ゲーム理論 1　期末試験

July 19, 2016

- 以下の問題に答え，指示に従ってマークを塗りつぶしなさい．
- 解答欄が分数の問題は，必ず約分をして答えよ．また 1 は $\frac{1}{1}$，0 は $\frac{0}{1}$ と答えよ．
- 解答欄の桁数が余るときは前の桁に 0 をマークせよ．例えば $\boxed{\text{アイ}}$ の答えが 7 のときは，07 とし，アに 0，イに 7 をマークせよ．

問題 1 $\boxed{\text{ア}}$-$\boxed{\text{イ}}$ には，当てはまる選択肢を、各問いの候補の中から選び，$\boxed{\text{ウエ}}$-$\boxed{\text{キ}}$ には，当てはまる数値を答えよ．

問 1　一般にゲーム理論は数学者 $\boxed{\text{ア}}$ 4 とモルゲンシュテルンが著した Theory of Games and Economic Behavior という本がその始まりと言われる．また，すべての n 人非協力ゲームにナッシュ均衡が存在することを示した人物は $\boxed{\text{イ}}$ 1 である．

⓪ ボレル　① ナッシュ　② ミリグロム
③ ヴィカリー　④ フォン・ノイマン　⑤ ジョイマン

問 2　2 人のプレイヤーが 40 万円を分ける最後通牒ゲームを行う．まずプレイヤー 1 が自分の分け前を x 万円（プレイヤー 2 の分け前を $40-x$ 万円）で提案し（提案は 1 **万円単位**），次にプレイヤー 2 が承諾か拒否を選ぶ．承諾すれば，プレイヤー 1 は x 万円，プレイヤー 2 は $40-x$ 万円を獲得し，拒否すれば何ももらえずゲームは終わる．なおプレイヤー 2 は**承諾と拒否の利得が同じ場合は拒否する**とする．

このゲームにおいて，プレイヤー 2 が承諾し交渉が締結したときに限り，ゲームの参加料として，プレイヤー 1 も 2 も 3 万円取られる（プレイヤー 2 が拒否した時は何も取られない）とするならば，ゲームの解としてプレイヤー 1 は $x=$ $\boxed{\text{ウエ}}$ 36 万円を提案する．

一方，プレイヤー 2 が承諾しても拒否しても，ゲームの参加料として，プレイヤー 1 も 2 も 3 万円取られるとするならば，ゲームの解として，プレイヤー 1 は $x=$ $\boxed{\text{オカ}}$ 39 万円を提案する．

問 3　5 人のプレイヤーが 0 から 9 までの整数を同時に 1 つ選び，その 1,000 倍のお金を主催者に支払う．主催者はその合計金額を 3 倍にして（出した金額に関係なく），均等に割って 5 人に返す．各プレイヤーは，返ってきた金額から自分の出した金額を引いたものが利得であるとする．例えばあるプレイヤーが 3 を選び，自分以外のプレイヤーの選んだ数値の合計が 22 であるとする．全員の合計金額は 25,000 円で，それを 3 倍して 5 で均等割りすると，各プレイヤーに 15,000 円が返ってくる．3 を選んだプレイヤーは 3,000 円支払っているので，その利得は 12,000 円である．

このゲームの支配戦略は $\boxed{\text{キ}}$ 0 を選ぶことである．

問題 2 図 *1* において，点の上の番号はその意思決定点でプレイするプレイヤーを表し，点 v_{ij} はプレイヤー i の j 番目の意思決定点を表す．図では利得は左から順にプレイヤー 1,2,3 を表す．バックワードインダクションを用いてゲームの解を求め次の問いに答え，[ア]–[エ] に A から F までの当てはまる選択肢を答えなさい．*(プレイヤーは，プレイヤーの番号順にプレイするわけではないので，誰がどこでプレイするか十分注意せよ．)*

