ゲーム理論2010年度前期末試験解答

出題 July 27, 2010
解答作成 July 09, 2011

- 解答が問題に直接書きこんであります.
- 解答は急いで作ったので，間違っているかも．もし疑問があればメールで教えてください.

問題 1 図 *1* について，バックワードインダクションを用いてゲームの解を求めなさい．答は表 *1* において，各プレイヤーが意思決定点で選択する代替案（x か y か）を記入しなさい．なお図では利得は左から順にプレイヤー 1,2,3 を表し，点の v_{ij} はプレイヤー i の j 番目の意思決定点を表している.

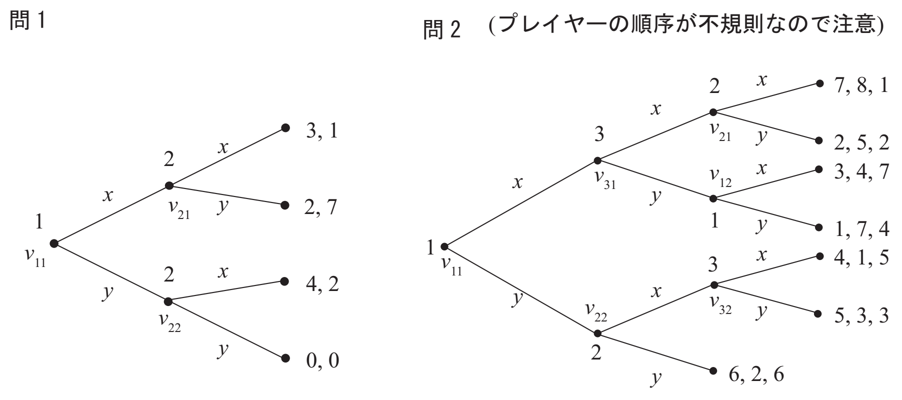

図 1: ゲームの解を求める

問 1

プレイヤー 1	v_{11}	y
プレイヤー 2	v_{21}	y
	v_{22}	x

問 2

プレイヤー 1	v_{11}	y
	v_{12}	x
プレイヤー 2	v_{21}	x
	v_{22}	y
プレイヤー 3	v_{31}	y
	v_{32}	x

表 1: 図 1 のゲームの解

問題 2 図 2 のゲームについて，当てはまる数値を答えなさい．

- 図 2 のナッシュ均衡は，混合戦略まで含めると 1 個ある．
- 図 2 のゲームのナッシュ均衡で，完全に混合戦略だけのナッシュ均衡 (すべてのプレイヤーが純粋戦略を確率 1 で選ぶことはないもの）で，プレイヤー 1 は x_1 を $\frac{4}{5}$ で選択し，プレイヤー 2 は x_2 を $\frac{1}{2}$ で選択する．

1 \ 2	x_2	y_2
x_1	（1，3）	（2，4）
y_1	（0，5）	（3，1）

図 2: 2 人ゲーム

問題 3 以下の問いに答え，当てはまる数値を答えなさい．

ある財の市場が独占市場であるとする．財の逆需要関数が $p = 45 - x$ で (x は生産量で，p は価格)，企業が財を 1 単位生産するための費用が 9 であるとする．

問 1 独占における企業 A の利潤を最大にする生産量は 18，そのときの価格は 27 である．

問 2 このときの消費者余剰は 162 であり，社会的総余剰は 486 である．

次に，この市場が 2 企業の複占市場であるとし，2 企業が同時に生産量を決定するクールノー競争を考える．財を 1 単位生産するための費用は，どちらの企業も 9 であるとする．次の問いに答えなさい．

問 3 クールノー均衡における各企業の生産量は 12，均衡価格は 21 である．

問 4 クールノ均衡における各企業の利潤は 144 である．

問 5 独占市場に比べ，複占市場では社会的総余剰は 90 増加する．

問題 4 図 *3* は *2* 人ゼロ和ゲームの利得表であり，プレイヤー 1 の利得を表している．このゲームのマキシミニ戦略を求めると，プレイヤー 1 は x_1 を $\frac{2}{9}$ で選択する．プレイヤー 2 は w_2 を $\frac{0}{1}$ で，x_2 を $\frac{1}{2}$ で選択する．

1 \ 2	w_2	x_2	y_2	z_2
x_1	15	11	13	7
y_1	0	2	10	16

図 3: 2 人ゼロ和ゲームの利得表

問題 4：解説プレイヤー 1 が x_1 を選ぶ確率を p,y_1 を選ぶ確率を $1-p$ とする．プレイヤー 2 が各戦略を選んだ時のプレイヤー 1 の期待利得を求めると，

