第 17 回宿題

- 提出課題を解き kibaco に答を入力して下さい．
- 自習課題は提出する必要はありません．理解を深めるために自習しましょう．

提出課題 17.1
「賭博黙示録カイジ（福岡伸行著）」の 8 巻と 9 巻に出てくる E カードについて分析する（ざわ…）．渡辺ゼミ 2019 年夏合宿の学生発表に基づいている[1)]
これは皇帝（プレイヤー 1）と奴隷（プレイヤー 2）の以下のようなゲームである．

- プレイヤー 1 は，市民カード（C：Citizen)4 枚と皇帝カード（E：Emperor)1 枚を持つ．
- プレイヤー 2 は，市民カード（C：Citizen)4 枚と奴隷カード（S：Slave)1 枚を持つ．
- プレイヤーは，１つのゲームで，プレイヤーは毎回カードを 1 枚ずつ同時に出して行く．全部で 5 回の勝負がある．
- 基本的には，皇帝カードは市民カードに勝ち，市民カードは奴隷カードに勝ち，奴隷カードは皇帝カードに勝つ．市民カードどうしは引き分けると考える．
- プレイヤー 1 が皇帝カードを出した時に，プレイヤー 2 が奴隷カードを出すことができれば，そのときのみプレイヤー 2 がゲームに勝ち（皇帝を刺す）．それ以外は，プレイヤー 1 がゲームに勝つ．

このルールより

- プレイヤー 1 が皇帝カードを出した時に，プレイヤー 2 が市民カードを出してしまうと，その時点でプレイヤー 1 の勝ちが確定する．
- また，プレイヤー 2 が奴隷カードを出したときにプレイヤー 1 が市民カードを出すと，やはりプレイヤー 1 の勝ちが確定する．

したがって，ここでは皇帝カードか奴隷カードが出た時点でゲームは終わると考える（コミックでは，一応，5 回ともゲームはする）．
ここでゲームに勝つと利得が $+1$，負けると -1 とする．このゲームはプレイヤー 1（皇帝）が絶対的に有利なゲームであるが，その勝つ確率と期待利得を計算したい．そこで市民カードを n 枚であるとし $n = 1, 2, \ldots$ と増やして考える．市民カードが n 枚のときのゲームを G_n，そのときの，プレイヤー 1 の期待利得を v_n，プレイヤー 1 が勝つ確率を w_n を計算する．

市民カード 1 枚のとき

- プレイヤー 1 は，市民カード（C：Citizen)1 枚と皇帝カード（E：Emperor)1 枚，
- プレイヤー 2 は，市民カード（C：Citizen)1 枚と奴隷カード（S：Slave)1 枚

を持っている 2 回のゲームとして，ゲームを分析する．
1 回目の勝負において

- (E, C)（プレイヤー 1 が E，プレイヤー 2 が C を出す）だと，プレイヤー 1 が勝つ．

[1)] Thanks to Hiroki, Mari, Ryousuke and Kurumi.

- (C, S)（プレイヤー 1 が C，プレイヤー 2 が S を出す）でも，プレイヤー 1 が勝つ．
- (E, S)（プレイヤー 1 が C，プレイヤー 2 が S を出す）だと，プレイヤー 2 が勝つ．
- (C, C)（プレイヤー 1 も 2 も C を出す）だと，プレイヤー 2 の勝ちが確定する（2 回目にプレイヤー 2 が勝つ）．

このことから市民カード 1 枚のときのゲーム G_1 は図 17.1 のようになる．

1 \ 2	S	C
E	(-1,1)	(1,-1)
C	(1,-1)	(-1,1)

図 17.1: ゲーム G_1

このゲームには純粋戦略のナッシュ均衡はない．混合戦略のナッシュ均衡は「プレイヤー 1 が E と C を 1/2 ずつ，プレイヤー 2 が E と C を 1/2 ずつ選ぶ」というもので，プレイヤー 1 の期待利得は $v_1 = 0$，プレイヤー 1 が勝つ確率 $w_1 = 1/2$ であることが分かる（混合戦略の求め方は，先週の宿題などを参考にせよ，ただしこの場合は直観的にも明らか）．

もし市民カードが 1 枚なら，ゲームは五分五分...（ざわ ･･･ ）

市民カード 2 枚のとき

次に

- プレイヤー 1 は，市民カード（C：Citizen)2 枚と皇帝カード（E:Emperor)1 枚，
- プレイヤー 2 は，市民カード（C：Citizen)2 枚と奴隷カード（S:Slave)1 枚

