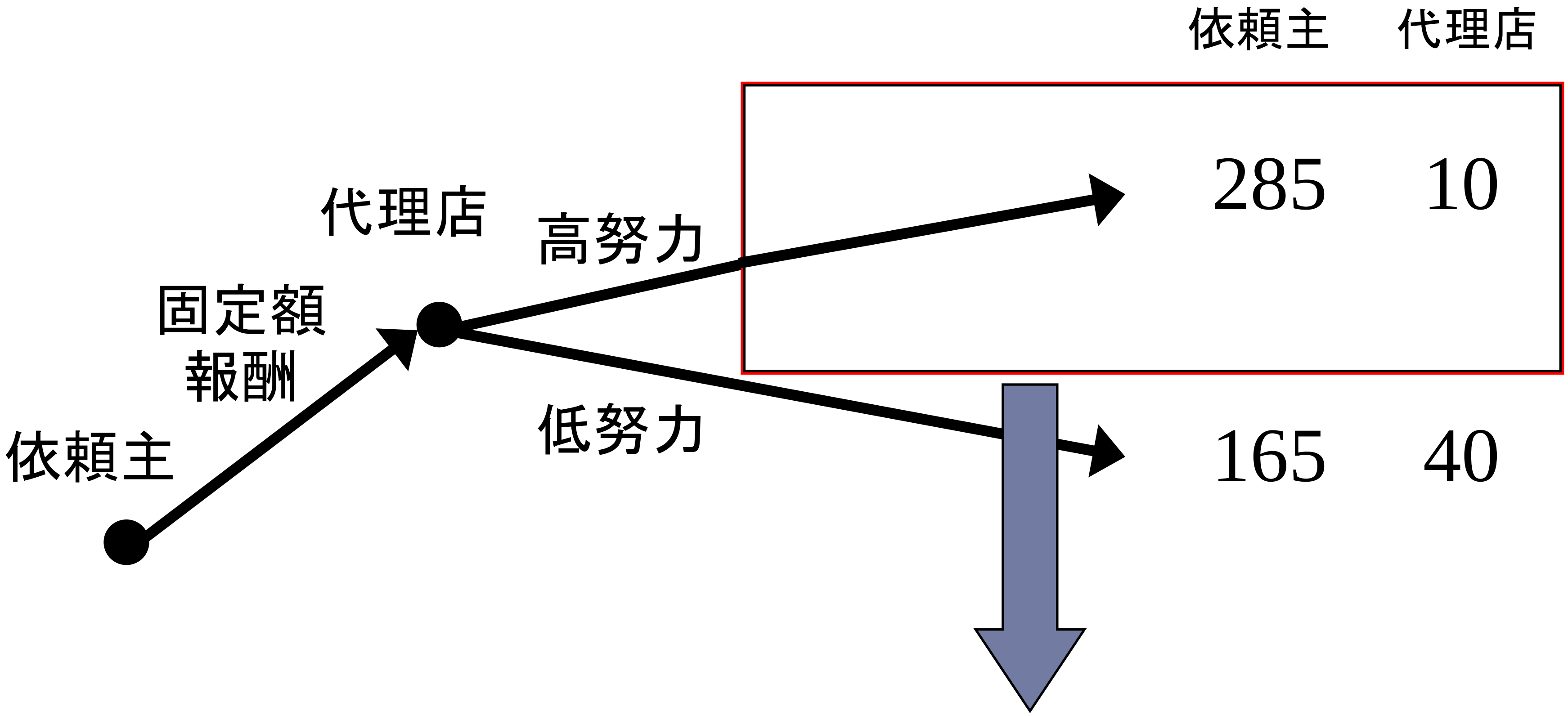



完全情報ゲーム（前のプレイヤーの行動はすべて分かる）

利得の単位 「万円」

バックワードインダクションで解ける！

# 自然の選択を期待利得に換算する

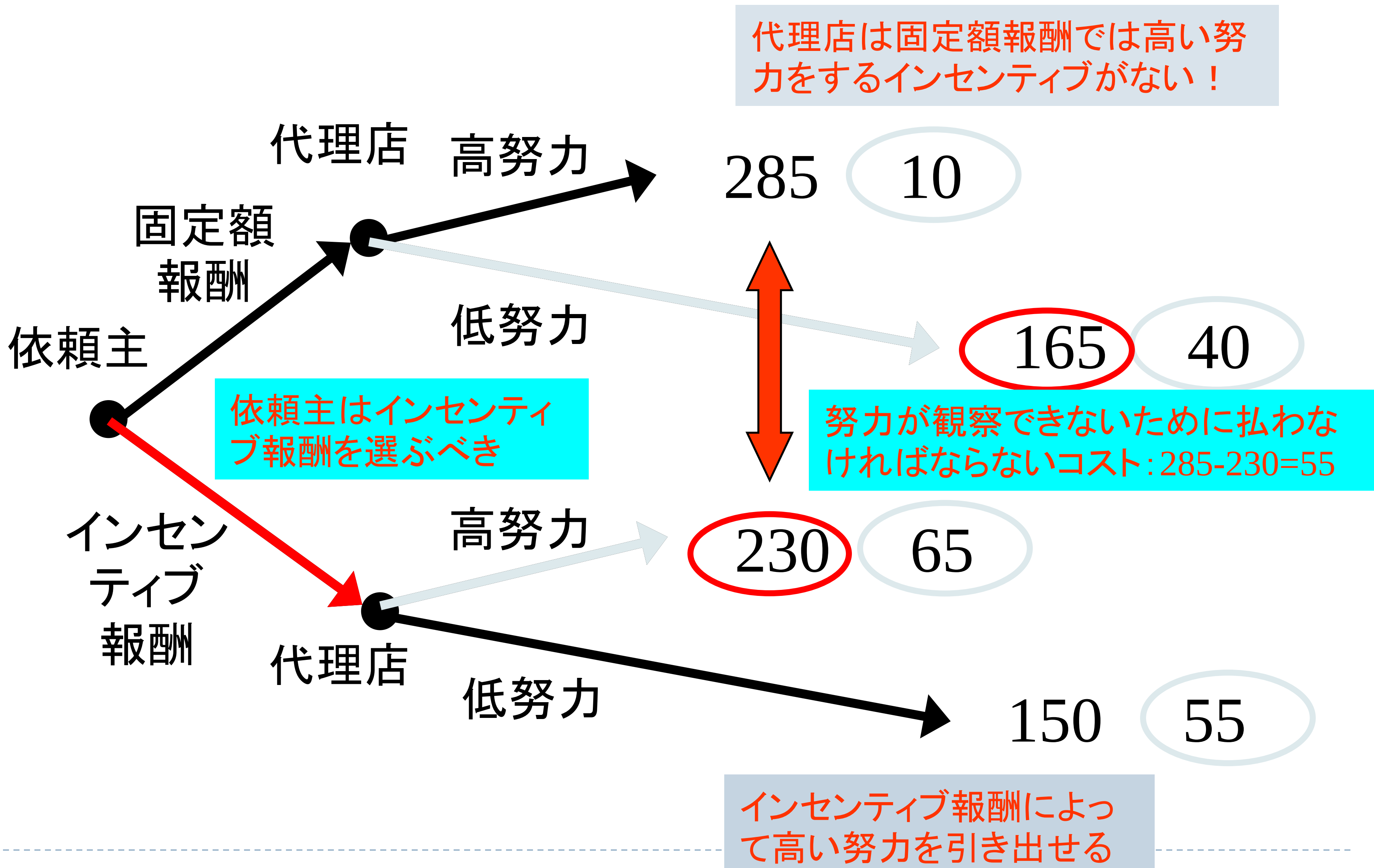



リスク中立的（期待利得＝期待金額）とすると

依頼主の期待利得：0.8 × 315+0.2 × 165=285

代理店の期待利得：0.8 × 10 + 0.2 × 10 =10

# バックワードインダクションで解く



# 情報のための費用

- 情報レントの例:「オークション」
  - 買い手1の評価額 1500円, 買い手2の評価額2500円
  - もし買い手の評価額を観察できたら, 買い手2に直接最後通牒交渉をする⇒2500円で売れる
  - しかし, 買い手の評価額は観察できない
  - オークションをする
  - 売買価格は1500円⇒1000円の情報レント

