2018 年度ゲーム理論 2　試験　講評・解答・解説
2019/02/21　渡辺

例年より問題を難しくし，傾向を変えた結果，得点は低くなった.
履修者数 292
受験者数 280
平均点　43.9

得点分布

階級	人数	比率
0-9	1	0.4%
10-19	17	6.1%
20-29	38	13.6%
30-39	62	22.1%
40-49	50	17.9%
50-59	67	23.9%
60-69	28	10.0%
70-79	15	5.4%
80-89	1	0.4%
90-99	1	0.4%
100	0	0.0%
合計	280	

問題別正答率

問題番号	マーク番号	配点	正答数	正答率
Q11	1,2	5	191	65%
Q12	3,4	5	142	49%
Q13	5,6	5	29	10%
Q21	7	5	65	22%
Q22	8	5	185	63%
Q23	9	5	47	16%
Q24	10	5	61	21%
Q31	11	5	163	56%
Q32	12	5	177	61%
Q33	13	5	266	91%
Q34	14	5	219	75%
Q41	15,16	3	187	64%
Q42	17,18,19	3	180	62%
Q43	20,21	3	258	88%
Q44	22,23	3	165	57%
Q45	24,25	3	170	58%
Q46	26,27,28	4	115	39%
Q47	29,30,31	4	116	40%
Q51	32,33	3	112	38%
Q52	34,35	3	32	11%
Q53	36,37	4	27	9%
Q54	38,39,40,41	4	24	8%
Q55	42,43	4	11	4%
Q56	44,45	4	48	16%

- 部分ゲーム完全均衡を求める問題 2 の問２は，単なる完全情報ゲームのバックワードインダクションであり, ゲーム理論 1 では 95%ができていたが, 本問題の正答率は 63%であった.「部分ゲーム完全均衡」の意味を理解していないことが分かる.

以下，問題の解説＋解答

2018年ゲーム理論２試験　問題解説

平成31 年2 月21 日
誤りがあればお知らせ下さい．

問題 1 問1 部分ゲーム完全均衡では，両プレイヤーは2回とも協力しない（(D, D)）．このとき毎回の利得は1であるから，利得（割引利得和）は

$$1 + D = 1 + 2/3 = 2/5$$

問2 両プレイヤーがトリガー戦略を選ぶと，ずっと協力する（(C, C)）ことになるので，割引利得和は

$$4 + 4D + 4D^2 + 4D^3 + \cdots = \frac{4}{1-D}$$

$D = 0.9$ のとき40となる．

問3 まず（嘘だけど）雑に考えてみよう．両プレイヤーがトリガー戦略を選ぶと，ずっと協力して利得は40．ここで1回目に D を選ぶと，1回目は得をして利得は5になるが，その後は毎回，良くても利得は1（悪ければ -1）になる．そこで1回目に D を選んだときの利得は良くても

$$5 + 1 \times D + 1 \times D^2 + \cdots = 5 + D + D^2 + D^3 \cdots = 5 + \frac{D}{1-D}$$

したがって両プレイヤーがトリガー戦略を選ぶことが，裏切るより悪くないためには

$$\frac{4}{1-D} \geq 5 + \frac{D}{1-D}$$

これをとくと $D \geq 1/4$ となる．

上記の問3は正確な考え方は，以下のようになります．

両プレイヤーがトリガー戦略を選ぶときの利得は問2より40．

ここで，トリガー戦略がナッシュ均衡になるためには，相手がトリガー戦略を選んだとするき，自分がトリガー戦略以外のどんな戦略に変えても，利得が高くならなければ良い．

自分がトリガー戦略以外の戦略に変えたときに，1回も D にならない（例えば「ずっと協力する」など）場合は，利得が同じなので考えなくて良い．

自分がトリガー戦略以外の戦略の戦略に変えたとき，1回以上 D になったとしよう．このとき最初に D が現れた回数を t 回目とする．その結果，

- $t-1$ 回目までは，トリガー戦略でも，変えた戦略でもずっと協力していて利得は毎回4
- t 回目は，トリガー戦略だと利得は4だが，でも，変えた戦略だと利得は5になる．
- $t+1$ 回目以降は，トリガー戦略を選んでいるとお互いずっと協力していて利得は4なのでその戦略だと，相手は D を出し続けるので，利得は良くて1（悪ければ -1）になる．