問 1 ゲーム 1 において，プレイヤー 1 は v_1 で [ア] を選び，プレイヤー 2 は v_{21} で [イ] を選ぶ．

問 2 ゲーム 2 において，プレイヤー 2 は v_{21} で [ウ] を選び，プレイヤー 3 は v_{31} で [エ] を選ぶ．

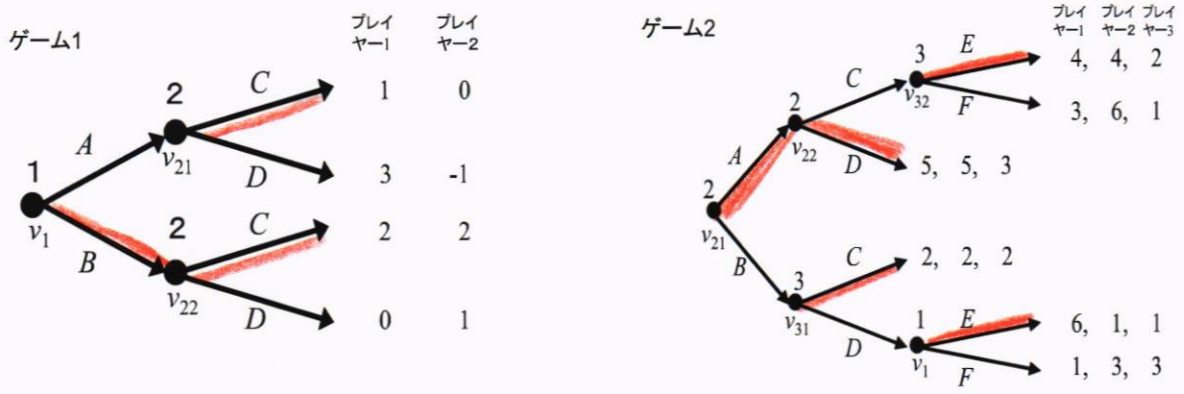


図 1: ゲームの解を求める

問題 3 図 *2* のゲームについて，[ア]–[オ] に当てはまる数値を答えよ．

- 図 2 のナッシュ均衡は，混合戦略まで含めると [ア] 個ある．
- 図 2 のゲームのナッシュ均衡で，完全に混合戦略だけのナッシュ均衡 (すべてのプレイヤーが純粋戦略を確率 1 で選ぶことはないもの) で，プレイヤー 1 は U を $\frac{[イ]}{[ウ]}$ で選択し，プレイヤー 2 は R を $\frac{[エ]}{[オ]}$ で選択する (L の確率ではなく R であることに注意)．

1 \ 2	L	R
U	(-1 , 3)	(3 , 2)
D	(2 , 5)	(1 , 8)

図 2: 2 人ゲーム

問題 4 *2*つの企業 *(*企業 *1* と企業 *2)* が差別化された製品を供給している差別化寡占の問題を考えよう．財の需要関数は，企業 i の価格を p_i, 需要量を q_i とすると

$$q_1 = 24 - p_1 + p_2$$

$$q_2 = 18 - p_2 + p_1$$

で与えられるものとする．また企業が財を生産する限界費用は，企業 1 が 12，企業 2 は 6 であるとする．以下の問いの $\boxed{\text{アイ}}$ - $\boxed{\text{シスセ}}$ に当てはまる数値をマークせよ．

問 1 企業 1 と企業 2 が同時に価格 p_1 と p_2 を選ぶベルトラン競争を考える．このゲームの解における企業 1 の価格は $\boxed{\text{アイ}}$ で，企業 2 の価格は $\boxed{\text{ウエ}}$ である．企業 1 の利潤は $\boxed{\text{オカキ}}$ である．

32　28　400

問 2 企業 1 が先手で価格 p_1 を選び，それを見て企業 2 が価格 p_2 を選ぶ価格競争を考える．このゲームの解における企業 1 の価格は $\boxed{\text{クケ}}$ で，企業 2 の価格は $\boxed{\text{コサ}}$ である．企業 1 の利潤は $\boxed{\text{シスセ}}$ である．

42　33　450

問題 5 A と B という 2 人のプレイヤーが 2 万円を分け合う．ゲームのルールは以下の通りである．

- A と B は 0 万円，1 万円，2 万円，3 万円のどれかを同時に選ぶ．A の選ぶ金額を x_A，B の選ぶ金額を x_B とする．
- $x_A + x_B \leq 2$ であれば，それぞれの選んだ金額をもらう．*(A* の利得は x_A，B の利得は x_B*)*
- $x_A + x_B > 2$ であれば 2 人とも何ももらえない．(利得は 0*)*

