第 19 回宿題

- 提出課題を解き kibaco に答を入力して下さい．
- 自習課題は提出する必要はありません．理解を深めるために自習しましょう．

提出課題 19.1
2 回の繰り返しゲームの部分ゲーム完全均衡について，考えてみよう．以下の文章を読みながら途中の問いに答えよ．
プレイヤー 1 と 2 はある戦略形ゲーム（成分ゲームと呼ぶ）を 2 回繰り返し，その合計利得を利得とする．**(簡単化のため割引は考えないで，単純に合計で考える）**．

成分ゲームのナッシュ均衡が 1 つのとき

まず成分ゲームにナッシュ均衡が 1 つしかない場合を考える．例として**図 19.1** を考える（囚人のジレンマになっている）．

1 \ 2	A	B
A	(4,4)	(1,5)
B	(5,1)	(2,2)

図 19.1: 成分ゲーム（ナッシュ均衡が 1 つ）

図 19.1 のゲームのナッシュ均衡は (B, B) だけである．このゲームを 2 回繰り返すとしよう．
図 19.2 の左側は，この 2 回繰り返しゲームを展開型ゲームっぽく書いたイメージ図である．まずプレイヤーは A と B を同時に選んだあとで，選んだ戦略の組に応じて，ゲーム G_{AA}，G_{AB}，G_{BA}，G_{BB} をプレイするが，ここではすべて同じ**図 19.1** がプレイされる．

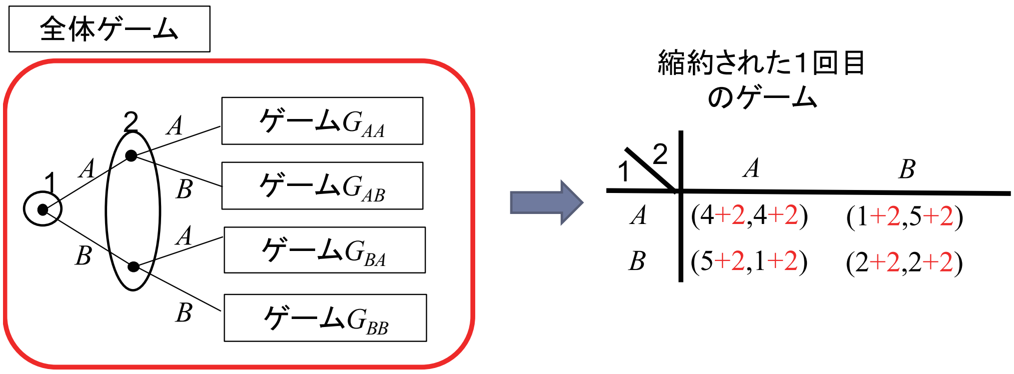

図 19.2: 成分ゲーム（ナッシュ均衡が 1 つ）

部分ゲームは，ゲーム G_{AA}，G_{AB}，G_{BA}，G_{BB} （と全体のゲーム）である．ここで

部分ゲーム完全均衡では，すべての部分ゲームでナッシュ均衡がプレイされていなければならない

ので，ゲーム G_{AA} のナッシュ均衡は (B, B) しかないため，G_{AA} では (B, B) がプレイされること

が分かる．同様に G_{AB}，G_{BA}，G_{BB} でも部分ゲーム完全均衡では (B,B) がプレイされることが分かる．

> 単純に考えると，各部分ゲームは**図 19.1** の成分ゲームであるように思えるが，実は正しくなく，本当は 2 回の合計利得を考えなければならないことに注意しよう．例えばゲーム G_{AB} ではプレイヤー 1 と 2 は，1 回目に既に利得 1 と 5 を得ているので，ゲーム G_{AB} における部分ゲームは正確には**図 19.3** のように書ける．しかし，各プレイヤーーのすべての利得に同じ利得を足しても利得の大小関係は変わらず，ナッシュ均衡も変わらないため，難しく考えずに**図 19.1** を解いていると考えて良い．

1＼2	A	A
A	(4+1,4+5)	(1+1,5+5)
B	(5+1,1+5)	(2+1,2+5)

図 19.3: ゲーム G_{AB} での正確な部分ゲーム

このように

> 部分ゲーム完全均衡では，最終回の成分ゲームで，必ず成分ゲームのナッシュ均衡がプレイされていなければならない

ことが分かる．
このことから，2 回目のゲームでは 1 回目のゲームの結果に関わらず利得 2 が得られるので，ゲームを縮約すると**図 19.2** の右側のようになる．
各プレイヤーーのすべての利得に同じ利得を足しても利得の大小関係は変わらず，ナッシュ均衡も変わらないため，1 回目のゲームでも (B,B) がプレイされることが分かる．

問 1 このとき部分ゲーム完全均衡が実現するゲームの履歴を，以下の選択肢から答えよ．

問 1 の選択肢

A (A,A)(A,A) B (B,B)(B,B) C (A,A)(B,B) D (A,B)(B,A)

成分ゲームのナッシュ均衡が複数あるとき

次に成分ゲームにナッシュ均衡が複数あるときを考える．例として**図 19.4** の左側のゲームを考える．このゲームはプレイヤー 1 の戦略が 3 つ，2 は 2 つであり，純粋戦略のナッシュ均衡は (A,A) と (C,B) である．
図 19.4 の右側は，この 2 回繰り返しゲームを展開型ゲームっぽく書いたイメージ図である．1 回目のゲームでプレイヤーの選んだ戦略の組が (i,j) であれば各プレイヤーはゲーム G_{ij} をプレイする（すべて同じゲームであるが）．
ここでプレイヤー 1 の戦略を

$$(C, ACAABA)$$

のように書くことにしよう．カンマの前は第 1 回目に選んだ戦略で，カンマの後の 6 つの戦略は 2 回目に選ぶ戦略を，ゲーム G_{AA}，G_{AB}，G_{BA}，G_{BB}，G_{CA}，G_{CC} の順に並べたものにする．上記