を持っている 3 回のゲーム G_2 を分析する．
1 回目の勝負において

- (E, C)（プレイヤー 1 が E，プレイヤー 2 が C を出す）だと，プレイヤー 1 が勝つ．
- (C, S)（プレイヤー 1 が C，プレイヤー 2 が S を出す）でも，プレイヤー 1 が勝つ．
- (E, S)（プレイヤー 1 が C，プレイヤー 2 が S を出す）だと，プレイヤー 2 が勝つ．
- (C, C)（プレイヤー 1 も 2 も C を出す）だと引き分け，次のゲームに．このとき次のゲームは G_1 になる．

市民カード 2 枚のときのゲーム G_2 は図 17.2 のようになる．
ここで部分ゲーム完全均衡を考える．(C, C) が起きて引き分けたときは，ゲーム G_1 における期待利得 $(0, 0)$ が入ると考えて，1 回目のゲームを解けば良い（図 17.2 の右図）．
これを解くと，プレイヤー 1 は E を 1/3，C を 2/3 で選び，プレイヤー 2 は S を 1/3，C を 2/3 で選ぶ，となる（混合戦略の求め方は，先週の宿題などを参考にせよ）．
プレイヤー 1 の期待利得 v_2 を求めると

$$v_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times v_1$$

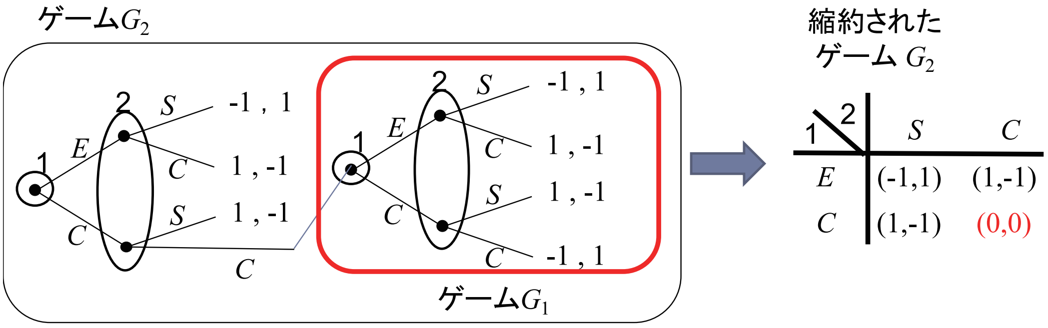


図 17.2: ゲーム G_2

となる．$v_1 = 0$ からプレイヤー 1 の期待利得 $v_2 = \frac{1}{3}$ である．またこのゲームはゼロ和ゲームなので，プレイヤーの期待利得は $-v_2 = -\frac{1}{3}$ となる．
プレイヤー 1 の勝つ確率は，

$$(E, C)\text{ が起きる確率} + (C, S)\text{ が起きる確率} + (C, C)\text{ が起きる確率} \times G_1\text{でプレイヤー} - 1\text{ が勝つ確率}$$

であり，

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times w_1$$

となり $w_2 = 2/3$ となる．

市民カードが 3 枚のとき

市民カードが 3 枚のときを宿題とする．次の問いに答えよ．

問 1 部分ゲーム完全均衡において，プレイヤー 1 とプレイヤー 2 の 1 回目の混合戦略を求めよ．

問 2 このときプレイヤー 1 の期待利得 v_3，勝つ確率 w_3 を計算せよ．

興味があれば，オリジナルのゲーム**市民カードが 4 枚のとき**を計算してみよ（宿題ではない）．

提出課題 17.2
最適関税
A 国において，自国企業 A と他国企業 B が同じ製品を販売している（企業 B の製品は輸入品である）．政府は，企業 B に関税をかけて，自国の厚生を最大化したいと考えている．以下のようなゲームを考える．

第 1 段階 政府は企業 B に製品 1 単位あたり t の関税をかけることを決定．

第 2 段階 企業 A と企業 B は，それぞれ生産量 x_A と x_B を決めてクールノー競争を行う．

製品の価格を p とすると，逆需要関数は $p = 36 - (x_A + x_B)$ で与えられるものとする．単純化のため両企業とも限界費用は 0 とする．次の問いに答え，$[a]$ から $[k]$ までの数値（整数）を答えよ．