- そこで利得の違いが現れる t 回目以降の利得の考えると，自分がトリガー戦略を選んでいると

  $$4D^{t-1} + 4D^t + 4D^{t+1} + \cdots = \frac{4D^{t-1}}{1-D}$$

  変えた戦略における利得は良くても

  $$5D^{t-1} + 1 \times D^t + 1 \times D^{t+1} + \cdots = 5 + D^t + D^{t+1} + \cdots = D^{t-1}\left(5 + \frac{D}{1-D}\right)$$

  したがって両プレイヤーがトリガー戦略を選ぶことが，裏切るより悪くないためには

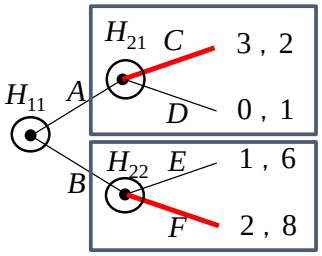
  $$\frac{4}{1-D} \geq 5 + \frac{D}{1-D}$$

  これをとくと $D \geq 1/4$ となる．

問題 2 解答については次ページ以降に詳細に解説しています．

問題 3 解答については次ページ以降に詳細に解説しています．

ゲーム1



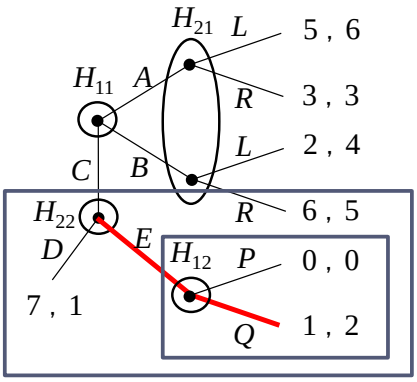
- 元のゲームの利得行列は左下のようになり，ナッシュ均衡は(A,CE),(A,CF),(B,DF)です．
- 適切な部分ゲームは，情報集合H_{21} H_{22}以降であり，その部分のナッシュ均衡（1人の意思決定）を求めると，H_{21}でC, H_{22}ではFが選ばれます（左図）
- したがって部分ゲーム完全均衡は，ナッシュ均衡の中で，H_{21}でC, H_{22}でFが選ばれている(A,CF)のみになります．

	CE	*CF*	*DE*	*DF*
A	(3,2)	(3,2)	(0,1)	(0,1)
B	(1,6)	(2,8)	(1,6)	(2,8)

このゲームは完全情報ゲーム（すべての情報集合が1つの点からなり，すべての点で，それまでのプレイヤーが何を選んだかが分かる）ですので，部分ゲーム完全均衡はバックワードインダクションで解いたものと一致します．

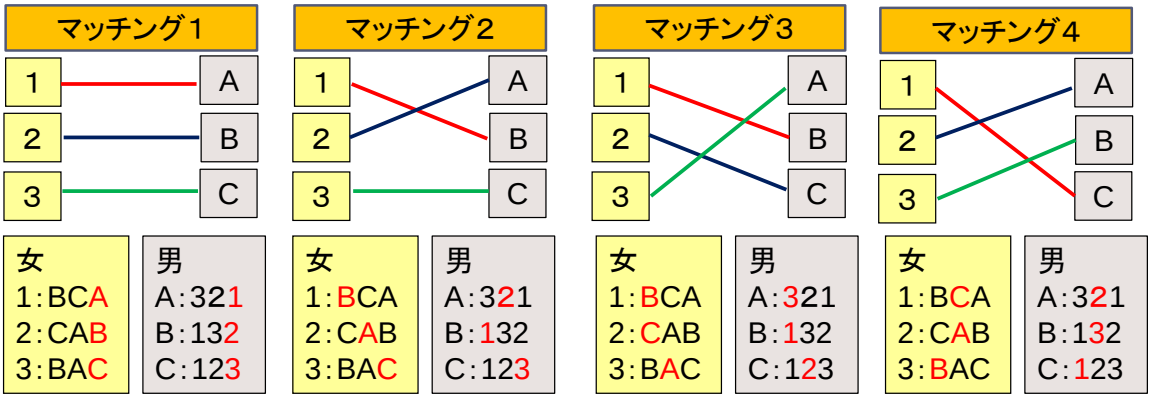
ゲーム2

NABENAVI .net



- 元のゲームの利得行列は左下のようになります．
- ナッシュ均衡は(AP,LE),(AQ,LE),(BP,RE),(BQ,RE),(CP,LD),(CP,RD)です．
- 適切な部分ゲームは，情報集合H_{22}以降とH_{12}以降です．（左図）
- H_{12}以降の部分ゲームのナッシュ均衡（1人の意思決定）を求めるとH_{12}ではQが選ばれます．
- それを前提とするとH_{22}ではEが選ばれますしたがって部分ゲーム完全均衡は，ナッシュ均衡の中でH_{12}ではQ H_{22}ではEが選ばれているものであり，(AQ,LE),(BQ,RE)になります．

