ゲーム理論２ 期末試験

Jan 31, 2016

- 解答は解答用紙のマークに記入して提出せよ．

問題 1 図 *1* の２つの展開形ゲームについて，部分ゲーム完全均衡を求めよ．答は表 *1* において，各プレイヤーが情報集合で選択する行動を記入しなさい．ここで情報集合 H_{ij} はプレイヤー i の j 番目の情報集合を表しており，利得は左がプレイヤー1，右がプレイヤー2を表している．もし部分ゲーム完全均衡が２つ以上ある場合は，どちらを答えても良い．

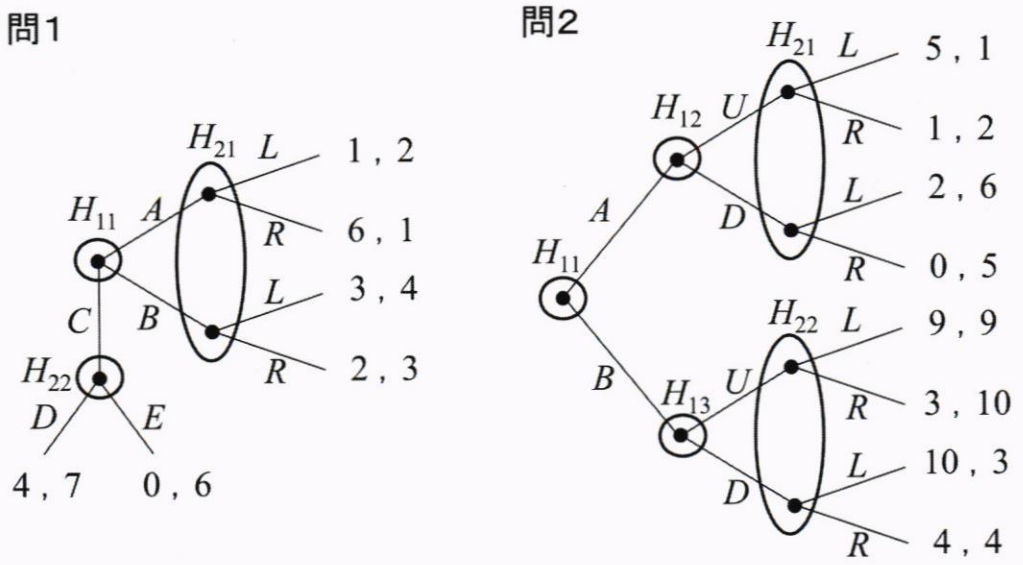


図 1: 部分ゲーム完全均衡を求めよ

問１

プレイヤー１	H_{11}	ア	C
プレイヤー２	H_{21}	イ	L
	H_{22}	ウ	D

問２

プレイヤー１	H_{11}	エ	B
	H_{12}	オ	U
	H_{13}	カ	D
プレイヤー２	H_{21}	キ	R
	H_{22}	ク	R

表 1: 図１のゲームの解

問題 2 多数のプレイヤーがいて，毎期ランダムに出会い，２人でゲームをする．図 *2* に示した利得表は，このゲームのプレイヤー１の利得を表している．プレイヤー１と２の利得は対称的である．プレイヤーは，ゲームの戦略 A と戦略 B のどちらかを選ぶことになっており，期間中変えることはない．各期の最初に，僅かな比率のプレイヤーだけが前の期から戦略を変える機会があり，それ以外の（ほとんどの）プレイヤーは前の期と同じ戦略をとる．

ここで各期の最初に戦略を変えるプレイヤーは，前の期において，それぞれの戦略を選んだプレイヤーの利得の平均が高い戦略に変更するとする．次の問いに答えなさい．

プレイヤー1 ＼ プレイヤー2	A	B
A	3	2
B	6	0

図 2: 各タイプに対応する利得行列

問 1 このゲームのナッシュ均衡は

（均衡 1）すべてのプレイヤーが A を選ぶ，
（均衡 2）すべてのプレイヤーが B を選ぶ，
（均衡 3）すべてのプレイヤーが確率 p で A を選び，$1-p$ で B を選ぶ

の 3 つである．ここで $p = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である．

2
5

問 2 上記の 3 つのナッシュ均衡の中で，進化ゲームの**安定な定常状態**に対応する均衡はどれか？当てはまる均衡の番号（1,2,3）をすべて ウ にマークせよ．ない場合は 0 をマークせよ．

3

問 3 $x(0) = 0.2$ のとき，進化ゲームの定常状態は，上記の均衡のどれに対応するか？当てはまる均衡の番号（1,2,3）をすべて エ にマークせよ．ない場合は 0 をマークせよ．

3

.

