解説は解答の後にあります．

ゲーム理論 2 期末試験

Jan 21, 2020

注意事項

- 解答用紙の学修番号を正確にマークせよ．
- 解答は [　　] 内の番号に対応するマークシートの番号のマーク欄に該当する数字・記号をマークせよ．解答が数値の場合は，マーク欄は数値（0 から 9 まで）か，マイナス − の符号のどれかをマークせよ．数値が負の場合のみ，符号のマイナスをつけよ．**数値が正か 0 の場合は，符号はつけない．マークシートの + は，指示がない限りは使わない．**
- 分数の問題は，必ず約分せよ．また 1 は $\frac{1}{1}$，0 は $\frac{0}{1}$ と答えよ．負の分数のときは，マイナスの符号は分子につけよ．
- 解答欄の桁数が余るときは前の桁に 0 をマークせよ．例えば [1][2][3] の答えが 7 のときは，007 とし，[1] と [2] に 0，[3] に 7 をマークせよ．

問題 1 図 *1* の 2 つの展開形ゲームにおいて，H_{ij} はプレイヤー i の j 番目の情報集合を表し，利得は左がプレイヤー 1，右がプレイヤー 2 を表している．選択肢では，プレイヤーが選ぶ行動を，プレイヤー順にカンマで区切って並べ，各プレイヤーでは情報集合の番号順に並べている．例えばゲーム 1 の選択肢の場合，(A, CE) はプレイヤー 1 が A を選び，プレイヤー 2 が H_{21} で C を H_{22} で E を選ぶことを表している．次の問いに答えよ．

①⑥⑧

問 1 ゲーム 1 のナッシュ均衡と部分ゲーム完全均衡を選択肢からすべて選び，ナッシュ均衡は [*1*] に，部分ゲーム完全均衡は [*2*] にマークせよ．

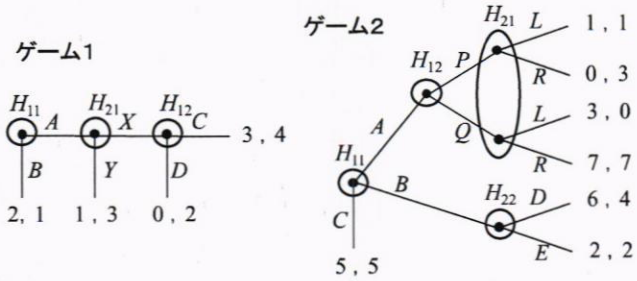
①

③④⑤⑧

問 2 ゲーム 2 のナッシュ均衡と部分ゲーム完全均衡を選択肢からすべて選び，ナッシュ均衡は [*3*] に，部分ゲーム完全均衡は [*4*] にマークせよ．

③

ゲーム 2 では選択肢以外にもナッシュ均衡や部分ゲーム完全均衡が存在する可能性があるが，選択肢の中だけで考えて答えよ．選択肢にナッシュ均衡や部分ゲーム完全均衡がない場合は −(マイナス) をマークせよ．



5点×4＝20点

図 1: ナッシュ均衡と部分ゲーム完全均衡を求めよ

ゲーム 1 の選択肢

① (AC, X)　② (AC, Y)　③ (AD, X)　④ (AD, Y)
⑤ (BC, X)　⑥ (BC, Y)　⑦ (BD, X)　⑧ (BD, Y)

ゲーム 2 の選択肢

① (AP, RD)　② (AP, RE)　③ (AQ, RD)　④ (AQ, RE)　⑤ (BQ, LD)
⑥ (BQ, LE)　⑦ (CP, LD)　⑧ (CP, LE)　⑨ (CQ, RD)　⓪ (CQ, RE)

どうよ．

問題 2 女 1,2,3 と男 A,B,C の 3 人ずつのペアに対して，異性に対する好みが以下で与えられている．

女	男
女 1 : $A \succ C \succ B$	男 A : $3 \succ 1 \succ 2$
女 2 : $A \succ B \succ C$	男 B : $1 \succ 2 \succ 3$
女 3 : $B \succ C \succ A$	男 C : $1 \succ 2 \succ 3$

このとき以下のマッチング ~~1,2,3,~~4 の中から各問いの条件に当てはまるマッチングをすべて選びなさい (複数ある時はすべてマークせよ).