	プレイヤー 1 の期待利得
プレイヤー 2 が w_2 を選択	$15p+0(1-p)=15p$
プレイヤー 2 が x_2 を選択	$11p+2(1-p)=9p+2$
プレイヤー 2 が y_2 を選択	$13p+10(1-p)=3p+10$
プレイヤー 2 が z_2 を選択	$7p+16(1-p)=-9p+16$

図 4 は横軸にプレイヤー 1 の戦略 p，縦軸にプレイヤー 1 の期待利得をとり，上記の期待利得をグラフに表したものである．このグラフを簡単に書くには，プレイヤー 1 の x_1 のときの利得を $p=1$，y_1 の利得を $p=0$ にとり，直線で結べば良い．例えば w_2 に関しては，$p=1$ に 15,$p=0$ に 0 を選び，それを結ぶ．

この 4 つのグラフの中で，最小になる部分が少し太い線で記されている．マキシミニ戦略は，期待利得が最小になる時を最大にすればよいので，この線が最大になる部分を求めれば良い．それはグラフの〇で囲まれた交点である．これは x_2 と z_2 のグラフの交点であるので，$9p+2=-9p+16$ を解けば良い．これより $p=\frac{7}{9}$ を得る．プレイヤー 1 のマキシミニ戦略は x_1,y_1 を選ぶ確率が $\frac{7}{9}$,$\frac{2}{9}$.

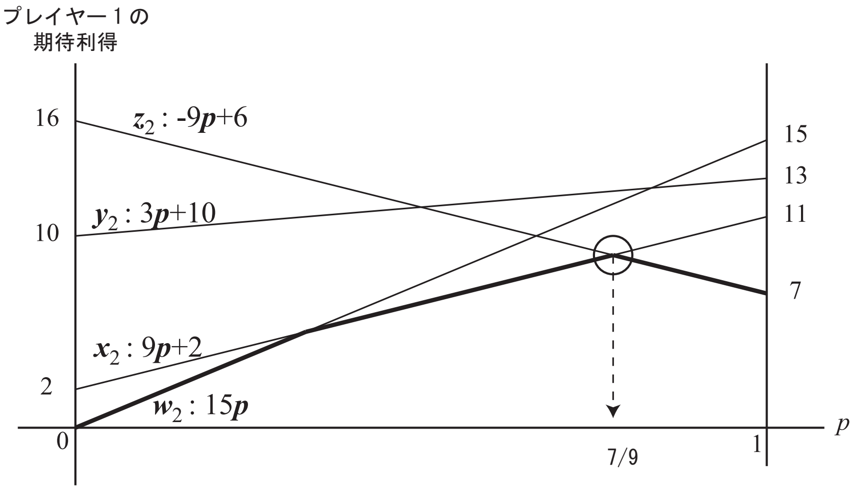

図 4: マキシミニ戦略を求める

次に，プレイヤー 2 のマキシミニ戦略を求める．ミニマックス定理より，プレイヤー 1 のマキシミニ戦略の最悪の利得を与える戦略がプレイヤー 2 のミニマックス戦略になって

いる．グラフより，w_2 と y_2 は，プレイヤー１の最悪の利得を与えないので，この戦略がプレイヤー２のミニマックス戦略に使われることはなく，w_2 と y_2 に与えられる確率は0である．ここから，プレイヤー２のミニマックス戦略を求める方法は幾つかある．１つは，上記のことより，プレイヤー２の戦略を x_2 と z_2 だけに絞り，その利得行列の混合戦略を求める方法である．この利得行列を図５に示した．

1 \ 2	x_2	z_2
x_1	(11, −11)	(7 , −7)
y_1	(2 , −2)	(16, −16)

図 5: プレイヤー２のマキシミニ戦略を求める利得行列

もう１つの簡便な方法は，以下のものである．プレイヤー２のミニマックス戦略において，x_2 と z_2 を選ぶ確率を q と $1-q$ としよう．このときプレイヤー１の期待利得を再び考える．マキシミニ戦略はナッシュ均衡であり，プレイヤー１のナッシュ均衡は $p=\frac{7}{9}$ で x_1 を選ぶものであった．もしプレイヤー１の期待利得が，x_2 と z_2 のどちらかが大きければ，プレイヤー１はその戦略を確率１で選ぶほうが良いので，x_1 を $\frac{7}{9}$ で選ぶ戦略はナッシュ均衡にならない．したがって，両方の期待利得は等しくならなければならない．プレイヤー１が x_1 を選んだ時の期待利得は

$$11q+7(1-q)=4q+7$$

プレイヤー１が y_1 を選んだ時の期待利得は

$$2q+16(1-q)=-14q+16$$

であるから，$4q+7=-14q+16$ である．したがって $q=\frac{1}{2}$ まとめると，プレイヤー２のマキシミニ戦略で w_2,x_2,y_2,z_2 を選ぶ確率は $0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}$