$\boxed{\text{ア}}$ - $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまる番号と数値をマークせよ．

問 1 A に弱支配戦略はあるか．あればその戦略を選び，なければ「なし」を選んで $\boxed{\text{ア}}$ にマークせよ（注：支配戦略は弱支配戦略であるとする）．

4

⓪ 0 万円　① 1 万円　② 2 万円　③ 3 万円　④ なし

問 2 下にある戦略の組のうち，純粋戦略のナッシュ均衡をすべて選び $\boxed{\text{イ}}$ にマークせよ．また純粋戦略の「支配されないナッシュ均衡」をすべて $\boxed{\text{ウ}}$ にマークせよ．ここで (x_A, x_B) は，A が x_A 万円を選び，B が x_B 万円を選ぶことを意味している．複数ある時は複数マークし，ない場合は「なし」のみを選んでマークせよ．混合戦略は考えない．(すべての戦略の組が列挙されているわけではない．)

4,6,8,9　4

$\boxed{\text{イ}}$ - $\boxed{\text{ウ}}$ の選択肢

⓪ なし　① (0, 0)　② (0, 1)　③ (0, 3)　④ (1, 1)
⑤ (1, 2)　⑥ (2, 0)　⑦ (2, 1)　⑧ (3, 2)　⑨ (3, 3)

問 3 このゲームの純粋戦略のナッシュ均衡は $\boxed{\text{エ}}$ 個ある．このゲームの支配されないナッシュ均衡は $\boxed{\text{オ}}$ 個ある．(10 個以上ある場合は 9 をマークせよ．)

7　2

問題 6 奇数の人数のプレイヤーが同時に A か B かを選び，選んだ人の数が少ないものを選んだプレイヤーが勝つゲームを考える（少数決とか，マイノリティーゲームと呼ばれる）．以下の異なるルールと人数のゲームについて，金額を利得と考えて，問いに答えなさい．

問 1：ゲーム 1 3 人のゲームを考える．3 人のうち 2 人が同じものを選んだとき，1 人だけ異なるものを選んだプレイヤーは，他の 2 人から 1 万円ずつもらえる（1 人だけ異なるものを選んだプレイヤーは利得は 2，2 人で同じものを選んだプレイヤーの利得はそれぞれ -1）．ただし 3 人が同じものを選んだときは，誰も何ももらえない（利得は 0）．このゲームの純粋戦略のナッシュ均衡は $\boxed{\text{ア}}$ 6 個ある（ない場合は 0 個と答えよ）．また全員が A を $\dfrac{\boxed{\text{イ}}\ 1}{\boxed{\text{ウ}}\ 2}$ で選ぶ混合戦略の組はナッシュ均衡である．

問 2：ゲーム 2 3 人のゲームを考える．2 人が A を選び 1 人だけ B を選んだとき，B を選んだプレイヤーは他の 2 人から 1 万円ずつもらえる（B を選んだプレイヤーは利得は 2．A を選んだプレイヤーの利得は -1）．2 人が B を選び，1 人だけ A を選ぶと A を選んだプレイヤーは他の 2 人から 2 万円ずつもらえる（A を選んだプレイヤーは利得は 4．B を選んだプレイヤーの利得は -2）．ただし 3 人が同じものを選んだときは，誰も何ももらえない（利得は 0）．このゲームの純粋戦略のナッシュ均衡は $\boxed{\text{エ}}$ 3 個ある（ない場合は 0 個と答えよ）．また，全員が A を $\dfrac{\boxed{\text{オ}}\ 2}{\boxed{\text{カ}}\ 3}$ で選ぶ混合戦略の組はナッシュ均衡である．

問 3：ゲーム 3 7 人のゲームを考える．A と B のうち選んだ人数が多いものを選んだプレイヤーが負けて 1 万円を支払い，人数が少ないものを選んだプレイヤーは勝ちで，負けたプレイヤーが支払った金額の総額を均等に分ける（千円未満の端数は切り捨てて主催者がもらう）．例えば，A を 5 人が選び，B を 2 人を選んだとすると，A を選んだプレイヤーは 1 万円を払い（利得 -1），B を選んだプレイヤーは 3.5 万円をもらう．（利得 3.5）．このゲームの純粋戦略のナッシュ均衡は $\boxed{\text{キク}}$ 70 個ある（ない場合は 00 個と答えよ）．