1〜6

① マッチング 1 $1-A, 2-B, 3-C$
② マッチング 2 $1-A, 2-C, 3-B$
③ マッチング 3 $1-B, 2-A, 3-C$
④ マッチング 4 $1-B, 2-C, 3-A$
⑤ マッチング 5 $1-C, 2-A, 3-B$
⑥ マッチング 6 $1-C, 2-B, 3-A$

5点×4＝20点

①.②.⑤

問 1 女側パレート最適なマッチングをすべて選び， [5] にマークせよ．

問 2 女側受入保留方式（*Gale-Shapley* アルゴリズム，女側が志望順位を提出してプロポースし，それに基いて男~~女~~側が決定・却下を繰り返していく）により得られるマッチングをすべて選び，

① [6] にマークせよ．

問 3 男側受入保留方式（*Gale-Shapley* アルゴリズム，男側が志望順位を提出してプロポースし，それに基いて女~~男~~側が決定・却下を繰り返していく）により得られるマッチングをすべて選び，

⑥ [7] にマークせよ．

問 4 安定マッチングをすべて選び， [8] にマークせよ．

①,⑥

問題 3 2 つの企業 (企業 1 と企業 2) が差別化された財を供給し，複占市場で価格競争（ベルトラン競争）をしているとする．財の需要関数は，企業 i の価格を p_i，需要量を q_i $(i=1,2)$ とすると

$$q_1 = 60 - p_1 + p_2$$

$$q_2 = 48 - p_2 + p_1$$

で与えられるものとする．

企業 1 は，限界費用が 36 と高い場合と，18 の低い場合があるとする．前者を高費用タイプ，後者を低費用タイプと呼ぶことにする．企業 2 の限界費用は 36 とする．企業 1 は自分の費用が分かっているが，企業 2 は企業 1 の費用は分からず，高費用タイプと低費用タイプをそれぞれ確率 $\frac{1}{3}$ と $\frac{2}{3}$ として推測しているものとする（企業 2 の費用が 36 であることはどちらも知っている）．以下の問いに答えなさい．

問 1 企業 1 高費用タイプと企業 2 の価格をそれぞれ p_{1H}, p_2 とすると，企業 1 高費用タイプの最適反応関数は

$$p_{1H} = \frac{\boxed{[9]}\ 1}{\boxed{[10]}\ 2} p_2 + \boxed{[11][12]}\ 48$$

①

である．

問 2 ベイズナッシュ均衡における企業 1 高費用タイプの価格は [13][14] 90，企業 2 の価格は [15][16] 84 である．

②　③

問 3 ベイズナッシュ均衡において，企業 1 が低費用タイプであった場合は，企業 1 の財の需要量は [17][18] 63，企業 2 の財の需要量は [19][20] 45 となる．

④　⑤

4点×5＝20点

問題 4 以下の 2 人ゲームを考える．

(1) プレイヤー 1 が 3 枚のカード 1 枚をランダムに引く．3 枚のうち，2 枚は H (*High*) で．1 枚は L(*Low*) と書かれている．プレイヤー 1 だけが，そのカードを見る．プレイヤー 2 はプレイヤー 1 の引いたカードは分からない．

20点

(2) プレイヤー 1 は B(*Bid*) か D(*Drop*) を選ぶ．

(3) プレイヤー 1 が，D を選べばゲームはそこで終わり，プレイヤー 1 はプレイヤー 2 に 3 万円を支払う（プレイヤー 1 の利得 -3，プレイヤー 2 の利得 $+3$）

(4) プレイヤー 1 が，B を選ぶと，プレイヤー 2 が B(*Bid*) か D(*Drop*) を選ぶ．プレイヤー 2 が，D を選べばゲームはそこで終わり，プレイヤー 2 はプレイヤー 1 に 3 万円を支払う．(プレイヤー 1 の利得 $+3$，プレイヤー 2 の利得 -3)

(5) 両者が共に B を選ぶと，カードが勝敗を決める．プレイヤー 1 の引いたカードが H ならば，プレイヤー 1 の勝利，L ならばプレイヤー 2 の勝利である．この場合は，~~勝った方が負けた方~~に 6 万円支払う．(勝者の利得 $+6$，敗者の利得 -6)
負けた方が勝った方

以下に当てはまる数値を答えよ．(再注意：分数において 1 は $\frac{1}{1}$，0 は $\frac{0}{1}$ と答えよ．)

問 1 図 *2* の左図は，最初に自然が 2/3 でプレイヤー 1 に H のカードを与え，1/3 で L のカードを与えるとし，ゲームをゲームの木で表現したものである．ここで $a =$ [21] 3，$c =$ [22] 6 である．