- 固定額契約ではインセンティブを引き出せない
  - インセンティブ契約が必要⇒期待金額は230万円
- もし相手が努力するかどうかを観察できたなら？
  - 依頼主は固定額契約で285万円を得られる
  - 55万円は, 情報を観察できないために代理人に支払わなければならない費用と考えられる⇒情報レント

# リスクとインセンティブ報酬

- ここまでは代理店も依頼主もリスク中立的と考えた
- もし代理店がリスク回避的ならどうか？
  - 「期待利得」に換算して考える
  - しかし「期待利得」はイメージが沸きにくい．．．
  - 先の「くじ」の例－0円が0，100万円が1，14万円が0.5と言われても
  - 期待利得を確実性同値額に換算し，リスクプレミアムで考える

- 新しく考察すべき点
  - 依頼主はリスク中立的なので同じ
  - 固定額契約では，代理店の報酬は固定している（不確実性がない）ので同じ
  - 代理店のインセンティブ報酬について，リスクプレミアムを考慮する

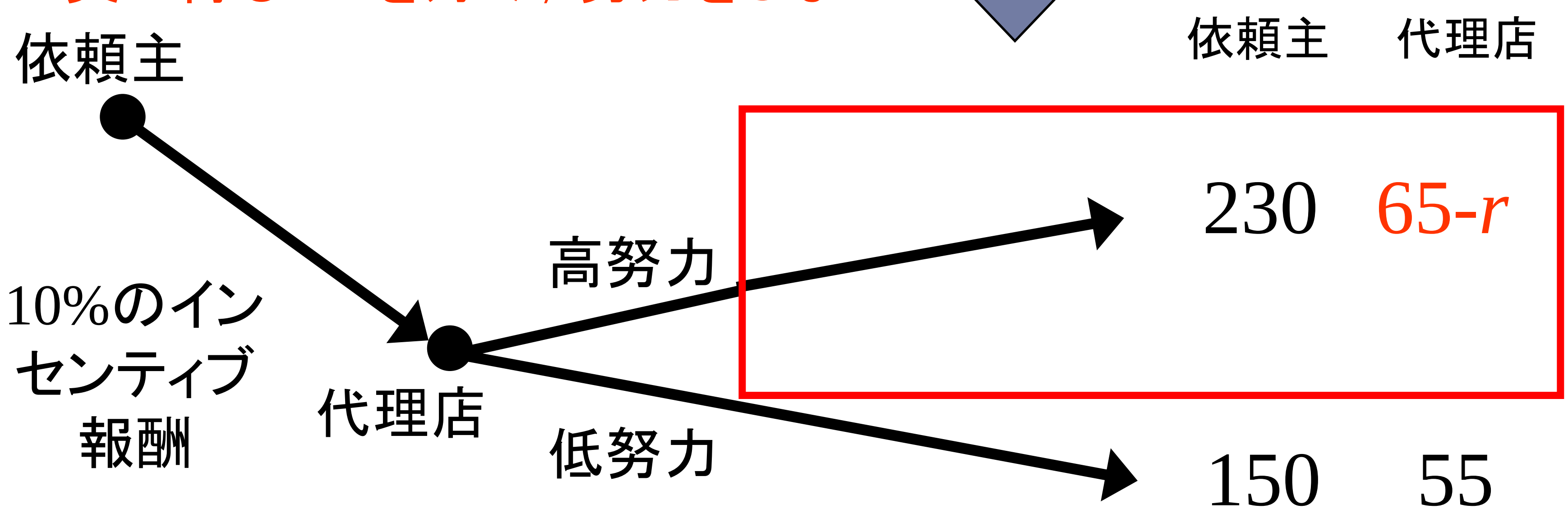
# リスク回避度が高いと努力を引き出せない

- 代理店の期待金額：$0.8 \times 75 + 0.2 \times 25 = 65$
- しかし代理店がリスク回避的ならば，確実性同値額はこれより低いはず