問題 5 プレイヤー１とプレイヤー２が，渋谷のハチ公，浅草の雷門，新宿のアルタ前のどこかを待ち合わせをしようとしている．このゲームを,「ハチ公」「雷門」「アルタ」の３つの戦略を選ぶ戦略形ゲームと考え，以下の問いに答えよ．

問 1 ２人の利得を，同じ場所を選んだ時はそれぞれ 1，違う場所を選んだ時は 0 と考えると，このゲームの純粋戦略（確率を用いない戦略）のナッシュ均衡は３個ある．

問 2 このゲームにおいて，すべての戦略を正で選ぶ「完全な混合戦略」のナッシュ均衡を計算すると，プレイヤー１が「ハチ公」を選ぶ確率は $\frac{1}{3}$ である．

問 3 ２人の利得を，２人とも「ハチ公」を選んだときは3，２人とも「雷門」を選んだときは1，２人とも「アルタ」を選んだときは2，とする．２人が違う場所を選んだ時は共に0とする．このゲームにおいて，すべての戦略を正で選ぶ「完全な混合戦略」のナッシュ均衡を考えると，プレイヤー１が「ハチ公」を選ぶ確率は $\frac{2}{11}$,「雷門」を選ぶ確率は $\frac{6}{11}$ である．

問題５問３：解説

問３のゲームの利得行列は，図６にある．

ここでプレイヤー２がナッシュ均衡でハチ公，雷門，アルタを選ぶ確率をそれぞれ q_1,q_2,q_3 とする．すべての値は正とし $q_1+q_2+q_3=1$ とする．

1 \ 2	ハチ公	雷門	アルタ
ハチ公	（３，３）	（０，０）	（０，０）
雷門	（０，０）	（１，１）	（０，０）
アルタ	（０，０）	（０，０）	（２，２）

図 6: 問題 5 問 3 の待ち合わせの利得行列

ここでプレイヤー 1 がハチ公，雷門，アルタを選んだときの期待値は $3q_1$,q_2,$2q_3$ となる．もしここで $3q_1 = q_2 = 2q_3$ でなければ，プレイヤー１の少なくとも１つの戦略は期待値が低くなる．すると，その低い期待値を与える戦略に正の確率を割り当てるより，他の戦略を選ぶを確率を高くした方が利得が高くなる．したがって利得を最大にするには，その低い期待値を与える戦略に割り振る確率が 0 でなければならない．これは，すべての戦略に正の確率を割り当てるナッシュ均衡にならない．したがって，$3q_1 = q_2 = 2q_3$ が成り立つ．これと $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ より，$q_1 = \frac{2}{11}$,$q_2 = \frac{6}{11}$,$q_3 = \frac{3}{11}$ となる．

ここで疑問（不思議）に感じるのは，得点の高いハチ公を選ぶ確率が他より低くなっているところで,「高い利得の戦略が高い確率になるのが当然なので間違いではないか」と思いがちです.

このゲームのナッシュ均衡には，ハチ公を確率 1 で選ぶ純粋戦略のナッシュ均衡も存在する．ここでは利得を高くする均衡ではなく，敢えて「すべての戦略が正の確率で選ばれる均衡を求めよ」ということが問題になっている．すべての戦略が正の確率で選ばれるためには,

- 低い得点の戦略は相手が選ぶ確率が高く
- 高い得点の戦略は相手の選ぶ確率が低く

なっていないと均衡しない．そうでないと，高い得点の戦略を選ぶことが良くなり，それを確率 1 で選ぶことになってしまう.

戦略が 2 つのときも同じようなことが言えるので，それで考えてみると良いう．2 人で A か B のどちらかを選ぶゲームを考え，2 人が A 選べば互いに 10 点，2 人が B 選べば互いに 1 点，A と B と違うものを選んでしまうと 0 点とする．このときはお互いに A を選ぶのが良さそうだが，B を選ぶのもナッシュ均衡であるし，混合戦略のナッシュ均衡もある.

混合戦略を選ぶナッシュ均衡では A を選ぶ確率が高いだろうか？計算してみよ．なお同様の問題が，昨年の国家公務員の試験で出題されていたようである.