2点×2=4点

問 2 図 *2* の右図は，このゲームを戦略形ゲームに変換したものである．ここでプレイヤー 1 の戦略は左側が H を引いたとき，右側が L を引いたときの行動を表し，例えば BD は「H を引けば B を選び，L を引けば D を選ぶ」という戦略を表す．ここで $d =$ [23] 3，$e =$ [24] 4，$f =$ [25] 3，$g =$ [26] 3 である．

1点×4=4点

問 3 プレイヤー 1 の支配されない戦略を，以下からすべて求め，その番号を [27] ①,② にすべてマークせよ．

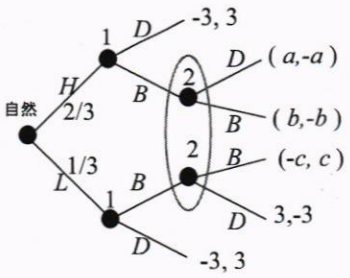
2点

①BB　②BD　③DB　④DD

問 4 この戦略形ゲームのナッシュ均衡では，プレイヤー 1 は BB を確率 [28]/[29] 2/3 で，DB を確率 [30]/[31] 0/1 で選ぶ．プレイヤー 2 は D を [32]/[33] 1/3 で選ぶ．(ヒント：このゲームには純粋戦略のナッシュ均衡はない．支配された戦略は使われない（確率 0 で選ぶ）として取り除いて，混合戦略のナッシュ均衡を求める)．

2点×5=10点

問 5 問 *2* で求めたナッシュ均衡において，プレイヤー 1 が H を引いた時に（その条件のもとで），B を選ぶ確率は [34]/[35] 1/1 である．L を引いた時に（その条件のもとで），B を選ぶ確率は [36]/[37] 2/3 である．



1 \ 2	B	D
BB	(2,-2)	(g,-g)
BD	(d,-d)	(h,-h)
DB	(-e, e)	(-i, i)
DD	(-f,f)	(-j,j)

図 2: ナッシュ均衡と部分ゲーム完全均衡を求めよ

問題 5 次のようなゲームを考える．

- プレイヤー 1 と 2 が，毎回，A か B を同時に選ぶ．
- 同じものを選ぶとプレイヤー 1 がポイントを得る．ここで両方が A を選ぶとプレイヤー 1 は 2 ポイント獲得し，両方が B を選ぶとプレイヤー 1 は 1 ポイント獲得する．
- 異なるものを選ぶとプレイヤー 2 がポイントを得る．ここでプレイヤー 1 が A を選び，プレイヤー 2 が B を選ぶと，プレイヤー 2 は 2 ポイント獲得し，プレイヤー 1 が B を選び，プレイヤー 2 が A を選ぶと，プレイヤー 2 は 1 ポイント獲得する．

ゲームは，先に 2 ポイント以上を獲得したプレイヤーが勝ちであり，勝ったプレイヤーの利得は $+1$，負けたプレイヤーの利得は -1 である．(負けた方が何ポイントを取ったかは勝敗に関係がない)．このゲームの部分ゲーム完全均衡はどうなるか．以下の問いに答えよ．プレイヤーは各ゲームではポイントではなく，利得を最大化すると考える．(再注意：分数において 1 は $\frac{1}{1}$，0 は $\frac{0}{1}$ と答えよ．)

①5点

問 1 両者が 1 ポイントずつ獲得しているとき（両者とも 1 ポイント以上を獲得すれば勝ち），プレイヤー 1 は A を $\frac{[38]}{[39]}$ 1 2 で選ぶ．またこのときプレイヤー 1 の期待利得は $\frac{[40]}{[41]}$ 0 1 である．

問 2 プレイヤー 1 が 1 ポイント獲得し，プレイヤー 2 が 0 ポイントのときを考える．このときプレイヤー 1 は A を $\frac{[42]}{[43]}$ 1 3 で選び，プレイヤー 2 は A を $\frac{[44]}{[45]}$ 2 3 で選ぶ．プレイヤー 1 の期待利得は $\frac{[46]}{[47]}$ 1 3 である．

問 3 ゲームの開始時（両者ともポイント 0），プレイヤー 1 は A を $\frac{[48]}{[49]}$ 1 4 で選ぶ．またこのときプレイヤー 1 の期待利得は $\frac{[50]}{[51]}$ 0 1 である．