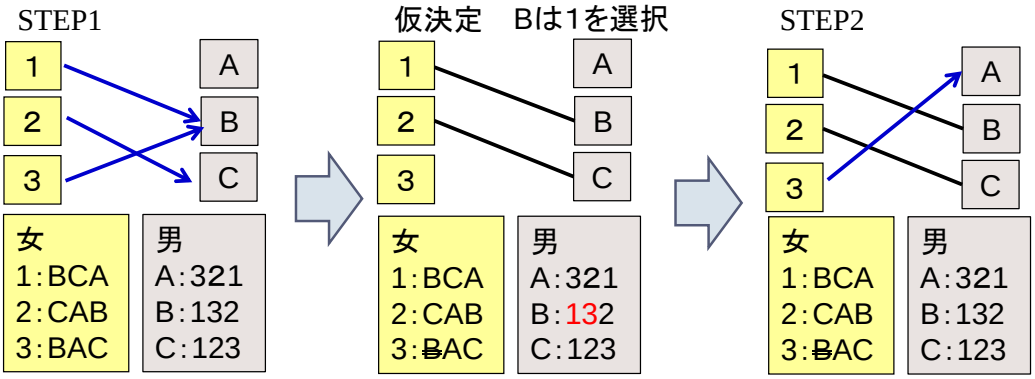
	LD	*LE*	*RD*	*RE*
AP	(5,6)	(5,6)	(3,3)	(3,3)
AQ	(5,6)	(5,6)	(3,3)	(3,3)
BP	(2,4)	(2,4)	(6,5)	(6,5)
BQ	(2,4)	(2,4)	(6,5)	(6,5)
CP	(7,1)	(0,0)	(7,1)	(0,0)
CQ	(7,1)	(1,2)	(7,1)	(1,2)



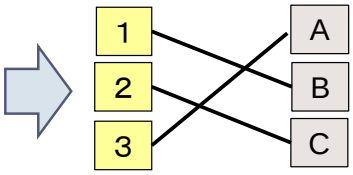
	マッチング1	マッチング2	マッチング3	マッチング4
女側パレート	× マッチング3がパレート優位	× マッチング3がパレート優位	○ どんなマッチングも1か2を悪くする	○ どんなマッチングも1か3を悪くする（3を悪くしないためには1を悪くするしかない）
全体パレート	× マッチング3がパレート優位	× マッチング3がパレート優位	○ 女側パレートなら，全体パレート	○ 女側パレートなら，全体パレート
安定マッチング	× 1とBが離脱するので不安定	× 1とBが離脱するので不安定	○安定（女側DA方式で得られている）	× 1とBが離脱するので不安定

女性側提案の受入保留方式

NABENAVI .net
2018



すべてのマッチングが決定したので終了



問題 4 問 1 これは需要関数が $p = 72 - x$ で，限界費用が 0 のただのクールノー競争である．

問 2 企業 1 高需要タイプ，低需要タイプの利益をそれぞれ π_{1H}，π_{1L} とし，企業 2 の期待利益を π_2 とする．π_{1H} は

$$\begin{aligned}\pi_{1H} &= (72 - x)x_{1H} \\ &= \{72 - (x_{1H} + x_2)\}x_{1H} \\ &= -x_{1H}^2 + x_2 x_{1H} + 72x_{1H}\end{aligned}$$

である．これを x_{1H} で偏微分すると，

$$\frac{\partial \pi_{1H}}{\partial x_{1H}} = -2x_{1H} + x_2 + 72$$

となる．$\frac{\partial \pi_{1H}}{\partial x_{1H}} = 0$ を解くことにより，企業 1 高費用タイプの最適反応関数は

$$x_{1H} = \frac{1}{2}x_2 + 36 \tag{1}$$

である．

問 3 問 *2* と同様に

$$\begin{aligned}\pi_{1L} &= (36 - x)x_{1L} \\ &= \{36 - (x_{1L} + x_2)\}x_{1L} \\ &= -x_{1L}^2 + x_2 x_{1L} + 36x_{1L}\end{aligned}$$

