ゲーム理論 1 期末試験

解答と解説

解答の後に解説があります

Jul 23, 2019

注意事項

- 解答用紙の学修番号を正確にマークせよ．ここを誤ると 0 点となる可能性がある（毎年 2 人くらいいる）．
- 解答は [　　] 内の番号に対応するマークシートの番号のマーク欄に該当する数字・記号をマークせよ．
- 解答が数値の場合は，マーク欄は数値（0 から 9 まで）か，マイナス − の符号のどれかをマークせよ．数値が負の場合のみ，符号のマイナスをつけよ．数値が正か 0 の場合は，符号はつけない．マークシートの + は，指示がない限りは使わない．
- 分数の問題は，必ず約分せよ．また 1 は $\frac{1}{1}$，0 は $\frac{0}{1}$ と答えよ．負の分数のときは，マイナスの符号は分子につけよ．
- 解答欄に 2 つ以上の番号が並ぶ時は，基本的には 2 桁以上の答を意味する．[1][2][3] の答が 532 のときは [1] に 5，[2] に 3，[3] に 2 をマークせよ．ただし解答欄の桁数が余るときは前の桁に 0 をマークせよ．例えば [4][5][6] の答が 7 のときは，007 とし，[4] と [5] に 0，[6] に 7 をマークせよ．

問題 1 ゲーム理論は数学者 [1] (5) とモルゲンシュテルンが著した *Theory of Games and Economic Behavior* という本がその始まりと言われる．また，すべての n 人非協力ゲームにナッシュ均衡が存在することを示した人物は [2] (2) である．

(1) 5点 (2) 4点

選択肢

①ボレル　②ナッシュ　③ガンマン　④ヴィカリー　⑤フォン・ノイマン　⑥ジョイマン

問題 2 図 *1* の戦略形ゲームについて，当てはまるものをマークせよ．

5点×4

問 1 プレイヤー 1 の支配された戦略は [3] (2) であり，プレイヤー 2 の弱支配戦略は [4] (4) である．以下の選択肢から当てはまるものをすべて選び，なければ「なし」を選んでマークせよ（支配戦略は弱支配戦略であるとする）．

選択肢

①*U*　②*M*　③*D*　④*A*　⑤*B*　⑥*C*　⑦なし

問 2 以下の選択肢から，純粋戦略のナッシュ均衡をすべて選んで [5] (2,4,6,7,9) にマークし，純粋戦略の「支配されないナッシュ均衡」すべてを選んで [6] (7) にマークせよ．(複数ある時は複数マークし，ない場合は「なし」のみを選んでマークせよ．混合戦略は考えない)．

選択肢

①(U,A)　②(U,B)　③(U,C)
④(M,A)　⑤(M,B)　⑥(M,C)
⑦(D,A)　⑧(D,B)　⑨(D,C)
⓪ なし

1 \ 2	A	B	C
U	(1, 5)	(6, 5)	(0, 4)
M	(2, 2)	(0, 0)	(2, 2)
D	(2, 1)	(1, 0)	(2, 1)

図 1: ゲームの解を求める

問題 3 図 2はプレイヤー A, B, C によるゲームをゲームの木で表したものである．点の上のアルファベットはその意思決定点でプレイするプレイヤーを表し，点 v_{ij} はプレイヤー $i(i = A, B, C)$ の j 番目の意思決定点を表し，プレイヤーは番号のついた枝を選ぶ．終点の利得は左から順にプレイヤー A,B,C を表す．バックワードインダクションを用いてゲームの解を求めて，次の問いに答え [7] - [12] に当てはまる数字を答えなさい．(プレイヤーがアルファベット，選択する枝（行動）が番号で与えられていることに注意せよ．プレイヤーはアルファベット順にプレイするわけではないので，誰がどこでプレイするかも十分注意せよ．)

3点×6

問 1 ゲーム 1 において，プレイヤー A は v_A で [7] (1) を選び，プレイヤー B は v_{B2} で [8] (5) を選ぶ．ゲームの結果，プレイヤー B が獲得する利得は [9] である．

問 2 ゲーム 2 において，プレイヤー A は v_{A2} で [10] (7) を選び，プレイヤー C は v_{C1} で [11] (5) を選ぶ．ゲームの結果，プレイヤー A が獲得する利得は [12] (2) である．