問題 3 2 つの企業 (企業 1 と企業 2) が同質財を供給し，複占市場で生産量競争をしている．ここで逆需要関数には 2 つの可能性がある．企業 1 と企業 2 の生産量の合計を Q，財の価格を p とすると，好景気のとき逆需要関数は $p = 72 - Q$ で，不景気のとき逆需要関数は p は $p = 36 - Q$ であるとしよう．企業 1 は好景気か不景気かを知っており，前者を好景気タイプ，後者を不景気タイプと呼ぶことにする．企業 1 は自分のタイプが分かっているが，企業 2 は分かっておらず，好景気と不景気をそれぞれ確率 $\frac{3}{4}$ と $\frac{1}{4}$ として推測しているものとする．さらに企業 1 の限界費用は，好景気か不景気かで異なり，好景気のときは 24，不景気のときは 12 であるが，企業 2 の限界費用はどちらの場合も 12 である．

以下の問いに答え，アイ – キク に当てはまる数値を答えなさい．

問 1 企業 1 好景気タイプの生産量を x_{1H}，企業 2 の生産量を x_2 とする．企業 1 好景気タイプの最適反応関数（利潤を最大にする生産量）は

$$x_{1H} = -\frac{1}{2}x_2 + \boxed{アイ}$$

24

となる．

問 2 ベイズナッシュ均衡における企業 1 好景気タイプの生産量は ウエ，企業 2 の生産量は オカ である．

14

20

問 3 ベイズナッシュ均衡において不景気のときの価格は キク となる．

問題 4 2 人戦略形ゲームにおいて，プレイヤー 1 にはタイプ A, タイプ B の 2 つのタイプがあるような不完備情報ゲームを考える．図 3 は，この 2 つのタイプに対応する利得行列である．プレイヤー 1 は自分のタイプを知っているが，プレイヤー 2 は相手のタイプが分からず，タイプ A である確率を 3/5, タイプ B である確率を 2/5 で推測している．以下の問いに答えよ．**なお問題では混合戦略は考えず，純粋戦略だけを考える．**

問 1 $x = 10$ のとき，純粋戦略のベイズナッシュ均衡を**すべて**求め，以下の選択肢から選びマークせよ．ここで $((U, D), L)$ は，プレイヤー 1 のタイプ A が U を，タイプ B が D を，プレイヤー 2 が L を選んでいる戦略の組を表す．

プレイヤー1がタイプA

1 \ 2	L	R
U	(4 , 5)	(1,15)
D	(6 , 0)	(0 , 5)

プレイヤー1がタイプB

1 \ 2	L	R
U	(5 , x)	(8, 0)
D	(1 , 5)	(0 ,20)

図 3: 各タイプに対応する利得行列

⓪ なし ① $((U,U),L)$ ② $((U,U),R)$ ③ $((U,D),L)$ ④ $((U,D),R)$
⑤ $((D,U),L)$ ⑥ $((D,U),R)$ ⑦ $((D,D),L)$ ⑧ $((D,D),R)$

問 2 $((U,U),R)$ がベイズナッシュ均衡となるのは，$x \leq$ アイ のときである．また $((D,U),L)$ がベイズナッシュ均衡となるのは，$x \geq \frac{\text{ウエ}}{\text{オ}}$ のときである．

問題 5 図 4 は囚人のジレンマとなるようなゲームである．

1 \ 2	C	D
C	(20 ,20)	(-3,30)
D	(30,-3)	(0 , 0)

図 4: 成分ゲームとなる囚人のジレンマ

この囚人のジレンマゲームを成分ゲームとして繰り返すゲームにおいて，次の 2 つの戦略を考える．

戦略 1 第 1 回目は C を出す．2 回目以降は，もしそれまでの回で相手がずっと C を出していたならば C を選ぶ．その回までに 1 度でも相手が D を出していたならば D を選ぶ．いわゆる「トリガー戦略」