2016年ゲーム理論１試験　問題解説

平成28年10月4日
誤りがあればお知らせ下さい．

問題１問１　ゲーム理論を作ったのは「フォン・ノイマン」正答率が99％で，302人中3人だけ間違ってました．1人はミリグラムにしていて，あとの2人が「ジョイマン」にしていましたが，ジョイマンは変なラップ芸の芸人です！ナッシュ均衡の存在を証明した人はナッシュです．こちらの正答率は98％で6人が間違ってます．やはりジョイマンを選んだ人が3人！

問題１問３　自分が選んだ数字を x，他の4人が選んだ数字の合計を M とし，単位を1000円として自分の利得を表すと $3(x+M)/5-x$ です（全部の合計を3倍して自分の拠出金額を引く）．これを計算すると

$$\frac{3(x+M)}{5}-x=-\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}M$$

です．x がいくらであっても $x=0$ が自分の利得を最大にします．つまり0を選ぶ（お金を出さない）ことが支配戦略です．

全員が支配戦略を選ぶと自分の利得は0円ですが，全員が9を選ぶと自分の利得は18,000円になるので支配戦略を選ぶよりは，全員で協力して9を選んだ方が利得が高い（しかし，他の人が全員9を選んだときには，自分が0を選ぶと21,600円で利得が高くなるので0を選ぶ方が良い，支配戦略なのだから）このゲームは，囚人のジレンマの n 人版「共有地の悲劇」として広く知られています．

問題４問１　企業 i の利潤 π_i は

$$\pi_1=-p_1^2+36p_1+p_1p_2-12p_2-288 \quad \pi_2=-p_2^2+24p_1+p_1p_2-6p_2-108$$

となり，最適反応関数は企業1は $p_1=\frac{1}{2}p_2+18$，企業2は $p_2=\frac{1}{2}p_1+12$ になります．同時に価格 p_1 と p_2 を選ぶベルトラン競争では，これを連立方程式で解いて $p_1=32$，$p_2=28$ です．

問題４問２　生産量競争のシュタッケルベルグ均衡と考え方は同じです．先手の企業1の p_1 が与えられたもとでは，後手の企業2は最適反応関数 $p_2=\frac{1}{2}p_1+12$ となるように p_2 を選びます．これを企業1が先読みすると，p_1 を選んだ時の企業1の利益は

$$\pi_1=-p_1^2+36p_1+p_1(\frac{1}{2}p_1+12)-12(\frac{1}{2}p_1+12)-288=-\frac{1}{2}p_1^2+42p_1-432$$

となります．これを最大にする p_1 は42，このとき $p_2=33$ です．

問題５　このゲームはナッシュ・プログラムと呼ばれ，ゲーム理論で交渉を分析するために使われます．一般的には，A と B という2人のプレイヤーが M 円を分け合うゲームで，A と B は x_A と x_B を同時に選びます．$x_A+x_B\leq M$ であれば交渉が成立し，A と B は選んだ金額をもらいます．これに対して $x_A+x_B=M$ であれば2人とも何ももらえません（利得は0）．このゲームには多くのナッシュ均衡が存在し，その中のどのナッシュ均衡が結果となるのかを研究したりします．

1 \ 2	0	1	2	3
0	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 0)
1	(1, 0)	(1, 1)	(0, 0)	(0, 0)
2	(2, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
3	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)

図 1: 問題 5 のゲームの利得行列

このゲームの利得行列とナッシュ均衡は図 1 のようになります．

利得の下に赤線が 2 つ引かれているのがナッシュ均衡です．ナッシュ均衡は 7 個あります．各プレイヤーは 0 を選ぶよりは 1 を選んだほうがどんな時もよく（0 は支配されている），3 を選ぶよりは 2 を選んだほうがどんなときも良いことが分かります（3 は支配されている）．

支配されていない戦略は 1 と 2 ですので，支配されてないナッシュ均衡は，ナッシュ均衡の中で両プレイヤーが共に 1 か 2 の戦略を選んでいる均衡（図の黒線で囲まれた中のナッシュ均衡）で，$(1,1)$ と $(2,2)$ の 2 つです．