①だけ 2点
他は 3点×6 = 18点

20点

2019年ゲーム理論２試験　問題解説

2021年2月8日

誤りがあればお知らせ下さい．解答は別紙にあります，以下は解説です．

問題 1 問 1 ゲーム１を戦略形ゲームに変換したものは図 *1* の左図です．ナッシュ均衡は，(AC, X) と (BD, Y) です．完全情報ゲームなので，部分ゲーム完全均衡はバックワードインダクションの解であり (AC, X) です．

問 2 ゲーム２を戦略形ゲームに変換したものは図 *1* の右図です．ナッシュ均衡は，(AQ, RD)，(AQ, RE)，(BP, LD)，(BQ, LD) ，(CP, LE)，(CQ, LE) です．図 *2* はこの部分ゲームを求めるための図解です．部分ゲームは左図にある赤枠で囲まれた *2* つのゲームで，H_{12} 以降の部分ゲームではプレイヤーは (Q, R) を選ぶ．H_{22} ではプレイヤーは D を選ぶので，部分ゲーム完全均衡は，ナッシュ均衡の中で Q，R，D が選ばれている (AQ, RD) になります．

1 \ 2	X	Y
AC	3 , 4	1 , 3
AD	0 , 2	1 , 3
BC	2 , 1	2 , 1
BD	2 , 1	2 , 1

1 \ 2	LD	LE	RD	RE
AP	1 , 1	1 , 1	0 , 3	0 , 3
AQ	3 , 0	3 , 0	7 , 7	7 , 7
BP	6 , 4	2 , 2	6 , 4	2 , 2
BQ	6 , 4	2 , 2	6 , 4	2 , 2
CP	5 , 5	5 , 5	5 , 5	5 , 5
CQ	5 , 5	5 , 5	5 , 5	5 , 5