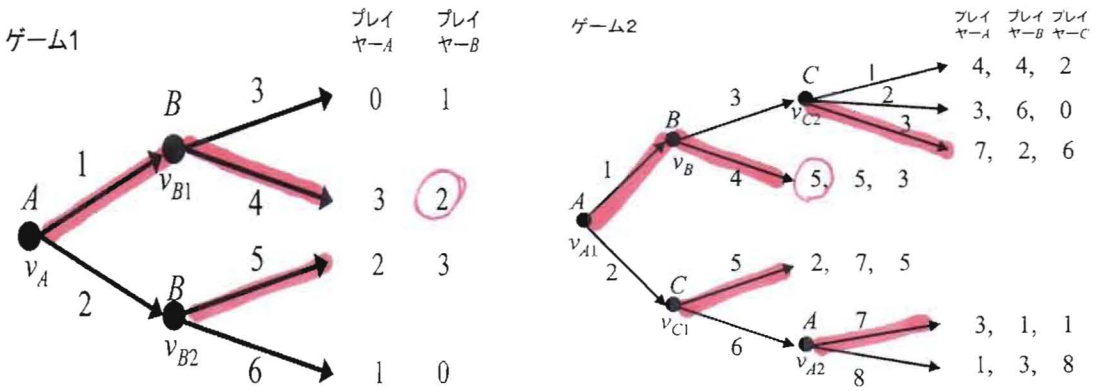

図 2: ゲームの解を求める

5点×4

問題 4 プレイヤー 1 とプレイヤー 2 がグーかパーを出す．2 人ともにグーを出すと共に利得は 2，2 人ともにパーを出すと，共に利得は x，2 人が異なるものを選ぶと利得は共に 0 である．

問 1 $x = 3$ のとき，このゲームのナッシュ均衡は，混合戦略まで含めると [13] (3) 個ある．このとき（グーとパーが共に正の確率で選ばれる）混合戦略のナッシュ均衡で，プレイヤー 1 がグーを選ぶ確率は $\frac{[14]}{[15]}$ ($\frac{3}{5}$) である．また，プレイヤー 1 の期待利得は $\frac{[16]}{[17]}$ ($\frac{6}{5}$) である．

問 2 x が限りなく大きいとき（$x \to \infty$），このゲームの（グーとパーが共に正の確率で選ばれる）混合戦略のナッシュ均衡でプレイヤー 1 がグーを選ぶ確率は [18] (1) に近づく

問題 5 メーカー（*Maker*：プレイヤー M）が製品を独占的に製造して販売している．メーカーの限界費用は 4 で一定とし，固定費は考えない．ここでメーカーが，直接，消費者に市場で販売するとき（ケース１）と，独占的な小売店（*Retailer*：プレイヤー R）を使って販売するとき（ケース２）を比較したい．

この製品が 1 単位あたり価格 p で消費者に販売されるとき，消費者の需要 x は $x = 36 - p$ であるとする．言い換えると製品を x 単位販売するとき，その製品 1 単位あたりの価格は $p = 36 - x$ になるとする．次の問いに答えなさい．

35×7

（ケース１） メーカーが直接，消費者に販売するときを考える．このときはメーカーの利益 π_M は $\pi_M = px - 4x$ で表され，通常の独占市場の問題となる．

16

問 1 このときメーカーが利益を最大にする生産量は $\boxed{[19][20]}$ であり，

消費者余剰は $\boxed{[21][22][23]}$ となる．

128

（ケース２） 次に，メーカーが製品 1 単位あたりの価格 d を決めて小売店に売り，その後で，小売店が販売量 x を決めて消費者に製品を売る問題を考える．小売店が販売量を x と決めると，その製品 1 単位あたりの価格は $p = 36 - x$ になる．またメーカーが小売店に売れる製品は，小売店が消費差に売ると決めた x 単位であるとする（小売店は消費者に売れる分だけ仕入れる）．