問題 6 問 1　問題 6 は難しいと思います．得点差をつけるために難問を加えました．問 1 の利得行列は，図 2 のようになります．純粋戦略のナッシュ均衡は 6 個であることがわかります．

3: A	1 \ 2: A	1 \ 2: B
A	(0,0,0)	(-1,2,-1)
B	(2,-1,-1)	(-1,-1,2)
p^2		$p\,(1-p)$

3: B	1 \ 2: A	1 \ 2: B
A	(-1,-1,2)	(2,-1,-1)
B	(-1,2,-1)	(0,0,0)
$(1-p)\,p$		$(1-p)^2$

図 2: 問題 5 問 1 のゲームの利得行列

ナッシュ均衡は「A が 1 人 B が 2 人」「A が 2 人 B が 1 人」の状態の場合です．例えば「A が 2 人 B が 1 人」の場合，このとき少数者 B（利得 2）は戦略を A に変えると多数者になるので利得は下がり (皆同じで 0 になる)，また多数者 A（利得 -1）は戦略を B に変えても，やはり A で多数者になるため同じ（利得 -1）なので，ナッシュ均衡になります．全員が同じ戦略を選ぶと，多数者が戦略を変えると少数者となり利得が上がるのでナッシュ均衡とはなりません．この場合は合計 6 通りあります．

混合戦略のナッシュ均衡について考えます．全員が A を確率 p，B を $1-p$ で選ぶ混合戦略のナッシュ均衡を考え，プレイヤー 1 の立場に立ちます．このナッシュ均衡では，プレイヤー 2 も 3 も A を選ぶ確率は p^2，プレイヤー 2 が A を 3 が B を選ぶ確率は $p(1-p)$，プレイヤー 2 が B を 2 が A を選ぶ確率は $(1-p)p$，プレイヤー 2 も 3 も A を選ぶ確率は $(1-p)^2$ です．(図 2)

このときプレイヤー 1 が A を選んだ時の期待利得は，

$$p^2 \times 0 + p(1-p) \times (-1) + (1-p)p \times (-1) + (1-p)^2 \times 2 = 4p^2 - 6p + 2,$$

であり，プレイヤー 1 が B を選んだ時の期待利得は，

$$p^2 \times 2 + p(1-p) \times (-1) + (1-p)p \times (-1) + 0 \times 2 = 4p^2 - 2p$$

となります．

ナッシュ均衡が混合戦略であるためには，上記の A を選んだ時と B を選んだ時の期待利得が等しくなければ，A か B のどちらかを（確実に）選んだほうが良く，ナッシュ均衡は混合戦略にはなりません．したがってナッシュ均衡が混合戦略であるためには

$$4p^2 - 6p + 2 = 4p^2 - 2p$$

です．これより $p = 1/2$ となり全員が A を $1/2$ で選ぶ混合戦略の組はナッシュ均衡であることが分かります．なお A と B に違いはありませんからこれを半々で選ぶことが答になるであろうことは，直感的にもわかります．

問題 6 問 2　問 2 の利得行列は図 3 のようになり，純粋戦略のナッシュ均衡は「A が 2 人 B が 1 人」の場合で，3 個であることがわかります．

問 1 と似ていますが「A が 1 人 B が 2 人」の場合に，多数者は B から A に戦略を変えると，A で同じく多数者になりますが，B で多数者である（利得 -2) より，A で多数者でいたほうが（利得 -1）利得が高くなるので,「A が 1 人 B が 2 人」はナッシュ均衡になりません．

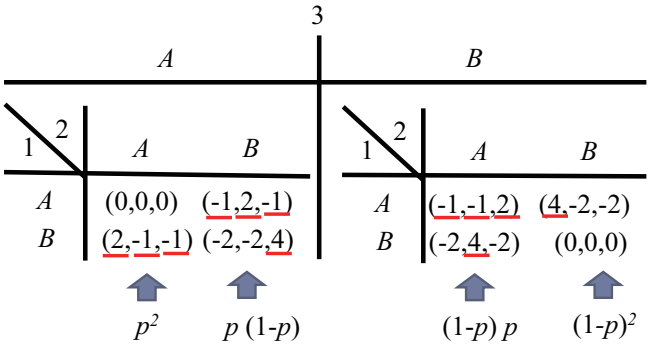


図 3: 問題 5 問 2 のゲームの利得行列

混合戦略のナッシュ均衡は同様に計算します．全員が A を確率 p，B を $1-p$ で選ぶ混合戦略のナッシュ均衡を考えると，プレイヤー 1 が A を選んだ時の期待利得は，

$$p^2 \times 0 + p(1-p) \times (-1) + (1-p)p \times (-1) + (1-p)^2 \times 4 = 6p^2 - 10p + 4,$$