図 1: 問題１ゲーム１，ゲーム２の戦略形ゲーム

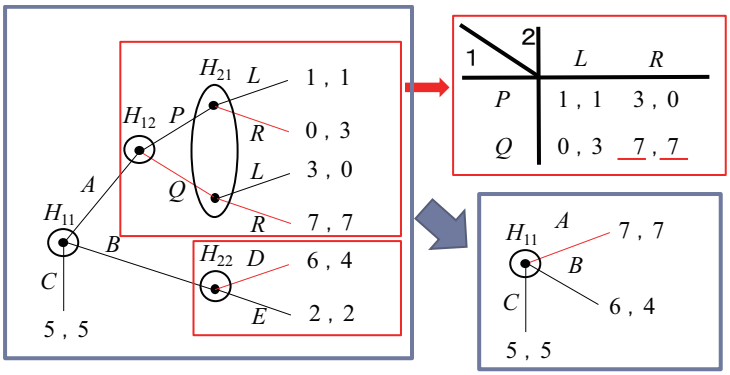


図 2: 問題１ゲーム２の部分ゲーム完全均衡

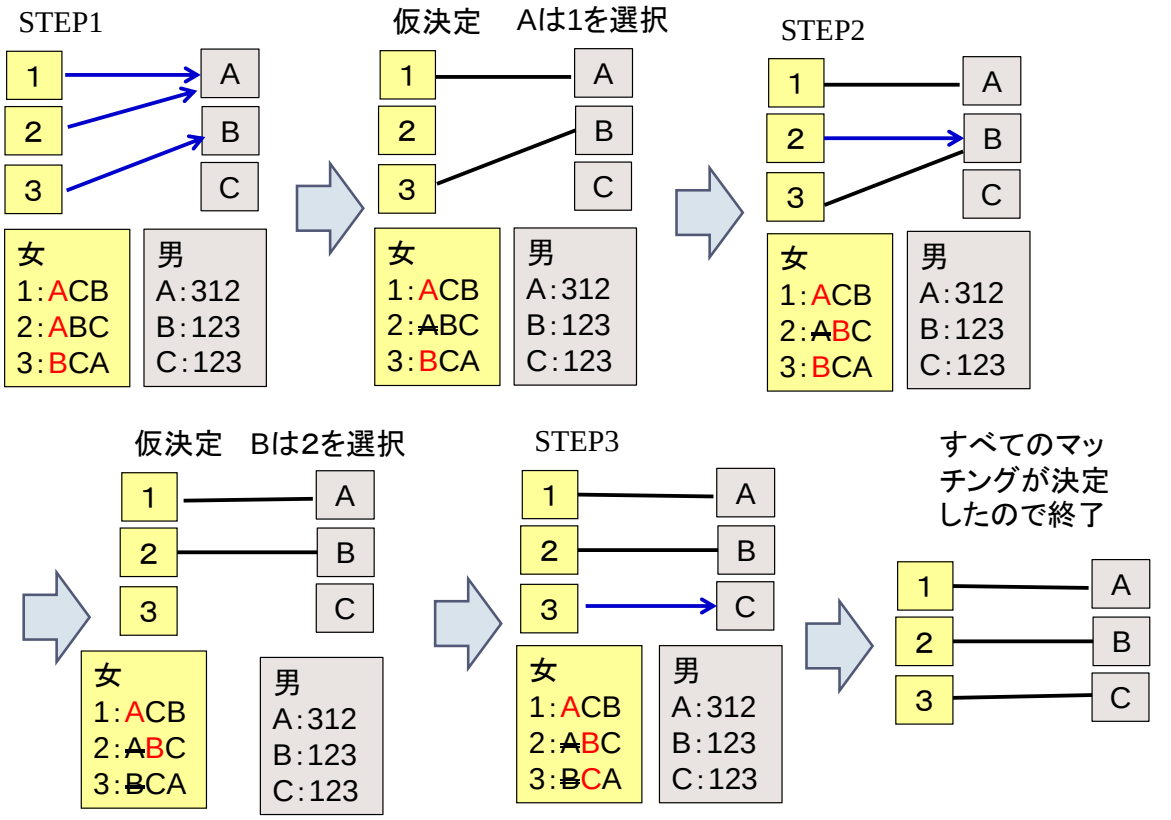
問題 2 問 1 女側パレート最適なマッチングは *1,2,5* です．*3,4,6* は，すべてマッチング *5* の方が女側の好みが同じか高くなり，マッチング *5* に対して女側パレート劣位であることが分かります.,

問 2 マッチング *1*．女側受入保留方式の決定過程は次ページにあります．

問 3 マッチング *6*．男側受入保留方式の決定過程は次ページにあります．

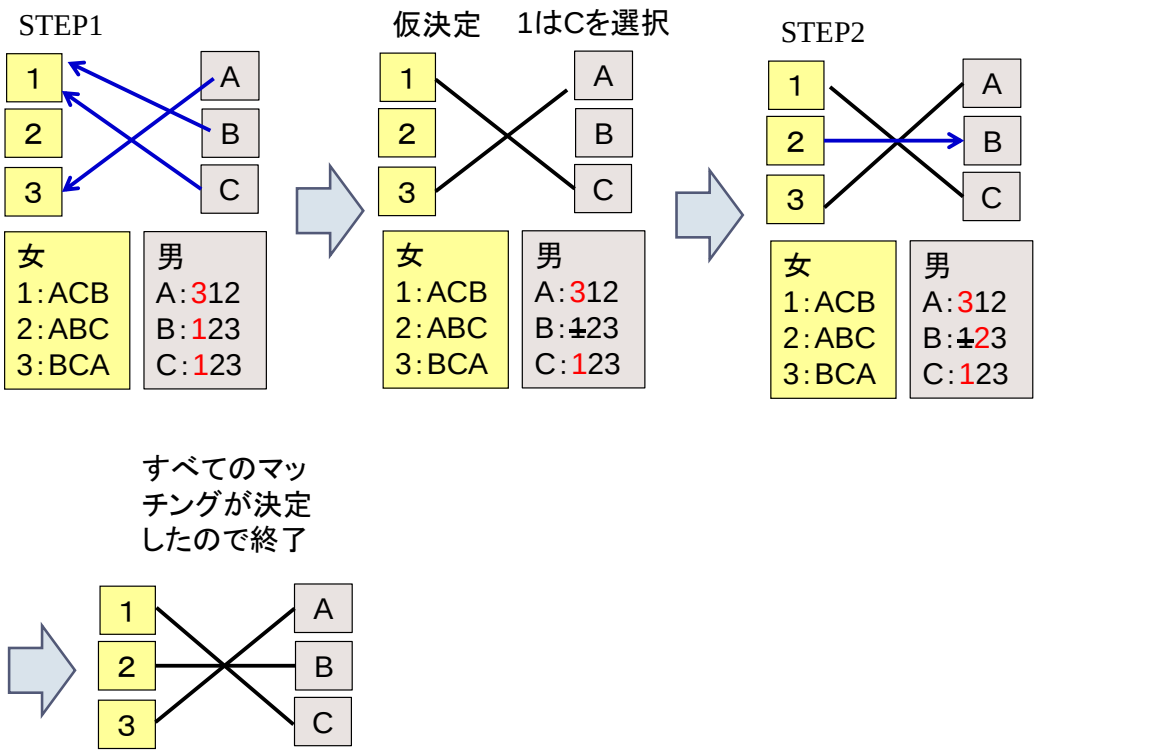
問 4 マッチング *2* では B と E が逸脱すると共に良くなるので不安定です．マッチング *3,4* では *1* と C が，マッチング *5* では *1* と A が逸脱するので共に不安定です．受け入れ保留方式で得られるマッチングは安定なので，*1* と *6* が安定マッチングです．