小売店は製品を 1 単位あたり価格 d で仕入れるため，小売店の利益 π_R は

$$\pi_R = px - dx$$

で表される．メーカーは，小売店に d で x 単位売り，製品 1 単位を限界費用 4 で作るので，その利益 π_M は

$$\pi_M = dx - 4x$$

となる．

問 1 小売店が利益を最大にする販売量 x を d で表わすと，

18

$$x = -\frac{1}{2}d + \boxed{[24][25]}$$

となる．

問 2 先手がメーカー，後手が小売店であることに注意し，このゲームを解いてメーカーが利益を最大にする価格 d を求めると $d = \boxed{[26][27]}$ となる．またこのときの小売店の利益は $\pi_R = \boxed{[28][29]}$ であり，消費者への販売価格 p はケース 1 に比べて $\boxed{[30]}$ 高くなる．社会的総余剰（メーカーの利益，小売店の利益，消費者余剰の合計．ケース 1 では小売店の利益は 0 と考える）は，ケース 1 に比べて $\boxed{[31][32][33]}$ 減少する．

20 64 8 160

問題 6 ある街にエルファルロというバーがあり，A,B,C,D,E,F の 6 人が通っている（その 6 人以外は，バーにはいない）．彼らは「バーに行く」か「家にいる」か，どちらかを選ぶ．彼らは，バーが混んでいなければ，家にいるよりもバーに行きたい．一方，バーが混んでいれば，バーに行かず家にいる方を好む．(ただし F は，基本的にはバーに行きたいようだ)．6 人の好みは，以下の通り．

- A は自分を含めてバーにいるのが 3 人以下なら家よりバーを好み，自分を含めてバーにいるのが 4 人以上なら，バーより家にいる方を好む．
- B,C,D は自分を含めてバーにいるのが 4 人以下なら家よりバーを好み，自分を含めてバーにいるのが 5 人以上なら，バーより家にいる方を好む．
- E は自分を含めてバーにいるのが 5 人以下なら家よりバーを好み，自分を含めてバーにいるのが 6 人以上なら，バーより家にいる方を好む．
- F は自分を含めてバーにいるのが 4 人以下なら家よりバーを好み，自分を含めてバーにいるのが 5 人以上なら，バーと家は無差別（同じ利得）である．

A, D の誤り

バーに行くことを選択した人を中かっこ { } で表すとき，どの組み合わせが解になりうるだろうか．例えば $\{B,C,E,F\}$ は，B,C,E,F はバーに行き，A,D,E は家にいることを示す．このとき B は，バーにいるのが 4 人以下なので，家よりバーを好む．また D は，自分がバーに行くとバーが 5 人になるので，バーに行くより家にいた方が良い．

4, 6, 7

以下の選択肢から，ナッシュ均衡をすべて選んで [34] にマークし，純粋戦略の「支配されないナッシュ均衡」をすべて選んで [35] にマークせよ．(複数ある時は複数マークし，1 つもない場合は「なし」のみを選んでマークせよ，混合戦略は考えない)．

6, 7

選択肢

①{A,B}	②{A,B,F}	③{A,B,E,F}
④{B,C,D,E}	⑤{B,C,D,F}	⑥{B,C,E,F}
⑦{C,D,E,F}	⑧{B,C,D,E,F}	⑨{A,B,C,D,E,F}
⑩なし		

6点 x 2

ゲーム理論１ 期末試験解説

Jul 23, 2019

問題３ 両方がパーを選んだときの利得を x のままで考えよう．プレイヤー２がグーを選ぶ確率を q，パーを選ぶ確率を $1-q$ とする．

このときプレイヤー１がグーを選んだ時の期待利得は，

$$2q + 0(1-q) = 2q \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

プレイヤー１がパーを選んだ時の期待利得は，

$$0q + x(1-q) = x - qx \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である．混合戦略のナッシュ均衡では，この２つの期待利得は等しくなければならないため，

$$2q = x - qx$$

である．したがって $(2+x)q = x$ より，$q = \frac{x}{2+x}$ であり，プレイヤー２がグーを選ぶ確率は $q = \frac{x}{2+x}$，パーを選ぶ確率は $1-q = \frac{2}{2+x}$ となる．このゲームはプレイヤー１と２は対称的なので，プレイヤー１も同じである．

したがって $x = 3$ のときプレイヤー１がグーを選ぶ確率は $3/5$，パーを選ぶ確率は $2/5$ である．

プレイヤー１の期待利得は $6/5$.

