

第4回宿題

- 提出課題を解き kibaco に答を入力して下さい。
- 自習課題は提出する必要はありません。理解を深めるために自習しましょう。

自習課題 4.1. テキスト P95 の演習 3.1 を解きなさい。

自習課題 4.2. テキスト P95 の演習 3.2 を解きなさい。

自習課題 4.3. テキスト P97 の演習 3.3 を解きなさい。

自習課題 4.4. テキスト P98 の演習 3.4 を解きなさい。

提出課題 4.1

図 4.1 について、バックワードインダクションを用いてゲームの解を求めなさい。図において、利得は左から順にプレイヤー 1,2,3 を表し、点の v_{ij} はプレイヤー i の j 番目の意思決定点を表している。各点の上にある数は、意思決定するプレイヤーを表す（したがって v_{ij} の i と一致しているはずである）。

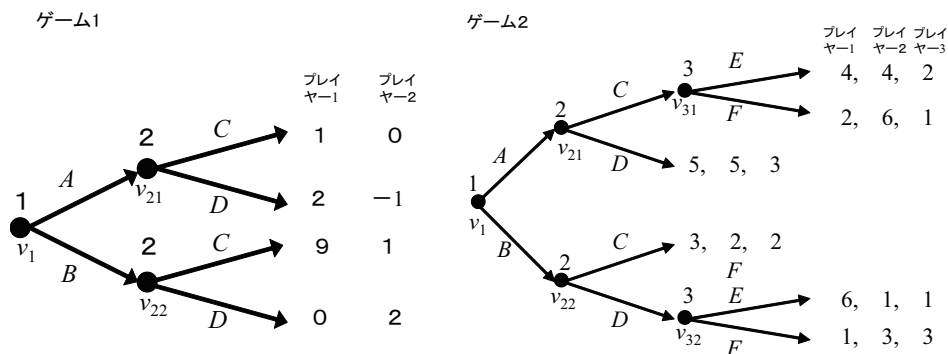


図 4.1: ゲームの解を求める

提出課題 4.2

図 4.2 について、バックワードインダクションを用いてゲームの解を求めなさい。各プレイヤーが、意思決定点で選択する代替案 (x か y か) を答えよ。なお図では利得は左から順にプレイヤー 1,2,3 を表し、点の v_{ij} はプレイヤー i の j 番目の意思決定点を表している。各点の上にある数は、意思決定するプレイヤーを表す（したがって v_{ij} の i と一致しているはずである）。

(入力は kibaco の指示に従って下さい)

提出課題 4.3

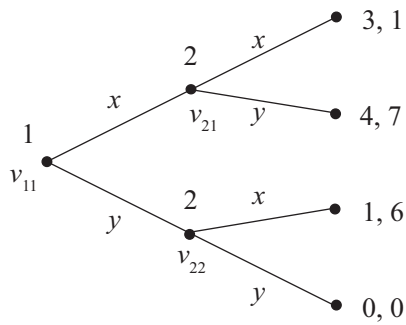
[公平分割問題] ケーキを 2 人で公平に分けるにはどうすれば良いか。ゲーム理論で考えてみよう。

ケース 1: 長さが 1 のケーキがあり、2 人のプレイヤーが先手と後手に分かれる。まず先手が左から長さ x の場所でケーキを切る ($0 \leq x \leq 1$)。先手は、自分の好きなところでケーキを切ってよい。次に後手は左のケーキか、右のケーキかの、どちらか好きなほうを選ぶ。(図 4.3 の上)

ここで自分が得たケーキの長さを利得と考える。先手も後手も、相手のことは考えずに自分の利益を追求すれば、ケーキは上手に分けられることを示したい。次の問いに答えよ。

問 1 このゲームをバックワードインダクションで解くため、後手の最適な戦略から考える。後手は $[] \leq x < []$ なら右を選ぶことが最適反応戦略で、 $[] < x \leq []$ なら左を選ぶ

問 1



問 2 (プレイヤーの順序が不規則なので注意)

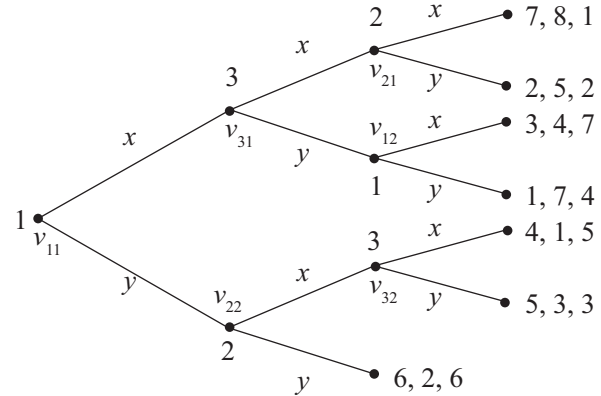


図 4.2: ゲームの解を求める

ことが最適反応戦略である。もし $x = [\quad]$ であれば、右も左も最適反応戦略である。[] に当てはまる数値を小数で答えなさい。

問 2 後手が最適反応戦略を選ぶとする。このとき先手が $0 \leq x < 0.5$ を選ぶと、先手の利得は x になる。先手が $0.5 < x \leq 1$ を選ぶと先手の利得は [] $- x$ になる。 $x = 0.5$ のときは先手の利得は [] になる。 [] に当てはまる数値を小数で答えよ。