女性側提案の受入保留方式



NABENAVI .net

男性側提案の受入保留方式



問題 3 少し詳しく解説します.

企業 1 高費用タイプの利益を π_H とすると

$$\begin{aligned}\pi_H &= p_H(60 - p_H + p_2) - 36(60 - p_H + p_2) \\ &= -p_H^2 + (96 + p_2)p_H - 36p_2 - 36 * 60\end{aligned}$$

である．これを p_H で偏微分すると，

$$\frac{\partial \pi_H}{\partial p_H} = -2p_H + 96 + p_2$$

となる．$\frac{\partial \pi_H}{\partial p_H} = 0$ を解くことにより，企業 1 高費用タイプの最適反応関数は

$$p_H = \frac{1}{2}p_2 + 48 \tag{1}$$

である．同様に企業 1 低費用タイプのの利益を π_L とすると，

$$\begin{aligned}\pi_L &= p_L(60 - p_L + p_2) - 18(60 - p_L + p_2) \\ &= -p_L^2 + (78 + p_2)p_L - 18p_2 - 18 * 60\end{aligned}$$

である．これを p_L で偏微分すると，

$$\frac{\partial \pi_L}{\partial p_L} = -2p_L + 78 + p_2$$

となる．$\frac{\partial \pi_L}{\partial p_L} = 0$ を解くことにより，企業 1 低費用タイプの最適反応関数は

$$p_L = \frac{1}{2}p_2 + 39 \tag{2}$$

である．

企業 2 の期待利益を π_2 とすると

$$\begin{aligned}\pi_2 &= \frac{1}{3}\left\{p_2(48 - p_2 + p_H) - 36(48 - p_2 + p_H)\right\} \\ &+ \frac{2}{3}\left\{p_2(48 - p_2 + p_L) - 36(48 - p_2 + p_L)\right\}\end{aligned} \tag{3}$$

となる[1)]

式 (4) を計算すると（式 (4) を計算しても同じ），

$$\pi_2 = -p_2^2 + \left\{84 + \left(\frac{1}{3}p_H + \frac{2}{3}p_L\right)\right\}p_2 - 36\left(\frac{1}{3}p_H + \frac{2}{3}p_L\right) - 36 * 48$$

[1)] この式は変形すると

$$\pi_2 = p_2\left(48 - p_2 + \frac{1}{4}p_H + \frac{3}{4}p_L\right) - 36\left(48 - p_2 + \frac{1}{3}p_H + \frac{2}{3}p_L\right) \tag{4}$$

となる．もし不完備情報ではなく企業 1 の決定する価格が p_1 であるとすると，企業 2 の利益は

$$\pi_2 = p_2\left(48 - p_2 + p_1\right) - 36\left(48 - p_2 + p_1\right) \tag{5}$$

となる．式 (4) は，式 (5) の p_1 が価格の期待値 $\frac{1}{3}p_H + \frac{2}{3}p_L$ に置き換わったものと解釈することができる．

p_2 で偏微分すると，

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = -2p_2 + 84 + \left(\frac{1}{3}p_H + \frac{2}{3}p_L\right)$$

となる．$\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = 0$ を解くと，企業 2 の最適反応関数は

$$p_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}p_H + \frac{2}{3}p_L\right) + 42$$

であり，計算すると

$$p_2 = \frac{1}{6}p_H + \frac{1}{3}p_L + 42 \tag{6}$$

である．

ベイズナッシュ均衡は，式 (1)，式 (2) と式 (2) を同時に満たす p_H，p_L，p_2 である．式 (6) に，式 (1) と式 (2) を代入し計算すると $p_2 = 84$ を得る．これを式 (1) と式 (2) に代入して $p_H = 90$ と $p_L = 81$ を得る．ベイズナッシュ均衡における企業 1 高費用タイプの価格は 90，企業 2 の価格は 84.