$x \to \infty$ のときどうなるか考える．プレイヤー１がグーを選ぶ確率は $q = \frac{x}{2+x}$ は分母と分子を x で割ることより

$$\frac{x}{2+x} = \frac{1}{\frac{2}{x}+1}$$

であり，$x \to \infty$ のとき $\frac{2}{x} \to 0$ なので，この値は１に近づく．

この解答は０か１か，ほぼ半々に割れていました．

問題４

$p = 36 - x$

（ケース１）

$$\pi_M = px - 4x = (36-x)x - 4x = -x^2 + 32x$$

であり，これを最大にする生産量 x は $x = 16$ である．このとき価格は $p = 36 - 16 = 20$，メーカーの利益は

$$\pi_M = (p-4)x = (20-4) \times 16 == 256$$

である．消費者余剰は図１の三角形 ABC の部分であり，

$$CS = \frac{1}{2} \times 16 \times 16 = 128$$

である．なお π_M は図の四角形 BCDE になっている．

社会的総余剰を計算しておくと

$$CS + \pi_M = 128 + 256 = 384$$

である．

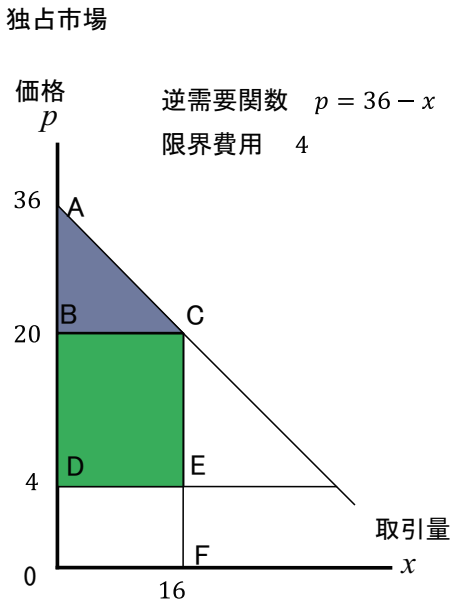

図 1: 独占市場の消費者余剰と社会的総余剰

（ケース２）　小売店の利益 π_R は

$$\pi_R = px - dx = (36 - x)x - dx = -x^2 + (36 - d)x$$

である．π_R を x で偏微分して 0 とおくと，$-2x + (36 - d) = 0$ であるから，これから x を求めると，

$$x = -\frac{1}{2}d + 18$$

となる．これが小売店が利益を最大にする販売量 x となる．

先手であるメーカーは，これを先読みすると，自分が小売店に d で x 単位売った時の利益 π_M は

$$\pi_M = dx - 4x = d(-\frac{1}{2}d + 18) - 4(-\frac{1}{2}d + 18) = -\frac{1}{2}d^2 + 20d - 72$$

となる．π_M を最大にする d を求めるために，d で偏微分すると $-d + 20$ であるから，これを 0 として d を求めると $d = 20$ となる．またこのとき $x = 8$，$p = 36 - 8 = 28$ である．