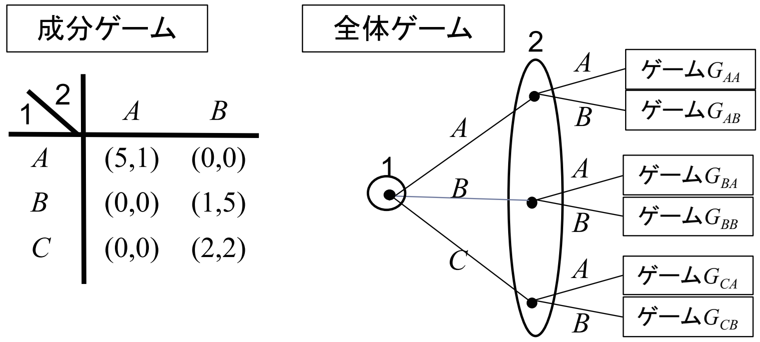

図 19.4: 成分ゲーム（1 の戦略は 3 つ，ナッシュ均衡は 2 つ）

の $(C, ACAABA)$ は，第 1 回目に C を選び，第 2 回目は，ゲーム G_{AA} では A，ゲーム G_{AB} では C，ゲーム G_{BA} では A... のように行動する戦略である．プレイヤー 2 も同様に表すことにする（プレイヤー 2 には C はない）．
例えば，プレイヤー 1 とプレイヤー 2 が戦略の組,

$((C, ACAABA), (B, ABAABA))$

を選んだとする．このとき第 1 回目では (C, B) が実現し，ゲーム G_{CB} ではプレイヤー 1 が A，プレイヤー 2 が A を選ぶので (A, A) が実現する．よって実現する履歴は

$(C, B)(A, A)$

となる．
問題：以下の戦略の組 (i)-(v) に対して，実現する履歴を選択肢 A–H から選べ．

問 2 戦略の組 (i) $((A, CCCCCC), (A, BBBBBB))$

問 3 戦略の組 (ii) $((B, CCCACC), (B, BBBABB))$

問 4 戦略の組 (iii) $((C, CAAAAC), (B, AABBBB))$

問 5 戦略の組 (iv) $((C, AAAAAA), (B, AAAAAA))$

問 6 戦略の組 (v) $((C, CACCCC), (B, BABBBB))$

問 2-問 6 の選択肢

A	(A,A)(A,A)	B	(A,A)(C,B)	C	(B,B)(A,A)	D	(B,B)(A,B)
E	(B,B)(C,B)	F	(C,B)(A,A)	G	(C,B)(C,A)	H	(C,B)(C,B)

問 7 戦略の組 (i)-(iii) に対して，各プレイヤーの利得を答えよ．

ここで，どのような戦略の組が部分ゲーム完全均衡になるか考えてみる．まず（成分ゲームの）ナッシュ均衡が 1 つの場合と同様に,「部分ゲーム完全均衡では，最終回の成分ゲームで，その成分ゲームのナッシュ均衡がプレイされていなければならない」ということがすぐに分かる．
したがって最初に挙げた $((C, ACAABA), (B, ABAABA))$ は部分ゲーム完全均衡ではない．なぜならゲーム G_{CA} では (B, B) が起き，これはナッシュ均衡ではないからである[2]．

[2]戦略の組によって実現する履歴は $(C, B)(A, A)$ で，両方ともナッシュ均衡であるにも関わらず！

一方，戦略の組 (i) の $((A, CCCCCC), (A, BBBBBB))$ のように 2 回目の部分ゲームですべて同じナッシュ均衡が選ばれるならば，ナッシュ均衡が 1 つの場合と同様の論理から，1 回目のゲームでもとの成分ゲームのナッシュ均衡になれば，それは必ず部分ゲーム完全均衡になる，と言える．戦略の組 (i) では 1 回目は (A, A) であるから戦略の組 (i) はナッシュ均衡である．(1 回目のゲームでナッシュ均衡にならなければ部分ゲーム完全均衡にならない）．
興味深いのは戦略の組 (ii)$((B, CCCACC), (B, BBBABB))$ である．この場合は，2 回目の部分ゲームで異なるナッシュ均衡が起きる．このゲームを縮約したものが**図 19.5** である．

縮約ゲーム

1 \ 2	A	B
A	(5+2,1+2)	(0+2,0+2)
B	(0+2,0+2)	(1+5,5+1)
C	(0+2,0+2)	(2+2,2+2)

図 19.5: $((B, CCCACC), (B, BBBABB))$ の縮約ゲーム

図 19.5 のゲームの (B, B) はナッシュ均衡になることが分かる．すなわち戦略の組 (ii) は部分ゲーム完全均衡になるのである．この部分ゲーム完全均衡では

- 1 回目のゲームで選ばれる (B, B) は，元のゲームのナッシュ均衡ではない．
- この部分ゲーム完全均衡で，プレイヤー 1 と 2 の利得はともに 6 になる．プレイヤー 2 は，成分ゲームの 2 つのナッシュ均衡 (A, A)，(C, B) のどちらが 2 回選ばれても最高の利得は 4 であり，それ以上の利得を得ている．

複数のナッシュ均衡がある繰り返しゲームは大変複雑で，このようなナッシュ均衡ではない高い利得を部分ゲーム完全均衡で獲得する可能性もある．

問 8 戦略の組 (iii)，(iv)，(v) の中で，部分ゲーム完全均衡になるものをすべて選べ．