であり，これを x_{1L} で偏微分すると，

$$\frac{\partial \pi_{1L}}{\partial x_{1L}} = -2x_{1L} + x_2 + 36$$

となる．$\frac{\partial \pi_{1L}}{\partial x_{1L}} = 0$ を解くことにより，企業 1 低費用タイプの最適反応関数は

$$x_{1L} = \frac{1}{2}x_2 + 18 \tag{2}$$

である．

企業 2 の期待利益は

$$\pi_2 = \frac{1}{3}\left\{72 - (x_{1H} + x_2)\right\}x_2 + \frac{2}{3}\left\{36 - (x_{1L} + x_2)\right\}x_2$$

となる．この式は計算すると，

$$\pi_2 = -x_2^2 - \left(\frac{1}{3}x_{1H} + \frac{2}{3}x_{1L}\right)x_2 + 48x_2 \tag{3}$$

となる．

(3) を x_2 で偏微分すると，

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} = -2x_2 - \left(\frac{1}{3}x_{1H} + \frac{2}{3}x_{1L}\right) + 48$$

となる．$\frac{\partial \pi_2}{\partial x_2} = 0$ を解くと，企業 2 の最適反応関数は

$$x_2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3}x_{1H} + \frac{2}{3}x_{1L}\right) + 24 \tag{4}$$

である．

ベイズナッシュ均衡は，(1)，(2) と (4) を同時に満たす x_{1H}，x_{1L}，x_2 である．(4) に，(1) と式 (2) を代入し計算すると $x_2 = 16$ を得る．これを (1) と (2) に代入して $x_{1H} = 28$ と $x_{1L} = 10$ を得る．

ベイズナッシュ均衡における企業 1 高需要タイプの生産量は 28，企業 2 の生産量は 28 である．

問 4 問 *3* のベイズナッシュ均衡において，企業 2 の期待利益（事前の期待利益）は，(3) で与えられるので，$x_{1H} = 28$，$x_{1L} = 10$，$x_2 = 16$ を代入して 256 となる．

企業 2 が生産量を決定した後に高需要であると分かったとしても，企業 1 は高需要タイプの生産量 $x_{1H} = 28$，企業 2 は $x_2 = 16$ を生産することを既に決定している．企業 2 の利益（事後利益）は，

$$\pi_2 = (72 - x)x_2 = \{72 - (x_{1H} + x_2)\}x_2$$

であるから，これに $x_{1H} = 28$，$x_2 = 16$ を代入して 576 を得る．

問題 5 ゲーム理論では，プレイヤーが得る金額ではなく，その金額から得る利得（効用）に従ってゲームの解を求めます．ここで遠藤が x 万円を得たときの彼の効用（利得）は $u(x) = \sqrt{x}$ で与えられており，またカイジはリスク中立的（金額がそのまま利得になる）ことから，第 *2* ステージでは

- 両方が A を選んだ場合，カイジは遠藤に 1 万円を支払うので，遠藤の利得は $u(1) = \sqrt{1} = 1$，カイジの利得は -1.
- 両方が B を選んだ場合，カイジは遠藤に 4 万円を支払うので，遠藤の利得は $u(4) = \sqrt{4} = 2$，カイジの利得は -4.
- 両方が異なるものを選んだ場合は，誰にも支払いは生じないので，遠藤とカイジの利得は共に 0

と考えられる．このことから，このゲームの利得行列は図 *1* となる．

遠藤＼カイジ	A	B
A	(1, -1)	(0, 0)
B	(0, 0)	(2, -4)

図 1: 問題 5 問 1 のゲーム

図 *1* における混合戦略のナッシュ均衡では，遠藤は A を確率 4/5，B を 1/5 で選び，カイジは A を確率 2/3，B を 1/3 で選ぶ．

遠藤の期待利得は

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 1 + \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}.$$

ここで確実性等価額を z とする．z は遠藤が確実にお金をもらった時に，期待利得と同じ利得を得るような金額であり，$u(z) = 2/3$ となるから $z = 4/9$ である．