$$\pi_R = px - dx = (p - d)x = (28 - 20) \times 8 = 64$$

であり，消費者への販売価格 p はケース 1 に比べて 8 高くなる．このとき π_M を計算すると，

$$\pi_M = (d - 4)x = (20 - 4) \times 8 = 16 \times 8 = 128$$

である．また消費者余剰は消費者余剰は図 2 の三角形 ABC の部分であり，

$$CS = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$$

である（1/4 に減少している！）．なお π_M は図の四角形 DEGH に，π_R は図の四角形 BCGH になっている．

社会的総余剰（メーカーの利益，小売店の利益，消費者余剰の合計．ケース 1 では小売店の利益は 0 と考える）は，

$$\pi_M + \pi_R + CS = 128 + 64 + 32 = 224$$

である．ケース 1 に比べて $384 - 224 = 160$ 減少する．

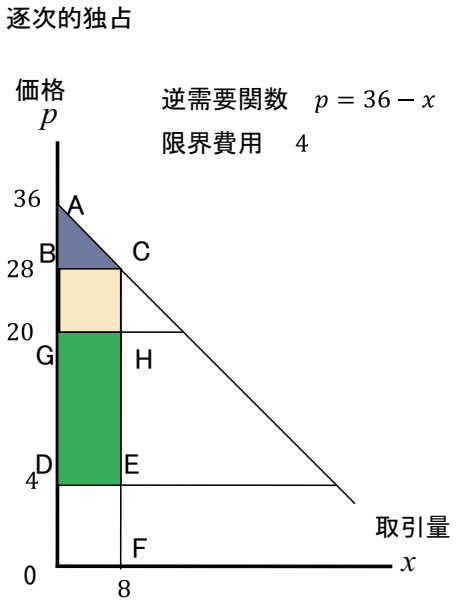

図 2: 逐次的独占市場の消費者余剰と社会的総余剰

問題 5

- 「ナッシュ均衡であること」を示すには,（他のプレイヤーの戦略はそのままで）すべてのプレイヤーが戦略を変えても，そのプレイヤーの利得が高くならない（同じか低くなる）ことを示せば良い.
- 「ナッシュ均衡でないこと」を示すには（他のプレイヤーの戦略はそのままで）あるプレイヤーが戦略を変えると，そのプレイヤーの利得が高くなることを示せば良い．全員を考えなくても，1 人だけでもそういうプレイヤーがいれば，ナッシュ均衡ではない.

このことからナッシュ均衡でないことを示すのは，ナッシュ均衡であることを示すよりも簡単である．そこでその観点からナッシュ均衡でないものを先に列挙してみよう.

ここで注意すべきことは，家にいるプレイヤーは，自分がバーに行くことで人数が 1 人増えることである．例えば $\{B, C, E, F\}$ で D は家にいる．D は「バーにいるのが自分を含めて 4 人以下なら家よりバーを好み，自分を含めて 5 人以上なら，バーより家にいることを好む」とある．現状の人数は 4 人であるが，D は家にいるという戦略を，バーに変更すると，バーの人数は 5 人になる．したがって家にいる方が利得が高いことになる.

ナッシュ均衡ではないもの：

- $\{A, B\} \Rightarrow$ E は家にいるが，バーに行ったほうが利得が高い.
- $\{A, B, F\} \Rightarrow$ E は家にいるが，バーに行ったほうが利得が高い.
- $\{A, B, E, F\} \Rightarrow$ A はバーにいるが，家にいるほうが利得が高い.
- $\{B, C, D, F\} \Rightarrow$ E は家にいるが，バーに行ったほうが利得が高い.
- $\{B, C, D, E, F\} \Rightarrow$ B はバーにいるが，家にいるほうが利得が高い.
- $\{A, B, C, D, E, F\} \Rightarrow$ A はバーにいるが，家にいるほうが利得が高い.

基本的には E は，バーがかなり混んでいてもバーを好むので，E が入ってないとナッシュ均衡でないことが多いと推測され，A は空いていないと家のほうがいいので，人数が多い時にバーにいるとナッシュ均衡ではないことが多いと推測できる.

次に，上記以外がナッシュ均衡であることを確かめてみよう.

ナッシュ均衡となるもの：

- $\{B, C, D, E\} \Rightarrow$ B, C, D, E は 4 人以下であるから，家よりバーを好む．A はバーに来ると 5 人になるので家にいた方が良い．F はバーに来ると 5 人になるので，家とバーが無差別（利得が同じ）．よって，すべてのプレイヤーは自分だけが戦略を変えても利得が高くならないのでナッシュ均衡.
- $\{B, C, E, F\} \Rightarrow$ B, C, E, F は 4 人以下であるから，家よりバーを好む．A も D も，自分がバーに来ると 5 人になるので家にいた方が良い．よって，すべてのプレイヤーは自分だけが戦略を変えても利得が高くならないのでナッシュ均衡.
- $\{C, D, E, F\} \Rightarrow$ C, D, E, F は 4 人以下であるから，家よりバーを好む．A も B も，自分がバーに来ると 5 人になるので家にいた方が良い．よって，すべてのプレイヤーは自分だけが戦略を変えても利得が高くならないのでナッシュ均衡.

次に「支配されないナッシュ均衡」を考えよう．F にとっては，人数に関わらず，バーにいることの方が，家にいるよりも良いか同じである．つまり「家」は「バー」に弱支配されている.（F にとってバーにいくことは弱支配戦略である）.

なお A, B, C, D, E, F は家にいた方が良いときと，バーにいた方が良いときがあるので，家とバーに支配関係はない

このことから F だけはバーに行くと予想でき，F が家にいるようなナッシュ均衡は予測としてふさわしくない.

したがって F がバーにいるナッシュ均衡が支配されないナッシュ均衡となる．支配されないナッシュ均衡は $\{B, C, E, F\}$ と $\{C, D, E, F\}$.