戦略 2 どの回も D を出し続ける．いわゆる「常に協力しない」戦略

このとき，10 回の繰り返しゲームを考察する．割引因子 $R = 0.9$ として，以下の問いに答えなさい．必要であれば

$0.9^9 = 0.39 \quad 0.9^{10} = 0.35, \quad \log_{10} 0.9 = -0.046$

を用いなさい．

1 \ 2	戦略1	戦略2
戦略1	(a, a)	(c, b)
戦略2	(b, c)	(d, d)

図 5: 繰り返しゲーム

問 1 上記の戦略 *1* と戦略 *2* のみを戦略であると考えて，この 10 回の繰り返しゲームを戦略形ゲームとした利得行列が図 *5* で与えられている．このとき $a =$ [アイウ]，$b =$ [エオ] となる．[アイウ]，[エオ] に当てはまる数値を答えなさい *(*小数第 *1* 位以下は四捨五入する*)*.

問 2 この 10 回繰り返しゲームでは，戦略 1 の組合せはナッシュ均衡にはならない．それは，相手が戦略 1 を選んでいるときに以下のような戦略 3 を選ぶことが利得を高くするからである．

戦略 3 第 1 回目は C を出す．2 回目以降最後の 1 回前までは，もしそれまでの回で相手がずっと C を出していたならば C を選ぶ．その回までに 1 度でも相手が D を出していたならば D を選ぶ．そして最後の回は必ず [カ] を選ぶ．

このとき [カ] には C と D のどちらが入るか？C ならば 0 を，D ならば 1 をマークせよ．

問 3 プレイヤー *2* が戦略 1 を選んでいるとき，プレイヤー *1* は戦略 1 から戦略 3 に戦略を変えることで，(全体ゲームの割引された) 利得を $\epsilon =$ [キク] $\times 10^{-1} =$ $\frac{\text{[キク]}}{10}$ だけ増加させることができる．[キク] に当てはまる数値を答えよ *(*小数第 *1* 位以下は四捨五入せよ*)*.

問 4 プレイヤーが，戦略 1 から戦略 3 に変えたときの利得の僅かな増加 ϵ は気にせずに，戦略 1 を選択するようなプレイヤーであれば，両プレイヤーは戦略 1 を選び協力が達成される．プレイヤーが気にしない利得が ϵ 小さければ，10 回の繰り返しゲームでは協力が達成されないが，繰り返す回数を多くすれば協力は達成できる．例えば，プレイヤーが 0.1 以下の利得の増加を気にしないのであれば，ゲームを [ケコ] 回以上繰り返せば協力が達成できる．

上記 [ケコ] に当てはまる数値を答えなさい．

Microstructure and Mechanism Design in Financial Markets
The 21st Century COE (Center of Excellence) Program
Faculty of Economics / Graduate School of Social Sciences, Tokyo Metropolitan University
1-1 Minami-Osawa, Hachioji, Tokyo, 192-0397 JAPAN

2016年度ゲーム理論2 期末試験 解答と解説

問題1 (問1)

このゲームは「A君とB子の元カノゲーム」と同じ構造!

1 \ 2	(L,D)	(L,E)	(R,D)	(R,E)
A	(1, 2)	(1, 2)	(6, 1)	(6, 1)
B	(3, 4)	(3, 4)	(2, 3)	(2, 3)
C	(4, 7)	(0, 6)	(4, 7)	(0, 6)

・ナッシュ均衡は

① (B, (L,E))
② (C, (L,D))

H_{22}以下の部分ゲームでは、プレイヤー2は D を選択していなければならない

→ 部分ゲーム完全均衡は (C, (L,D))

問2

H_{12}以降の部分ゲーム

1 \ 2	L	R
U	(5, 1)	(1, 2)
D	(2, 6)	(0, 5)