であり，プレイヤー 1 が B を選んだ時の期待利得は，

$$p^2 \times 2 + p(1-p) \times (-2) + (1-p)p \times (-2) + 0 \times 2 = 6p^2 - 4p$$

となります．したがってナッシュ均衡では

$$6p^2 - 10p + 4 = 6p^2 - 4p$$

です．これより $p = 2/3$ となり，ナッシュ均衡は全員が A を $2/3$ で選ぶことが分かります．

問題 6 問 3　ナッシュ均衡では，どのプレイヤーも最適反応戦略を選び合っています．言い換えると（相手がそのナッシュ均衡の戦略を選んでいるもとでは）自分は最適な戦略を選んでいて，他の戦略に手を変えても利得が高くならない状態であると言えます．

この少数決ゲームでは,（他のプレイヤーが戦略を変えない状態で）誰か 1 人が自分だけ戦略を変えると少数になれるならば，ナッシュ均衡ではありません．7 人のゲームでは，7 人とも同じ戦略を選んでいる状態はナッシュ均衡ではありません．自分だけ違う戦略に変えれば，その人は少数になるので，利得が高くなります（0 から 6 になる）．また 1 人が A を選び，6 人が B を選んでいる状態でも，多数である B を選んでいるプレイヤーは，自分だけ戦略を A に変えると少数派になるので利得が高くなります.（-1 から 2.5 に）．2 人が A を選び，5 人が B を選んでいる状態でも，多数である B を選んでいるプレイヤーは，自分だけ戦略を A に変えると少数派になるので利得が高くなります.（-1 から 4/3 に）．

しかし 3 人が A を選び，4 人が B を選んでいる状態では，たとえ B を選んでいるプレイヤーが自分だけ戦略を A に変えても，A が多数派になってしまうので利得は同じになります（-1 のまま）．つまり，A が 3 人，B が 4 人である状態はナッシュ均衡であることが分かります．このような状態は (A, A, A, B, B, B, B)，$(B, A, A, B, A, B, B) \cdots$ など 7 人のうち 3 人を選ぶ場合の数で ${}_7C_3 = 35$ 通りです．同様に 3 人が B を選び 4 人が A を選んでいる状態もナッシュ均衡でこれも 35 通り．これ以外には純粋戦略のナッシュ均衡はないことが，上の議論から分かるので，このゲームの純粋戦略のナッシュ均衡は 70 であることが分かります．

2016 年度ゲーム理論 1 試験　結果分析

- ゲーム理論 1 の GPS の平均が高いので，今回はいくつか難問を出すとともに問題数を増やしましたが，そのわりには良く出来ています．皆さん本当によく勉強しています．
- ゲーム理論を作ったのは「フォン・ノイマン」正答率が 99%で，302 人中 3 人だけ間違ってました．昨年の 90%よりも正答率があがりましたが，1 人はミリグラムにしていて，あとの 2 人が「ジョイマン」！ジョイマンは変なラップ芸の芸人です！