一方，遠藤がもらえる金額の期待値，期待金額は

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 1 + \frac{4}{5} \times \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} \times 0 + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{5}.$$

である．リスクプレミアムは期待金額と確実性等価額との差であるから $4/5 - 4/9 = 16/45$ となる．

遠藤の第 *2* ステージ得る期待効用の確実性等価額が 4/9 であるということは，遠藤が第 *1* ステージでカイジから得る確実な金額が 4/9 以上であれば，その提案を承諾し，4/9 未満であれば提案を拒否して第 *2* ステージのゲームへ移る．

一方，カイジが第 *2* ステージで支払う金額の期待値は 4/5 であり，4/9 よりも大きい．したがって第 *1* ステージでカイジは遠藤に 4/9 万円を支払うことを提案し，遠藤はそれを承諾する．

もし遠藤もカイジもリスク中立的であれば，ゲームの利得行列は図 *2* となる．

図 *2* における混合戦略のナッシュ均衡では，遠藤は A を確率 4/5，B を 1/5 で選び，カイジは A を確率 4/5，B を 1/5 で選ぶ．

遠藤＼カイジ	A	B
A	(1, -1)	(0, 0)
B	(0, 0)	(4, -4)

図 2: 問題 5 問 4 のゲーム

遠藤の期待利得は

$$\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times 1+\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}\times 0+\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\times 0+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times 4=\frac{4}{5}.$$

であり，これは期待金額でもある（カイジの支払額の期待金額も同じ）.

したがって第 *1* ステージでカイジは遠藤に 4/5 万円を支払うことを提案し，遠藤はそれを承諾する.

ゲーム理論 2 期末試験 解答と配点

Jan 29, 2019

注意事項

- 解答用紙の学修番号を正確にマークせよ．
- 解答は [　　] 内の番号に対応するマークシートの番号のマーク欄に該当する数字・記号をマークせよ．
- 解答が数値の場合は，マーク欄は数値（0 から 9 まで）か，マイナス − の符号のどれかをマークせよ．数値が負の場合のみ，符号のマイナスをつけよ．**数値が正か 0 の場合は，符号はつけない．マークシートの + は，指示がない限りは使わない．**
- 分数の問題は，必ず約分せよ．また 1 は $\frac{1}{1}$，0 は $\frac{0}{1}$ と答えよ．負の分数のときは，マイナスの符号は分子につけよ．
- 解答欄の桁数が余るときは前の桁に 0 をマークせよ．例えば **[1][2][3]** の答えが 7 のときは，007 とし，[1] と [2] に 0，[3] に 7 をマークせよ．

問題 1 図 *1* は囚人のジレンマゲームである．このゲームの繰り返しゲームを考える．割引因子を D とする．以下の問いに答え，[*1*] − [*6*] に当てはまる数値または符号をマークしなさい．

⑤ 5点×3 = 15点

問 1 $D = 2/3$ とする．このゲームを 2 回繰り返すとき，部分ゲーム完全均衡でプレイヤー 1 が得る利得（割引利得和）は $\frac{[1]}{[2]}$ である．

5
3

問 2 $D = 0.9$ とする．このゲームを無限回繰り返すとき，両プレイヤーがトリガー戦略を選ぶとプレイヤー 1 が得る利得（割引利得和）は [*3*][*4*] である．

40

問 3 このゲームを無限回繰り返すとき，両プレイヤーがトリガー戦略を選ぶことがナッシュ均衡になるのは，$D \geq \frac{[5]}{[6]}$ のときである．

1
4

1 \ 2	C	D
C	(4, 4)	(-1, 5)
D	(5,-1)	(1, 1)

図 1: 繰り返しゲームの成分ゲーム（囚人のジレンマ）

問題 2 図 2 の 2 つの展開形ゲームについて，次の問いに答えよ．ここで情報集合 H_{ij} はプレイヤー i の j 番目の情報集合を表しており，利得は左がプレイヤー 1，右がプレイヤー 2 を表している．選択肢では，プレイヤーが選ぶ行動を，プレイヤー順にカンマで区切って並べ，各プレイヤーでは情報集合の番号順に並べている．

例えばゲーム 1 の選択肢の場合，(A, CE) はプレイヤー 1 が A を選び，プレイヤー 2 が H_{21} で C を H_{22} で E を選ぶことを表している．⑤点×4 =20点