問 3 ゲームの結果は先手が $x = [\quad]$ を選び、後手は右と左のどちらを選んでも無差別 (同じ利得) である。 [] に当てはまる数値を小数で答えよ。

ケース 2: 次にケーキの左端に「いちご」があるとし、両方のプレイヤーともケーキにいちごが乗っていると利得が 0.2 だけ増えるとする。いちごの大きさは無視して考え、どんなにケーキを小さく切っても、いちごは左側のケーキに乗っているとしよう。(図 4.3 の下)

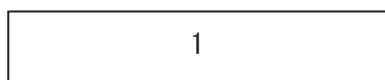
問 4 後手は [] $\leq x < [\quad]$ なら右を選ぶことが最適反応戦略で、 [] $< x \leq [\quad]$ なら左を選ぶことが最適反応戦略である。もし $x = [\quad]$ であれば、右も左も最適反応戦略である。空欄に当てはまる数値を小数で答えなさい。

問 5 後手が最適反応戦略を選ぶとすると、先手が $0 \leq x < 0.4$ を選ぶと先手の利得は $x + [\quad]$ になる。 $0.4 < x \leq 1$ を選ぶと先手の利得は [] $- x$ になる。 $x = 0.4$ のときは先手の利得は [] になる。空欄に当てはまる数値を小数で答えよ。

問 6 ゲームの結果は先手が $x = [\quad]$ を選び、後手は右と左のどちらを選んでも無差別 (同じ利得) である。空欄に当てはまる数値を小数で答えよ。

問 7 ゲームの結果、いちごが乗っていてもケーキは公平に分割できるかどうか述べよ。

ケース 1

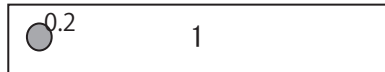


長さ 1 のケーキ
先手が左から x の長さでカットする



後手が左か、右か、を選ぶ
左を選ぶと、後手の利得 x 、先手の利得 $1-x$
右を選ぶと、後手の利得 $1-x$ 、先手の利得 x

ケース 2



長さ 1 のケーキ、いちごが左にのっている
先手が左から x の長さでカットする



後手が左か、右か、を選ぶ
左を選ぶと、後手の利得 $x+0.2$ 、先手の利得 $1-x$
右を選ぶと、後手の利得 $1-x$ 、先手の利得 $x+0.2$

図 4.3: 公平なケーキの分割

提出課題 4.4

展開形ゲームにおいて「プレイヤーが何を知らないか」について考えてみる。まず解説を読んだ後で、その後の問題について答えよ。

図 4.4 における先手（プレイヤー 1）と後手（プレイヤー 2）を考える、利得は左が先手、右が後手である。

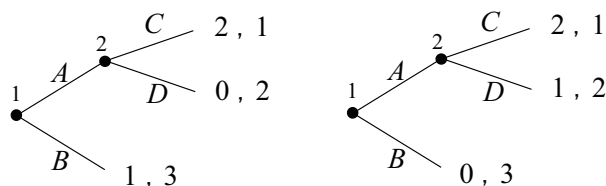


図 4.4: 2つの展開形ゲーム

後手は、自分の選択だけで自分の利得が決まるので、左右のどちらのゲームでも、先手の選択に関係なく C と D のどちらが良いかを決定できる。つまり後手は、先手の利得を知らなくても、常に自分にとって良い選択を決められることが分かる。

これに対して、左のゲームで先手は、

- 後手が C を選べば B より A を選ぶほうが良い
- 後手が D を選べば A より B を選ぶほうが良い

ので、後手が何をを選ぶかによって自分の良い選択が異なる。もし先手が (1) 後手の利得を知っていて、かつ (2) 後手が利得が高くなる方を選ぶ合理的なプレイヤーだと知っていたら、後手は D を選ぶことが先読みできるので、「自分は A より B を選ぶほうが良い」と結論できる。このことから左のゲームでは先手は少なくとも後手の利得が分からなければ自分にとって良い選択は決められないことがわかる。またたとえ後手の利得が分かっても、後手が利得の低い方を選ぶようなクレイジーな奴だと思えば、自分の選択は決まらない。

これに対して右のゲームで先手は、

- 後手が C を選んでも D を選んでも、B より A を選ぶほうが良い

ので、後手が何を選んでも自分の良い選択を決定できる。つまり右のゲームでは先手は後手の利得が分からなくても自分にとって良い選択を決められる。たとえ後手が利得の低い方を選ぶクレイジーな奴でも自分の選択を決められる。