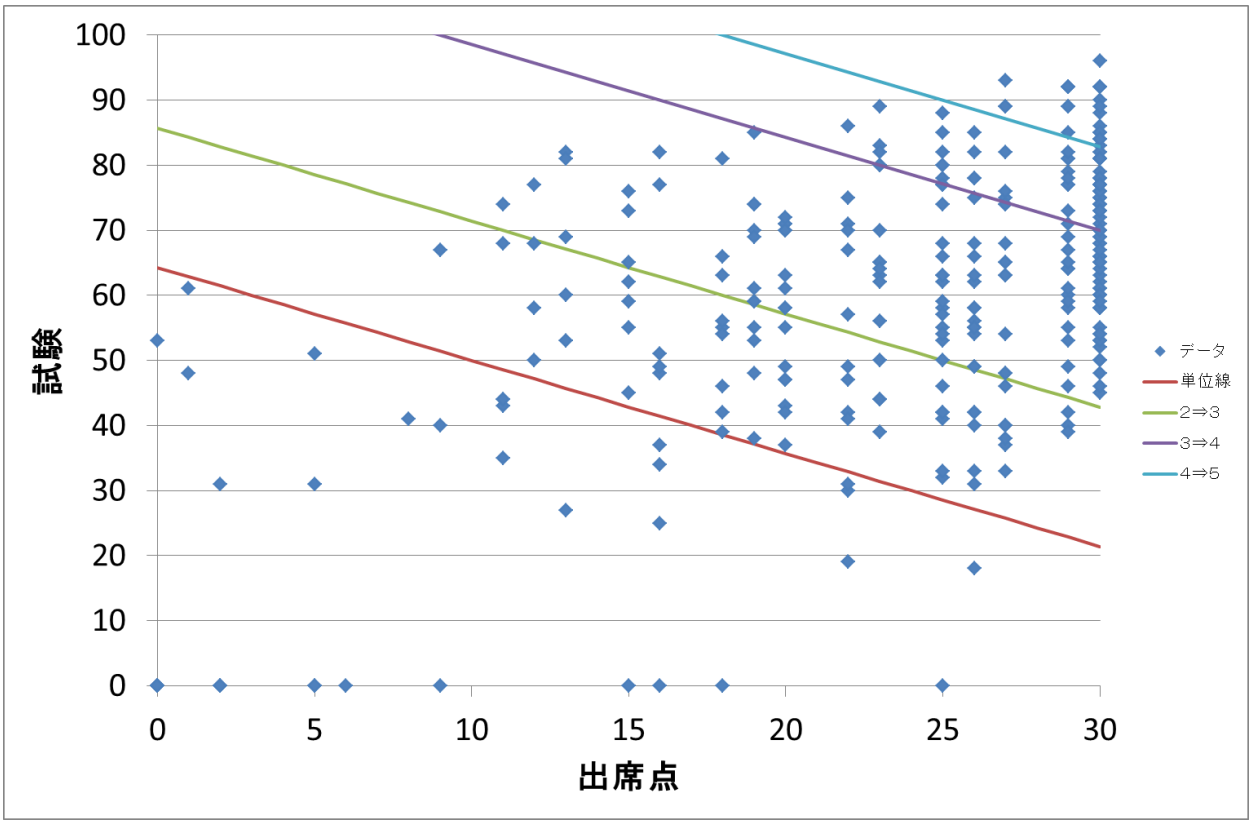
受験者数 302
平均点　63.5

得点分布

得点区間	人数
0-9	0
10-19	2
20-29	2
30-39	19
40-49	44
50-59	53
60-69	60
70-79	66
80-89	46
90-99	10
100	0
合計	302

問題ごとの正答率です．問題 6 の最後の問題は難しく，正答率は 3.3%でした．

		配点	正答数	正答率
問題 1	ア	3	299	99.0%
	イ	3	296	98.0%
	ウエ	3	224	74.2%
	オカ	3	213	70.5%
	キ	3	214	70.9%
問題 2	ア	3	295	97.7%
	イ	3	302	100.0%
	ウ	3	295	97.7%
	エ	3	274	90.7%
問題 3	ア	4	243	80.5%
	イウ	4	230	76.2%
	エオ	4	216	71.5%
問題 4	アイ	4	254	84.1%
	ウエ	4	252	83.4%
	オカキ	4	232	76.8%
	クケ	4	182	60.3%
	コサ	4	178	58.9%
	シスセ	4	159	52.6%

問題 5	ア	3	159	52.6%
	イ	3	137	45.4%
	ウ	3	124	41.1%
	エ	4	188	62.3%
	オ	4	83	27.5%
問題 6	ア	4	170	56.3%
	イウ	4	85	28.1%
	エ	4	166	55.0%
	オカ	4	25	8.3%
	キク	4	10	3.3%

出席点を横軸，試験の得点を縦軸にしたグラフです．
４つの線は，評価の境界線を示しています．