問 1 ゲーム 1 のナッシュ均衡を選択肢からすべて選び，[7] にマークせよ．①,②,⑧

問 2 ゲーム 1 の部分ゲーム完全均衡を選択肢からすべて選び，[8] にマークせよ．②

問 3 ゲーム 2 のナッシュ均衡を選択肢からすべて選び，[9] にマークせよ．②,④,⑥,⑦

問 4 ゲーム 2 の部分ゲーム完全均衡を選択肢からすべて選び，[10] にマークせよ．④,⑥

ゲーム 2 では選択肢以外にもナッシュ均衡や部分ゲーム完全均衡が存在する可能性があるが，選択肢の中だけで考えよ．選択肢にナッシュ均衡や部分ゲーム完全均衡がない場合は –(マイナス) をマークせよ．

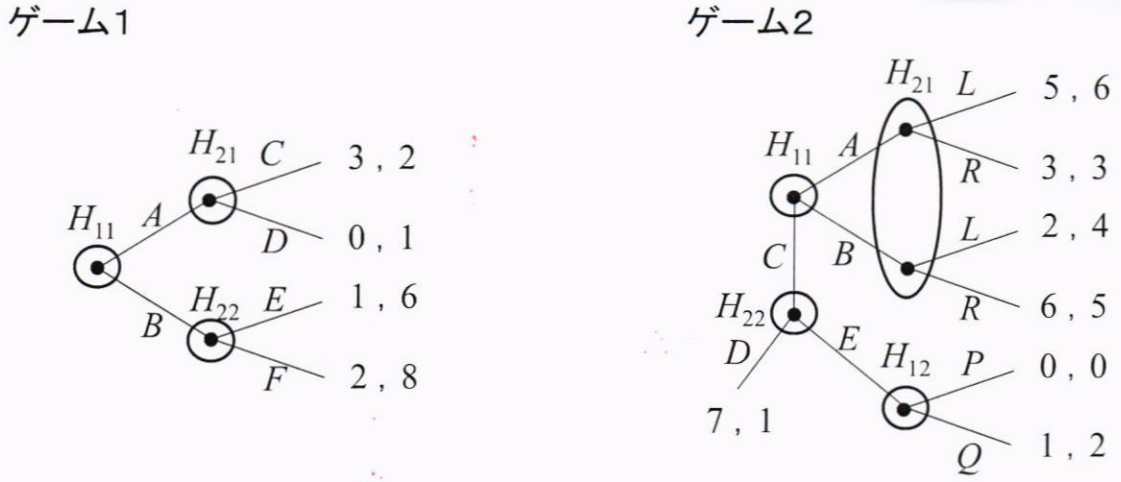


図 2: ナッシュ均衡と部分ゲーム完全均衡を求めよ

問 1，問 2 の選択肢（ゲーム 1）

① (A, CE) ② (A, CF) ③ (A, DE) ④ (A, DF)
⑤ (B, CE) ⑥ (B, CF) ⑦ (B, DE) ⑧ (B, DF)

問 3，問 4 の選択肢（ゲーム 2）

① (AP, LD) ② (AP, LE) ③ (AQ, LD) ④ (AQ, LE) ⑤ (BQ, RD)
⑥ (BQ, RE) ⑦ (CP, LD) ⑧ (CP, LE) ⑨ (CQ, RD) ⓪ (CQ, RE)

問題 3 女 1, 2, 3 と男 A, B, C の 3 人ずつのペアに対して，異性に対する好みが以下で与えられている．

女	男
女 1 : $B \succ C \succ A$	男 A : $3 \succ 2 \succ 1$
女 2 : $C \succ A \succ B$	男 B : $1 \succ 3 \succ 2$
女 3 : $B \succ A \succ C$	男 C : $1 \succ 2 \succ 3$

このとき以下のマッチング 1, 2, 3, 4 の中から各問いの条件に当てはまるマッチングをすべて選びなさい (複数ある時はすべてマークせよ).

