ゲーム理論1　期末試験

July 24, 2018

- 以下の問題に答え，指示に従ってマークを塗りつぶしなさい．
- 解答欄が分数の問題は，必ず約分をして答えよ．また 1 は $\frac{1}{1}$，0 は $\frac{0}{1}$ と答えよ．
- 解答欄の桁数が余るときは前の桁に 0 をマークせよ．例えば $\boxed{\text{アイ}}$ の答えが 7 のときは，07 とし，アに 0，イに 7 をマークせよ．

問題 1 ゲーム理論は数学者 $\boxed{\text{ア}}$ とモルゲンシュテルンが著した *Theory of Games and Economic Behavior* という本がその始まりと言われる．また，すべての n 人非協力ゲームにナッシュ均衡が存在することを示した人物は $\boxed{\text{イ}}$ である．

$\boxed{\text{ア}}$–$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまる選択肢を以下から選びなさい．

⓪ ボレル	① ナッシュ	② ミリグロム
③ ヴィカリー	④ フォン・ノイマン	⑤ ジョイマン

問題 2 図 *1* の戦略形ゲームについて，$\boxed{\text{ア}}$–$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものをマークせよ．

問 1 プレイヤー 2 に弱支配戦略はあるか．あればその戦略を選び，なければ「なし」を選んで $\boxed{\text{ア}}$ にマークせよ（支配戦略は弱支配戦略であるとする）．

① U　② D　③ L　④ M　⑤ R　⑥ なし

問 2 以下の選択肢から，純粋戦略のナッシュ均衡を選んですべて $\boxed{\text{イ}}$ にマークし，純粋戦略の「支配されないナッシュ均衡」を選んですべて $\boxed{\text{ウ}}$ にマークせよ．(複数ある時は複数マークし，ない場合は「なし」のみを選んでマークせよ．混合戦略は考えない)．

① *(U,L)*　② *(U,M)*　③ *(U,R)*
④ *(D,L)*　⑤ *(D,M)*　⑥ *(D,R)*　⑦ なし

1 \ 2	L	M	R
U	(1 , 3)	(5 , 3)	(0 , 1)
D	(2 , 2)	(1 , 1)	(1 , 5)

図 1: ゲームの解を求める

問題 3 図 2 において，点の上の番号はその意思決定点でプレイするプレイヤーを表し，点 v_{ij} はプレイヤー i の j 番目の意思決定点を表す．終点の利得は左から順にプレイヤー 1,2,3 を表す．バックワードインダクションを用いてゲームの解を求め次の問いに答え，$\boxed{\text{ア}}$–$\boxed{\text{エ}}$ に A から F までの当てはまる選択肢を答えなさい．*(プレイヤーは，プレイヤーの番号順にプレイするわけではないので，誰がどこでプレイするか十分注意せよ．)*

問 1 ゲーム 1 において，プレイヤー 1 は v_1 で $\boxed{\text{ア}}$ を選び，プレイヤー 2 は v_{22} で $\boxed{\text{イ}}$ を選ぶ．

問 2 ゲーム 2 において，プレイヤー 1 は v_1 で $\boxed{\text{ウ}}$ を選び，プレイヤー 2 は v_{21} で $\boxed{\text{エ}}$ を選ぶ．

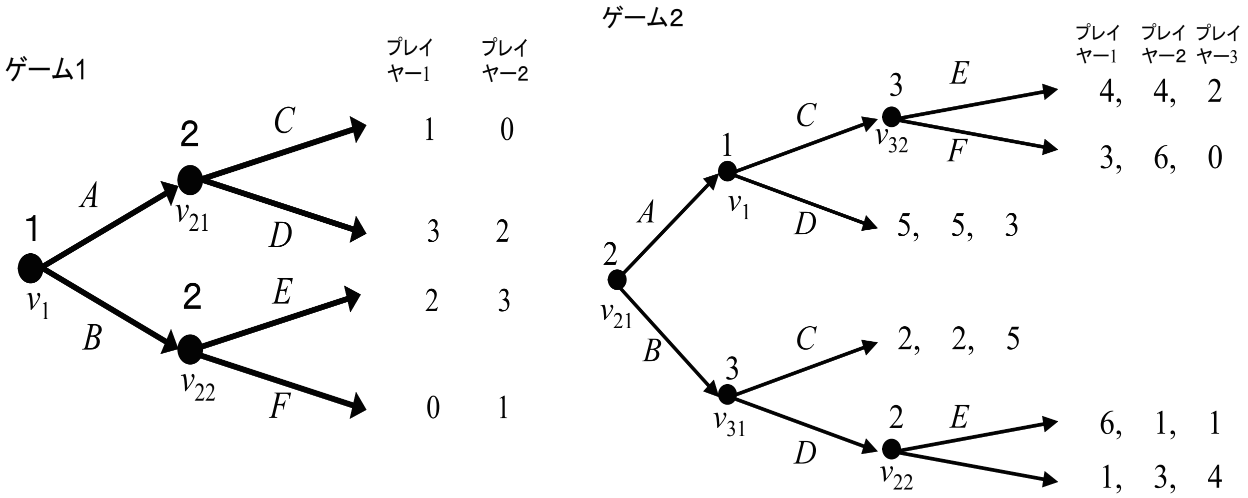

図 2: ゲームの解を求める

問題 4 カニとネコがじゃんけんをする．カニはチョキとグーのどちらかを出し，ネコはパーとグーのどちらかを出す．互いにグーを出すとあいこで利得が 0．チョキとグーだとグーの勝ち，パーとグーだとパーの勝ち，チョキとパーだとチョキの勝ち（普通のじゃんけんと同じ）．勝ったほうの利得が 1，負けたほうの利得が -1 である．