企業 1 が低費用タイプであった場合，低費用タイプの価格は 81 であるから，$q_1 = 60 - p_1 + p_2$ より企業 1 の需要量は 63，企業 2 の需要量は $q_1 = 48 - p_2 + p_1$ より企業 2 の需要量は 45 である．

問題 4 この問題は第 *16* 回演習とまったく同じ問題です．演習の後半については，演習ではやらず講義でも解答しませんでした．しかし解答は「展開型ゲームの資料」の中に公開してありました．ちゃんと復習していた人，おめでとうございます．ただ後半部の混合戦略で，資料と一箇所だけ尋ねる部分を変更したところがありまして，そこを間違えた人がいたようです．資料と同じと間違えたのでしょうか，ごめんなさい．

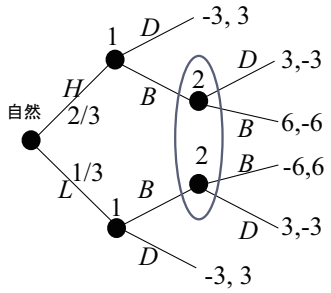
問 1 ゲームの木は図 3 の左図.

問 2 利得行列は図 3 の右図になる.

問 3 プレイヤー 1 の戦略 BB は DB と DD を支配する．支配されない戦略は BB と BD

問 4 支配された戦略 DB と DD を削除し，混合戦略のナッシュ均衡を求めると，プレイヤー 1 は BB を 2/3，BD を 1/3 で選び，プレイヤー 2 は B を 2/3，D を 1/3 で選ぶことが分かる．プレイヤー 1 が DB と DD を選ぶ確率は 0.

問 5 プレイヤー 1 は BB か BD を選ぶので，H を引いたときは必ず B を選ぶ（確率 1）．L を引いたときは，B を確率 2/3，D を確率 1/3 で選ぶ.



1 \ 2	*B*	*D*
BB	(2,-2)	(3,-3)
BD	(3,-3)	(1,-1)
DB	(-4, 4)	(-1, 1)
DD	(-3, 3)	(-3, 3)

図 3: 利得行列とゲームの木

問題 5 ゲームの全体像と解き方を示した図解が後にありますので，参考にしてください．またその次のページには，ゲームの木を描きました．ここで G_{ij} はプレイヤー 1 が i ポイント，プレイヤー 2 が j ポイント獲得したときのゲームを表します.

- 両プレイヤーともどんなときも 2 ポイントを獲得すれば勝ちなので，(A, A) が選ばれると利得は $(1, -1)$，(A, B) が選ばれると利得は $(-1, 1)$ です.
- 最初のゲーム（ゲーム G_{00}）では，(B, B) が選ばれるとゲーム G_{10} に移り，(B, A) が選ばれるとゲーム G_{01} に移ります.
- ゲーム G_{10} では，(B, B) が選ばれるとプレイヤー 1 の勝ちなので利得は $(1, -1)$，(B, A) が選ばれるとゲーム G_{11} に移ります.
- ゲーム G_{01} では，(B, A) が選ばれるとプレイヤー 2 の勝ちなので利得は $(-1, 1)$，(B, B) が選ばれるとゲーム G_{11} に移ります.
- ゲーム G_{11}（緑枠で囲まれたゲーム，両プレイヤーが 1 ポイントを獲得したとき）．このときは両プレイヤーともポイントを獲得すれば勝ちで，A,B を選ぶ確率は $1/2$，期待利得はともに 0 です（問１の答）.
- そこで G_{10} の G_{00} に利得 (0.0) を入れて（縮約して）解くと，1 は A を $1/3$，B を $2/3$ で選び，2 は A を $2/3$，B を $1/3$ で選ぶことになり，1 の期待利得は $1/3$，2 は $-1/3$ になります.（問２の答）
- 同様に G_{01} を解くと，1 の期待利得は $-1/3$，2 は $1/3$ になります.
- この期待利得をゲーム G_{00} のゲーム G_{10}，ゲーム G_{01} に相当する部分に代入（縮約）すると図 *4* のようなゲームが得られます．これを解くと，1 は A を $1/4$，B を $3/4$ で選び，2 は A を $1/2$，B を $1/2$ で選ぶことになり，1 と 2 の期待利得は 0 になります.