問 1 企業 A の利潤は $\pi_A = px_A$，企業 B の利潤は $\pi_B = px_B - tx_B$ であることに注意して，クールノー均衡を t の式で表すと，

$$x_A = [a] + \frac{[b]}{3}t \quad x_B = [c] - \frac{[d]}{3}t$$

となる．

問 2 このとき企業 A の利潤 π_A を t の式で表すと，

$$\pi_A = \frac{1}{9}t^2 + [e]t + [f]$$

となる．

問 3 消費者余剰 CS を t の式で表すと，

$$CS = \frac{1}{18}t^2 - [g]t + 288$$

となる．

問 4 企業 B からの政府の税収 $G = tx_B$ は

$$G = tx_B = [h]t - \frac{[i]}{3}t^2$$

となる．

問 5 自国の社会的総余剰 SS は，企業 A の利潤，消費者余剰，税収の合計，すなわち

$$SS = \pi_A + CS + G = -\frac{1}{2}t^2 + [j]t + 432$$

である

問 6 このとき社会的総余剰 SS を最大にする関税は $t = [k]$ である．

提出課題 17.3

マカヌハニーは，女王島原産の貴重な蜂蜜で稀にしか入手できないが，一ノ瀬アリス（プレイヤー 1）は仕入れのルートを持っている．二子山文太（プレイヤー 2）は，この蜂蜜をアリスから売ってもらうことになった．マカヌハニーには良品と粗悪品があり，良品と粗悪品の確率は p と $1-p$ であり，アリスも文太もそれを知っている．文太は，良品に対しては（価格に換算して）24 の価値を持っており，粗悪品には 4 の価値しか持っていない．

アリスは，ハニーが手に入ったと養蜂家から連絡が入ると買い付けに行き，そこで良品か不良品かが分かる．アリスは仕入れないか，商品を価格 8 で仕入れて文太に価格 16 で売る（良品と粗悪品で仕入れ値は変わらない）．

一方，文太はアリスからハニーを買うまで良品か粗悪品かは分からない．アリスは粗悪品だと分かれば仕入れない選択もできるが，粗悪品を仕入れて文太に売りつけてしまい儲かる可能性もある．また，文太が粗悪品を恐れて仕入れたアリスから蜂蜜を買わないならば，アリスは損をするので，良品であっても仕入れないかもしれない．

この問題（逆選抜:adverse selection）について，以下のようなゲームで考察してみよう．

第 1 段階 アリスは品物が良品か，粗悪品かが分かる．

第 2 段階 アリスは価格 8 で仕入れて文太に売る (Y) か，仕入れないか (N) を決める．N を選ぶとアリスと文太の利得は 0 でゲームは終わる．Y だと第 3 段階に移る．

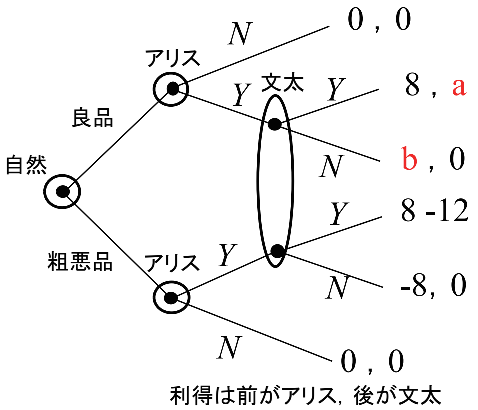
第 3 段階 文太は，アリスが売りに出しているときは，アリスが良品を仕入れて売ったのか，粗悪品を仕入れて売っているのかは分からず，価格 16 で買う (Y) か，買わないか (N) を決める．もし Y を選んだ場合，アリスの利得は 8，文太の利得は良品なら 8，粗悪品なら -12 とする．一方，N を選んだ場合，アリスの利得は -8，文太の利得は 0 とする．

次の問いに答えよ．この問題は部分ゲームはないので，ナッシュ均衡が答になる．

問 1 $p = 3/4$ のときを考える．**図 17.3** は，このゲームを展開形ゲームで表したものと，それを戦略形ゲームに変換したものである．a から h に当てはまる数値を答えよ．ここで戦略形ゲームのアリス 1 の戦略は，良品を仕入れたとき，粗悪品を仕入れたときの行動を並べて書くものとする．例えば YN は，良品ならば仕入れて売り，不良品ならば仕入れないことを表す．

問 2 このゲームの結果（ナッシュ均衡）を求めよ．

問 3 p がいくつ以上であれば「アリスは良品でも粗悪品でも仕入れて，文太はそれを買う」という結果がナッシュ均衡になるか？



文太 / アリス	Y	N
YY	(c, d)	(-8,g)
YN	(e, 6)	(h,0)
NY	(2, f)	(-2,0)
NN	(0, 0)	(0,0)

図 17.3: 逆選抜