上記を参考に以下の問いに答えよ。

問 1 図 4.5 のゲーム 1 において、先手と後手は相手の利得を知らなければ自分の選択ができな
いかどうかについて答えよ。

問 2 図 4.5 のゲーム 2 において、先手と後手は相手の利得を知らなければ自分の選択ができな
いかどうかについて答えよ。

問 3 図 4.5 のゲーム 3 とゲーム 4 において、後手は C を選んでも D を選んでも利得が同じで
ある。したがって先手は後手の利得が分かったとしても、後手が C を選ぶか D を選ぶか
は分からない。しかし、どちらかのゲームは（後手の選択が決まらなくても）先手は選択
を決定できる。それはどちらであるか、答えよ。

提出課題 4.5

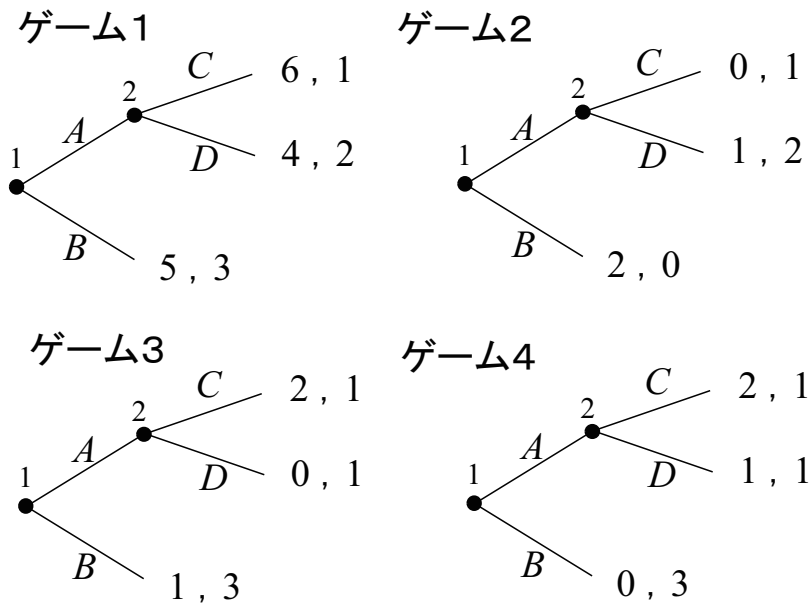


図 4.5: 先手は、後手の選択が分からなくても、最適な選択が可能か？

次のゲームにおいて（バックワードインダクションによる）ゲームの解において、結果が1つに定まるとき、それを求めよ。問題文だけでは答が定まらない場合（2つ以上考えられる場合）もある。その場合は「答が定まらない」と答えよ。

- 問1 部下がミスをした。上司は先にそれを叱るか叱らないかを決め、部下はそれを見て謝るか謝らないかを決める。上司は部下が謝っても謝らなくても、叱らないほうが叱るより良いと考えている。部下は、上司が叱っても叱らなくても、謝るほうが謝らないより良いと考えている。
- 問2 部下がミスをした。上司は先にそれを叱るか叱らないかを決め、部下はそれを見て謝るか謝らないかを決める。上司は部下が謝るならば叱らないほうが叱るより良いと考えていて、謝らないならば叱るほうが叱らないより良いと考えている。部下は、上司が叱っても叱らなくても、謝るほうが謝らないより良いと考えている。
- 問3 部下がミスをした。上司は先にそれを叱るか叱らないかを決め、部下はそれを見て謝るか謝らないかを決める。上司は部下が謝るならば叱らないほうが叱るより良いと考えていて、謝らないならば叱るほうが叱らないより良いと考えている。一方、部下は上司が叱るならば、謝ったほうが謝らないよりよく、叱らないならば謝らないほうが謝るより良いと考えている。
- 問4 アリスと文太は、禅寺かショッピングモールへ行く。アリスはまず禅寺に行くほうがショッピングモールに行くよりも好ましいと考えており、次に同じ禅寺に行くなら、もしくは同じショッピングモールに行くなら2人が一緒に会える方が会えないより良いと思っている。文太はまず2人が一緒に会える方が会えないよりも良いと考えており、次に2人が一緒に会える中で比べると、もしくは会えない中で比べると、自分がショッピングモールに行くほうが禅寺に行くよりも良いと考えている。ここでアリスが先に行動して、それを見て後から文太は行動する。
- 問5 上の問題で、文太が先に行動し、アリスが後から行動する場合はどうか？
- 問6 アリスと文太は、禅寺かショッピングモールへ行く。アリスも文太もまず2人が一緒に会えるほうが会えないよりも良いと考えており、次に2人が一緒に会える中で比べると、もし

くは会えない中で比べると，アリスはできるなら禅寺のほうが良いと考えており，文太はショッピングモール物のほうが良いと考えている．ここでアリスが先に行動して，それを見て後から文太は行動する．

問 7 上の問題で，文太が先に行動し，アリスが後から行動する場合はどうか？