このゲームのナッシュ均衡では，カニがグーを $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ で選択し，ネコがパーを $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ で選択する．また，カニの勝つ確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

(次に続く)

問題 5 2 つの企業 (企業 1 と企業 2) が差別化された製品を供給している．企業 $i(i = 1, 2)$ の価格を p_i, 需要量を q_i とすると財の需要関数は

$q_1 = 8 - p_1 + p_2$

$q_2 = 8 - p_2 + p_1$

で与えられるものとする．企業が財を生産する限界費用は，両企業とも 2 である．

ここでまず企業 1 が先手で価格 p_1 を決定し，それを知って企業 2 が後手で価格 p_2 を決定する．以下の問いの $\boxed{\text{ア}}$–$\boxed{\text{コサ}}$ に当てはまる数値をマークせよ．

問 1 企業 1 の価格 p_1 に対する企業 2 の最適反応関数は，

$$p_2 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} p_1 + \boxed{\text{ウ}}$$

と表せる．

問 2 企業 1 が価格 p_1 を選んだとき，企業 2 が最適反応関数の価格 p_2 を選ぶとして企業 1 の利益を p_1 で表すと

$$-\frac{1}{2}p_1^2 + \boxed{\text{エオ}} p_1 - 26$$

となる．

問 3 均衡における企業 1 の価格は $\boxed{\text{カキ}}$ で，企業 2 の需要量は $\boxed{\text{クケ}}$ である．企業 1 の利潤は $\boxed{\text{コサ}}$ である．

問題 6 プレイヤー 1 とプレイヤー 2 が 5 万円を手に入れるための，m 段階ゲームを考える．プレイヤーが手に入れたお金を利得と考える．利得の単位は万円とする．

このゲームでは，各段階ごとにプレイヤーが交互に Y か N を選ぶ．第 1 段階ではプレイヤー 1 が Y か N を選ぶ．したがって第 k 段階（$k \leq m$）では，k が奇数ならプレイヤー 1 が，偶数ならプレイヤー 2 が Y か N を選ぶ．

最終段階を除く第 k 段階（$k \leq m - 1$）までは，Y を選ぶとゲームは次の段階に進み，N を選ぶとゲームはそこで終わる．N を選んでゲームが終わると，その段階で N を選んだプレイヤーは何ももらえずに k 万円払う（利得は $-k$），もう一方のプレイヤーは k 万円払い，5 万円を手に入れる（利得は $5 - k$）．

最終段階である第 m 段階では，N を選んだときは，そこまでと同様に，N を選んだプレイヤーは何ももらえずに m 万円払い（利得は $-m$），他方のプレイヤーは m 万円払って 5 万円を手に入れる（利得は $5 - m$）．第 m 段階で Y を選ぶと，両プレイヤーは何ももらえず何も払わないで（利得は双方とも 0）ゲームは終わる．

次の問いに答え，$\boxed{\text{ア}}$–$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまる数値を答えなさい．

問 1 $m = 3$ のゲームを以下に考える．当てはまる数値を答えなさい．

第 1 段階 プレイヤー 1 が Y か N を選ぶ，Y を選ぶとゲームは続き第 2 段階へ進む．N を選ぶとゲームは終わり，プレイヤー 1 は 1 万円を支払って何もらえないので，利得は -1，プレイヤー 2 は 1 万円を支払い 5 万円を手に入れるので利得は 4．

第 2 段階 プレイヤー 2 が Y か N を選ぶ，Y を選ぶとゲームは続き第 3 段階へ進む．N を選ぶとゲームは終わり，プレイヤー 2 は何ももらえずに 2 万円を支払い利得は -2．プレイヤー 1 は 2 万円を支払い 5 万円を手に入れるので，利得は $\boxed{\text{ア}}$.

第 3 段階 プレイヤー 1 が Y か N を選ぶ，Y を選ぶと，プレイヤー 1 と 2 は何ももらえないので，双方の利得は 0．N を選ぶとプレイヤー 1 は何ももらえずに 3 万円を支払い，利得は -3，プレイヤー 2 は 3 万円で 5 万円を手に入れるので，利得は 2.

問 2 $m = 3$ のゲームの解を求めると，ゲームは第 $\boxed{\text{イ}}$ 段階で終了し，プレイヤー 1 の利得は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

問 3 $m = 30$ のゲームの解を求めると，ゲームは第 $\boxed{\text{エオ}}$ 段階で終了し，プレイヤー 2 の利得は $\boxed{\text{カ}}$ である．

問題 7 プレイヤー 1 とプレイヤー 2 が 0 から 1 の間の数を選ぶゲームを考える．プレイヤー 1 が選ぶ数を x，プレイヤー 2 が選ぶ数を y とする．$0 \leq x \leq 1$，$0 \leq y \leq 1$ である．プレイヤー 1 の利得は $-|x+y-1|$ である ($x+y-1$ の絶対値に -1 を掛けたもの)．プレイヤー 2 の利得は $-3y^2 + 4xy - x^2$ で表されるものとする．

問 1 プレイヤー 2 の最適反応関数，すなわちプレイヤー 1 が x を選んだ時にプレイヤー 2 の利得を最大にする y は

$$y = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x$$

である．プレイヤー 1 が $x = \frac{1}{2}$ を選んだとき，プレイヤー 2 の利得を最大にする y は $y = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である．

問 2 プレイヤー 2 が $y = \frac{4}{7}$ を選んだとき，プレイヤー 1 の利得を最大にする x は $x = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である．

問 3 このゲームのナッシュ均衡は $x = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$，$y = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である．