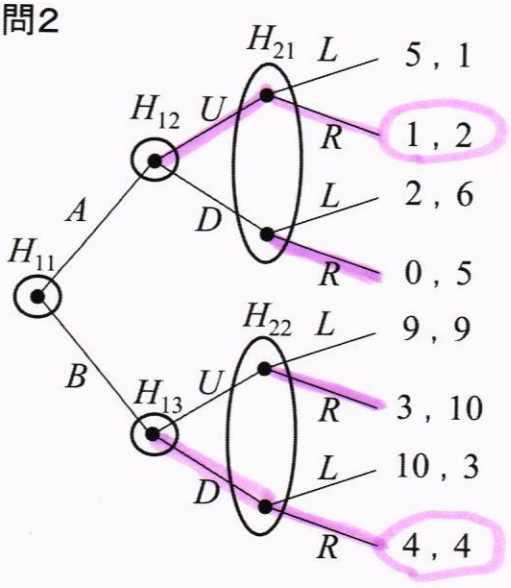
ナッシュ均衡は (U, R)

H_{13}以降の部分ゲーム

1 \ 2	L	R
U	(9, 9)	(3, 10)
D	(10, 3)	(4, 4)

ナッシュ均衡は (L, R)

問2



← 部分ゲーム完全均衡では、上記戦略が選ばれていなければならない。このことからプレイヤー1は(部分ゲーム完全均衡では) B を選ぶ

$H_{11} \to B$　　$H_{21} \to R$
$H_{12} \to U$　　$H_{22} \to R$
$H_{13} \to D$

問題2

Aの期待利得　　Bの期待利得

問1　$3p+2(1-p) \geq 6p+0(1-p)$ ← 戦略Aの期待利得が高くなる条件

$3p+2-2p \geq 6p$

$p-6p \geq -2$

$-5p \geq -2$ → $p \leq \frac{2}{5}$

問2　タカ-ハト型ゲームなので　　安定な定常状態は均衡3

問3　均衡3　(初期状態に依存しない)

問題3

問1　企業1好景気タイプの利潤をπ_{1H}とすると,

$\pi_{1H} = p \cdot x_{1H} - 24x_{1H} = \{72-(x_{1H}+x_2)\}x_{1H} - 24x_{1H}$

$= 72x_{1H} - x_{1H}^2 - x_{1H}x_2 - 24x_{1H}$

$= -x_{1H}^2 + 48x_{1H} - x_{1H}x_2$

$\frac{\partial \pi_{1H}}{\partial x_{1H}} = 0$ → $-2x_{1H} + 48 - x_2 = 0$

(x_{1H}で微分)$=0$

企業1好景気タイプの最適反応関数

$x_{1H} = -\frac{1}{2}x_2 + 24$ ①

問2　企業1不景気タイプの利潤をπ_{1L}, 生産量をx_{1L}とする

$\pi_{1L} = p \cdot x_{1L} - 12x_{1L} = \{36-(x_{1L}+x_2)\}x_{1L} - 12x_{1L}$

$= -x_{1L}^2 + 24x_{1L} - x_{1L}x_2$

企業1不景気タイプの最適反応関数

$\frac{\partial \pi_{1L}}{\partial x_{1L}} = 0$ → $-2x_{1L} + 24 - x_2 = 0$

$x_{1L} = -\frac{1}{2}x_2 + 12$ ②

企業2の期待利潤 π_2 とする

$$\pi_2 = \frac{3}{4}\times\left[\{72-(x_{1H}+x_2)\}x_2-12x_2\right]+\frac{1}{4}\times\left[\{36-(x_{1L}+x_2)\}x_2-12x_2\right]$$

$$= \frac{3}{4}\left(-x_2^2+60x_2-x_{1H}x_2\right)+\frac{1}{4}\left(-x_2^2+24x_2-x_{1L}x_2\right)$$

$$= -x_2^2+\left(\frac{180}{4}+\frac{24}{4}\right)x_2-\left(\frac{3}{4}x_{1H}+\frac{1}{4}x_{1L}\right)x_2$$

$$= -x_2^2+51x_2-\left(\frac{3}{4}x_{1H}+\frac{1}{4}x_{1L}\right)x_2$$

$\frac{\partial \pi_2}{\partial x_2}=0$ ⟶ $x_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x_{1H}+\frac{1}{4}x_{1L}\right)+\frac{51}{2}$ 企業2の最適反応関数

$$x_2 = -\frac{3}{8}x_{1H}-\frac{1}{8}x_{1L}+\frac{51}{2} \quad ③$$

・①と②と③の連立方程式を解く

→①と②を③に代入

$$x_2 = -\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{2}x_2+24\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{2}x_2+12\right)+\frac{51}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{16}x_2-9+\frac{1}{16}x_2-\frac{3}{2}+\frac{51}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{4}x_2+15 \rightarrow \frac{3}{4}x_2 = 15 \rightarrow x_2 = 15\times\frac{4}{3} = 20$$