マッチング 1　$1-A, 2-B, 3-C$
マッチング 2　$1-B, 2-A, 3-C$
マッチング 3　$1-B, 2-C, 3-A$
マッチング 4　$1-C, 2-A, 3-B$

⑤点×4＝20点

問 1 女側パレート最適なマッチングをすべて選び，[11] にマークせよ．　③,④

問 2 全体パレート最適なマッチングをすべて選び，[12] にマークせよ．　③,④

問 3 女側受入保留方式（*Gale-Shapley* アルゴリズム，女側が志望順位を提出してプロポースし，それに基いて男子側が決定・却下を繰り返していく）により得られるマッチングをすべて選び，[13] にマークせよ．　③

問 4　安定マッチングをすべて選び，[14] にマークせよ．　③

問題 4 2 つの企業 (企業 1 と企業 2) が同質財を供給し，複占市場で生産量競争をしており，需要が高い場合と低い場合の 2 つの可能性がある．企業 1 と企業 2 の生産量の合計を x，財の価格を p とすると，高需要のとき逆需要関数は $p = 72 - x$ で，低需要のとき逆需要関数は $p = 36 - x$ であるとしよう．企業 1 と 2 の限界費用はいずれも 0 として考える（すなわち収入＝利益）．

以下の問いに答え，[15][16] - [29][30][31] に当てはまる数値または符号をマークしなさい．　23点

問 1 企業 1 と 2 がお互いに高需要であると分かっている場合，各企業の生産量はそれぞれ [15][16]，各企業の利益はそれぞれ [17][18][19] である．
24　③点　576　③点

問 2 企業 1 は高需要か低需要であることを分かっているとし，前者を高需要タイプ，後者を低需要タイプと呼ぶことにする．企業 2 はそれを知らず，高需要と低需要を確率 1/3 と 2/3 で推測し，生産量を決定するものとする．高需要タイプの生産量を x_{1H}，企業 2 の生産量を x_2 とする．企業 1 高需要タイプの最適反応関数（利潤を最大にする生産量）は

$$x_{1H} = -\frac{1}{2}x_2 + \boxed{[20][21]}$$

36　③点

となる．

問 3 問 2 において，ベイズナッシュ均衡における企業 1 高需要タイプの生産量は [22][23]，企業 2 の生産量は [24][25] である．
28　③点　16　③点

問 4 問 3 のベイズナッシュ均衡において，企業 2 の期待利益（事前の期待利益）は [26][27][28] である．企業 2 が生産量を決定した後に高需要であると分かったとき，企業 2 の利益（事後利益）は [29][30][31] となる．
256　④点　448　④点

問題 5 カイジは遠藤に借金があるが返そうとしない．利根川は，カイジと遠藤を呼んで，次のゲームをやらせた． 22点

- 第 *1* ステージで，カイジは遠藤に x 円を支払うことを提案する．遠藤がそれに承諾すると，カイジは遠藤に x 円を支払って終わり．
- 遠藤が拒否すると第 *2* ステージのゲームに進む．第 *2* ステージでは，遠藤とカイジは A か B かのどちらかを同時に選ぶ．
- 両方が A を選んだ場合，カイジは遠藤に 1 万円を支払う．
- 両方が B を選んだ場合，カイジは遠藤に 4 万円を支払う．
- 両方が異なるものを選んだ場合は，誰にも支払いは生じない．

ここで遠藤はリスク回避的であり，x 万円を得たときの彼の効用（利得）は $u(x) = \sqrt{x}$ で与えられているとする．これに対し，カイジはリスク中立的であるとする．また第 *1* ステージで遠藤が拒否したときと承諾したときが同じ利得の場合は，遠藤は承諾してゲームは終わると考える．時間による利得の割引はないものとする．以下の問いに答え，[32] - [45] に当てはまる数値または符号をマークしなさい．分数は約分して分数のまま答えよ（小数にしない）．

問 1 第 *2* ステージのナッシュ均衡において，遠藤は A を確率 $\frac{[32]}{[33]}$ 4/5 で選び，カイジは A を確率 $\frac{[34]}{[35]}$ 2/3 で選ぶ． ③点

③点

問 2 第 *2* ステージのナッシュ均衡において，遠藤の期待利得（期待効用）は $\frac{[36]}{[37]}$ 2/3 であり，リスクプレミアムは $\frac{[38][39]}{[40][41]}$ 16/45 万円である． ④点

④点

問 3 第 *1* ステージでカイジは遠藤に $x = \frac{[42]}{[43]}$ 4/9 万円を支払うことを提案し，遠藤はそれを承諾する．

④点

問 4 もし，遠藤もカイジもリスク中立的ならば，第 *1* ステージでカイジは遠藤に $x = \frac{[44]}{[45]}$ 4/5 万円を支払うことを提案し，遠藤はそれを承諾する．

④点