リスクプレミアムを$r$とすると

$r>10$ ならば，代理店は55万円を確実に得ることを好み，努力をしない

代理人のリスク回避度が高いと努力を引き出せない



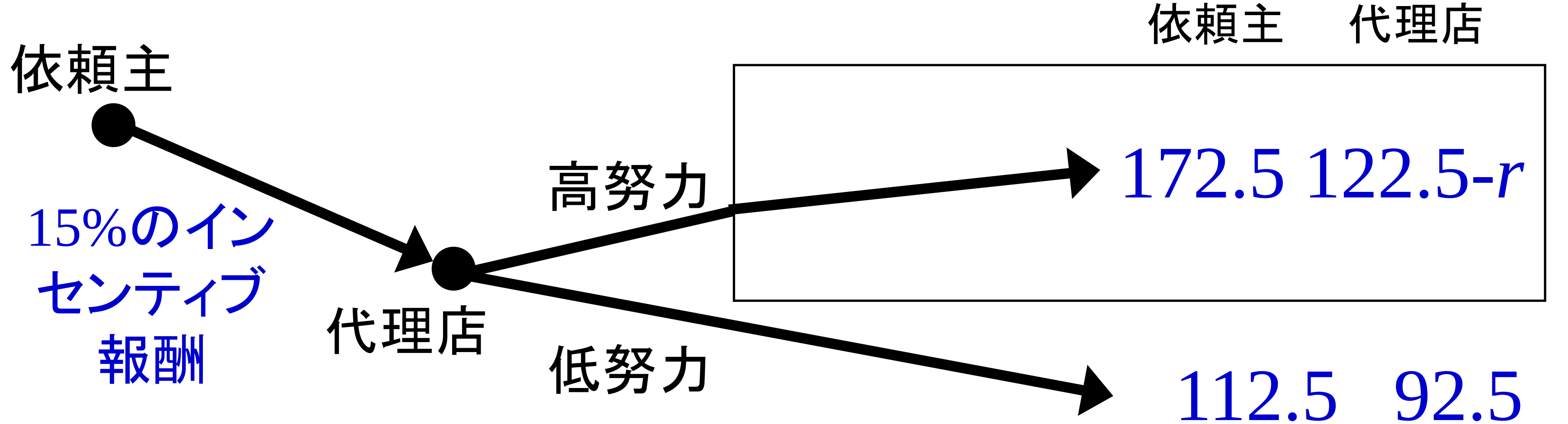
# 報酬額を増加させれば努力を引き出せる

- 代理店の期待金額:0.8×137.5 + 0.2×62.5=122.5
- リスクプレミアムをrとすると，$r<30$ならば代理店の努力を引き出せる

代理店がリスク中立的なときは依頼主の期待利得は230

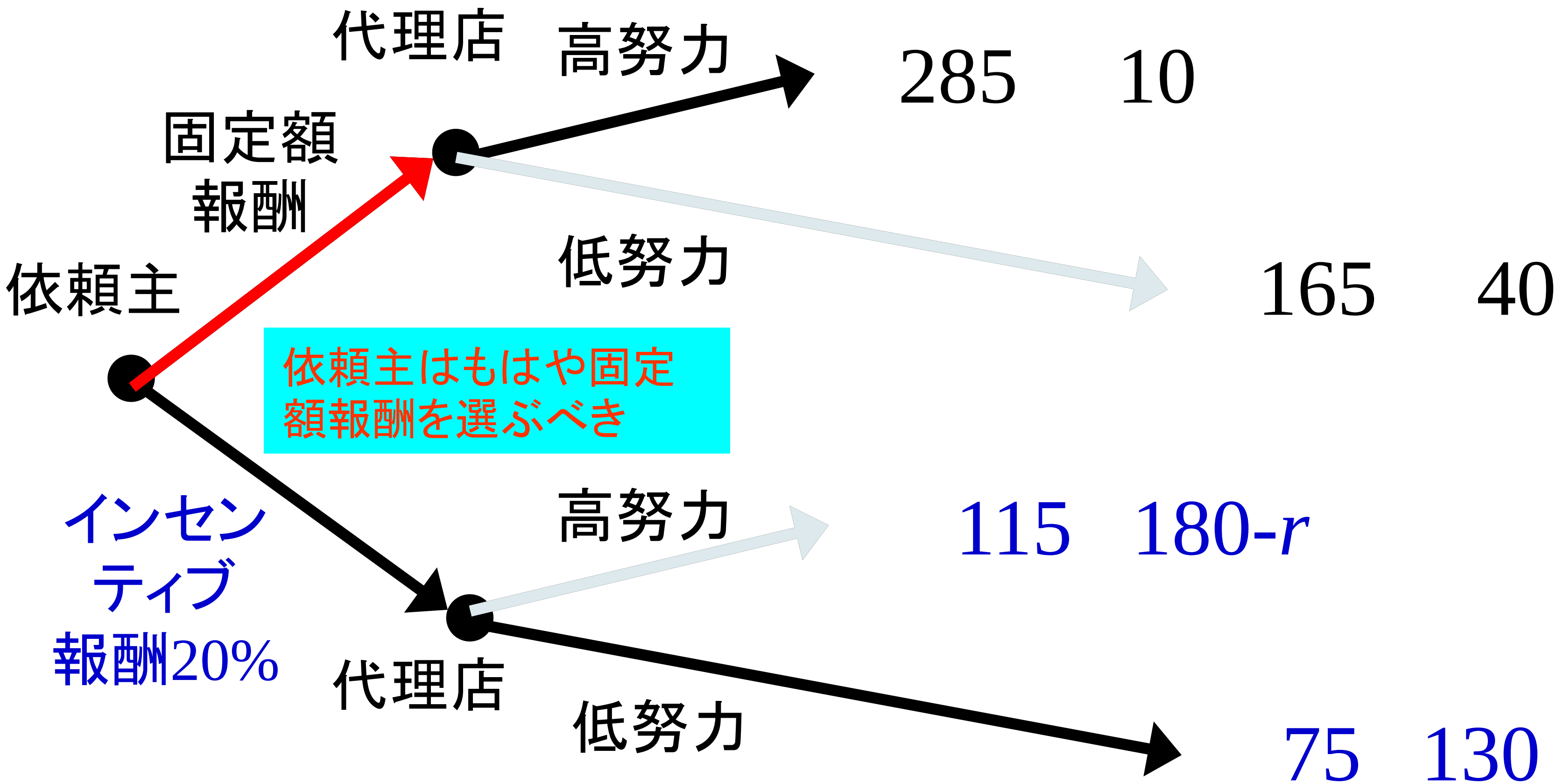
努力を引き出すために依頼主の利得は減少

努力を引き出すために依頼主が支払う情報レントは増加



# リスクプレミアムがさらに大きいと？

インセンティブ報酬を
20%に上げると？




確かに高いリスクプレミアム
(r<50)でも高努力を引き出せる

# インセンティブ報酬まとめ

- 代理人の行動が完全に観察できず，成果だけ観察可能のとき
  - 成果に応じた報酬＝インセンティブ報酬で代理人の努力を引き出せる
- しかし努力と成果が直結せず不確実性が存在する時
  - 依頼人は高努力を引き出すための報酬を上昇させなければならない
  - 情報レントの増加，代理人と依頼人のリスク分担
  - 代理人のリスクプレミアムが高い（リスク回避度が大きい，不確実性の度合いが大きい）ほど，依頼人が負担しなければならないコストは高くなる
  - リスクプレミアムが非常に高いと，固定額報酬の方が良く，インセンティブ報酬が働かない
    - 努力と成果が直結せず，不確実性が大きい場合はダメ