G_{00}

1 \ 2	A	B
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	(1/3,- 1/3)	(-1/3,1/3)

図 4: 縮約されたゲーム（ゲーム G_{00}）

このゲームはプレイヤー 1 と 2 に有利不利はないので，1 と 2 の期待利得は最初の段階で 0 になることは予想されます（最後の答，正答率 13.6%）．一方，その戦略がプレイヤー 1 と 2 でずれるところは大変興味深いですね．ゲーム開始時のプレイヤー 1 の戦略「A が $1/4$」を正しく答えた人は，*176* 人中 *4* 人，正答率は 2.3% でした.

なお，この問題は渡辺ゼミの *2019* 年夏合宿の発表をもとにしたものでした.

G_{00}

1 \ 2	A	B
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	G_{10}	G_{01}

G_{10}

1 \ 2	A	B
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	G_{11}	(1,- 1)

G_{01}

1 \ 2	A	B
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	(-1, 1)	G_{11}

G_{11}

1 \ 2	A	B
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	(-1, 1)	(1,- 1)

- プレイヤー1と2はAとBを確率1/2で選ぶ
- 期待利得はプレイヤー1も2も0

NABENAVI .net

G_{00}

1 \ 2	A	B
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	G_{01}	G_{10}

縮約したG_{00}

1 \ 2	A	B
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	(-1/3, 1/3)	(1/3,-1/3)

G_{01}

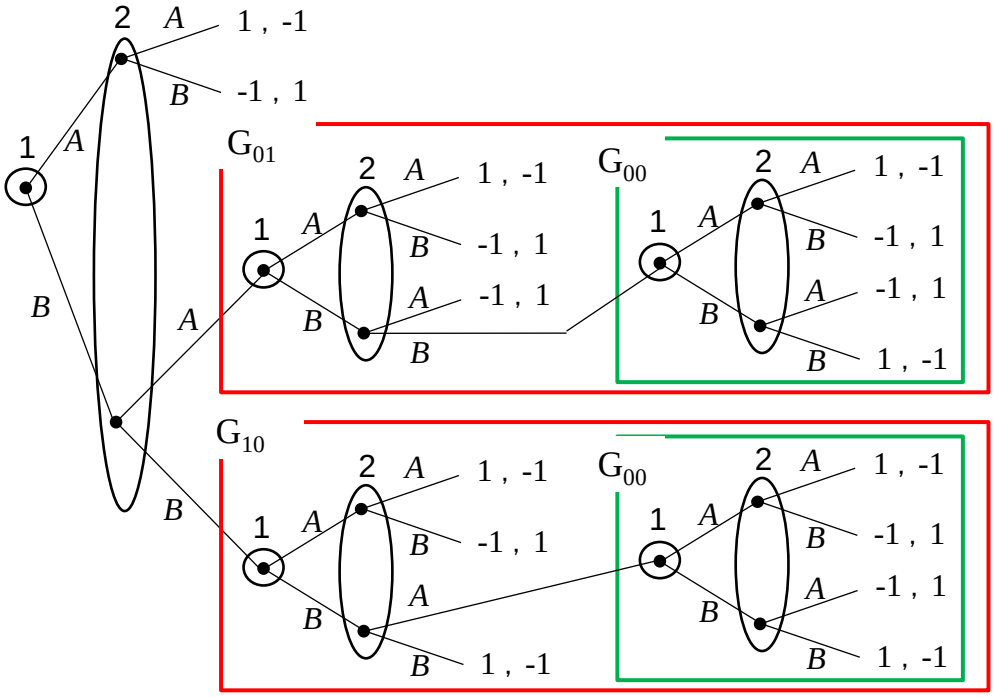
1 \ 2	A	B
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	(-1, 1)	(0 , 0)

- 1はAを1/3，Bを2/3で選ぶ
- 2はAを1/3，Bを2/3で選ぶ
- 1の期待利得は-1/3
- 2は1/3

G_{10}

1 \ 2	A	B
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	(0 , 0)	(1,- 1)

- 1はAを1/3，Bを2/3で選ぶ
- 2はAを2/3，Bを1/3で選ぶ
- 1の期待利得は1/3
- 2は-1/3


2
A
1 , -1
B
-1 , 1
1
A
B
A
B
G01
2
A
1 , -1
1
A
B
-1 , 1
A
-1 , 1
B
B
G00
2
A
1 , -1
1
A
B
-1 , 1
A
-1 , 1
B
B
1 , -1
G10
2
A
1 , -1
1
A
B
-1 , 1
A
B
B
1 , -1
G00
2
A
1 , -1
1
A
B
-1 , 1
A
-1 , 1
B
B
1 , -1