問2のオカ

$x_2 = 20$

$$x_{1H} = -\frac{1}{2}x_2+24 = -10+24 = 14 \qquad x_{1L} = -\frac{1}{2}x_2+12 = 2$$

問2のウエ

$x_{1H}=14$ $x_{1L}=2$

不景気の時の価格は

$$p = 36-(x_{1L}+x_2) = 36-22 = 14$$

$p=14$ 問3の答

問題4

・この不完備情報ゲームの利得行列は以下のようになる
ここでプレイヤー1の戦略の左側はタイプA，右側はタイプBの行動を表す
利得は 左のカッコ内の 左側がタイプA，右側がタイプBで，1番右がプレイヤー2を表す

1＼2	L	R
UU	(4, 5), $3+\frac{2}{5}x$	(1, 8), 9
UD	(4, 1), 5	(1, 0), 17
DU	(6, 5), $\frac{2}{5}x$	(0, 8), 3
DD	(6, 1), 2	(0, 0), 11

← プレイヤー1の最適反応を見ると，
タイプA，タイプBともに最適反応となっている戦略の組（両方のタイプに下線が引かれている）は，
②((U,U),R) と
⑤((D,U),L) しかない．

したがってベイズ・ナッシュ均衡になりうる可能性があるのは，②と⑤しかない．

1＼2	L	R
UU	(4, 5) 7	(1, 8) 9
UD	(4, 1) 5	(1, 0) 17
DU	(6, 5) 4	(0, 8) 3
DD	(6, 1) 2	(0, 0) 11

← $x=10$ の時は，
②も⑤も両方ともベイズ・ナッシュ均衡となることが分かる．

・②((U,U),R)がベイズ・ナッシュ均衡となるのは
$3+\frac{2}{5}x \leqq 9$ の時で $\frac{2}{5}x \leqq 6$ $x \leqq 15$ である．

・⑤((D,U),L)がベイズ・ナッシュ均衡となるのは
$\frac{2}{5}x \geqq 3$ の時で $x \geqq \frac{15}{2}$ のとき である．

・$\frac{15}{2} \leqq x \leqq 15$ では，②も⑤も両方ともベイズ・ナッシュ均衡であり
(7.5) $x=10$ はこれをみたしている．

#5

問題5

0.65
2
130

問1 $a = 20 + 20R + \cdots + 20R^9 = \dfrac{20(1-R^{10})}{1-R}$

$R = 0.9$ より $a = \dfrac{20(1-0.9^{10})}{1-0.9} = \dfrac{20(1-0.35)}{0.1} = 130.$

$b = 30,\quad c = -3.$

問3 10回目だけ D を選ぶことで、10回目の利得は10増加し、
これを割引すると、利得は $\varepsilon = 10R^9 = 10 \times 0.39 = 3.9$ 増加する

$\varepsilon = 39 \times 10^{-1} = \dfrac{39}{10}$ である

問4 T回のくり返しでは、トリガーから戦略3に変えることで $\varepsilon = 10R^{T-1}$
だけ利得が増加する

$10R^{T-1} \leqq 0.1$

ならば、協力が達成される

$R^{T-1} \leqq 0.01$

$\log_{10} R^{T-1} \leqq \log 0.01$

$(T-1)\log_{10} R \leqq -2$ である

$R = 0.9$ より $\log_{10} 0.9 = -0.046$ を用いると

$(T-1) \times (-0.046) \leqq -2$ ならばより

$T - 1 \geqq \dfrac{2}{0.046} = 43.5$

$T \geqq 44.5$ 45回以上

(44回以上とした人は部分点あり)