「一歩ずつ学ぶゲーム理論」 演習問題の解説
（インターネット公開用）

ver.2 2022/02/15

演習問題の中で難しいと思われる問題や，詳しい説明が必要と考えられる問題について解説しています．

更新履歴

ver.2　　2022/02/15（演習問題 4.4 を修正）

ver.1　　2021/09/23

第 1 章

演習 1.1 解説： 弱支配された戦略とは,「ある戦略に弱支配された戦略」である．強支配された戦略は，弱支配された戦略でもある．ゲーム 1 でプレイヤー 2 の L は R に弱支配されている．ゲーム 2 でプレイヤー 1 の A と B は，共に C に弱支配されており，プレイヤー 2 の R は L に強支配されている．ゲーム 3 でプレイヤー 1 の B は C に強支配されており，プレイヤー 2 の M と R は共に L に弱支配されている.

演習 1.4 解説： 支配戦略は戦略に対する定義で，ナッシュ均衡とゲームの解は戦略の組に対する定義です.「支配戦略は (D, R)」という答は誤りで,「プレイヤー 1 の支配戦略は D」のような言い方をしなければならない．同様にナッシュ均衡は戦略の組に関する定義であり、「プレイヤー 1 のナッシュ均衡は D」という言い方は誤りで「ナッシュ均衡は (D, R)」のような言い方が必要.

演習 1.8 解説： 分からない場合は，プレイヤーが好む順に利得を 4,3,2,1 のように定めて利得行列を作成してみると良い.

演習 1.9 解説： ゲーム 1 では，戦略 L は弱支配されている．ゲーム 2 では，戦略 B, C は弱支配されている．ゲーム 3 では，戦略 M は弱支配されている．ナッシュ均衡の中で，上記の戦略を使わないものが支配されないナッシュ均衡となる.

第 2 章

演習 2.1 解説：

(1) ゲーム 1 では，すべての戦略に対して (U, L) がパレート優位であるためパレート最適な戦略の組は (U, L) しかない．(U, L) を「パレート最適なナッシュ均衡」と呼ぶことがある.

(2) ゲーム 2：ナッシュ均衡は 2 つあるが，パレート最適なナッシュ均衡は (C, L) のみである.

(3) ゲーム 3：ナッシュ均衡は 3 つあるが, パレート最適なナッシュ均衡は (A, M) と (C, L) である.

演習 2.2 解説： 企業 1 の利益を $u_1(p_1, p_2)$ とすると u_1 は

$$
\begin{aligned}
u_1(p_1, p_2) &= p_1 q_1 - c q_1 \\
&= p_1(a - p_1 + p_2) - c(a - p_1 + p_2) \\
&= -p_1^2 + (p_2 + a + c)p_1 - c p_2 - ac
\end{aligned}
$$

となる．企業 1 が利益を最大化する必要条件は

$$\frac{\partial u_1}{\partial p_1} = -2p_1 + p_2 + c = 0$$

であり，$\frac{\partial^2 u_1}{\partial p_1^2} = -2$ よりこれは利益を最大化する十分条件であることも確認できる．これを解

くと

$$p_1 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{a+c}{2} \tag{2.1}$$

となり，これが企業 1 の最適反応関数である．同様に企業 2 の最適反応関数は

$$p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{a+c}{2} \tag{2.2}$$

である．(2.1) と (2.2)

$$p_1 = p_2 = a + c$$

である．各企業の製品の需要量は,

$$q_1 = a - p_1 + p_2 = a$$

である．企業 1 の利益は

$$u_1(p_1, p_2) = (p_1 - c)q_1 = a^2$$

となる．企業 2 も同じ.

演習 2.3 解説： 企業の利益 u_1，u_2 はそれぞれ

$$u_1(q_1, q_2) = \{a - (q_1 + q_2)\}q_1 - c_1q_1 = -q_1^2 - q_1q_2 + (a - c_1)q_1$$
$$u_2(q_1, q_2) = \{a - (q_1 + q_2)\}q_2 - c_2q_2 = -q_2^2 - q_1q_2 + (a - c_2)q_1$$

である．企業 1 の最適反応戦略を求めてみると

$$\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = -2q_1 - q_2 + (a - c_1) = 0$$

より

$$q_1 = -\frac{1}{2}q_2 + \frac{a - c_1}{2}$$

であり，企業 2 の最適反応戦略は

$$q_2 = -\frac{1}{2}q_1 + \frac{a - c_2}{2}$$

となる．この 2 つの式を連立方程式で解いてクールノー均衡における生産量 $q_1 = \frac{a-2c_1+c_2}{3}$，$q_2 = \frac{a-2c_2+c_1}{3}$，が得られる．均衡における価格は $p = a - (q_1 + q_2) = \frac{a+c_1+c_2}{3}$ であり，企業 1 の利益は,

$$u_1(q_1, q_2) = (p - c_1)q_1 = \left(\frac{a - 2c_1 + c_2}{3}\right)^2$$

である．企業 2 の利益は $u_1(q_1, q_2) = \left(\frac{a-2c_2+c_1}{3}\right)^2$．である．

演習 2.5 解説：

(1) プレイヤー 1 の最適反応関数を求めたい．u_1 を x で偏微分し，$\frac{\partial u_1}{\partial x}=0$ を x について解くと

$$x = 2y \tag{2.3}$$

となる．十分条件を調べるために $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$ を調べると -2 となり，すべての x で $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}<0$ となるので，(2.3) はプレイヤー 1 の最適反応関数であることが分かる（x の 2 次関数であり，x^2 の係数が負であるので，それからも分かる）．同様に u_2 を y で偏微分し，$\frac{\partial u_2}{\partial y}=0$ を y について解くと

$$y = 3x + 14 \tag{2.4}$$

となる．十分条件を調べるために $\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}$ を調べるとやはり -2 となり，すべての x で $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}<0$ となるので，(2.4) は x に対する y の最大値を与えており，プレイヤー 2 の最適反応関数であることが分かる．

(2) ナッシュ均衡はお互いが最適反応戦略を選び合う点なので，式 (2.3) と式 (2.4) の両方を満たす点である．よって，この 2 つを連立方程式で解けば良い．これを求めるとナッシュ均衡は $x=4$，$y=2$ であることが分かる．

演習 2.6 解説：

(1) $u_1(x,y)=(x-y)^2$ は，$0\le y\le 1/2$ では $x=1$ で最大値を取り，$1/2\le y\le 1$ では $x=0$ で最大値を取る．したがって，プレイヤー 1 の最適反応関数は

$$x = \begin{cases} 1 & 0\le y\le 1/2 \\ 0 & 1/2\le y\le 1 \end{cases}$$

となる ($x=1/2$ では $\{0,1\}$ の 2 つの値をとる)．一方，$u_2(x,y)=-(y-x)^2$ は $y=x$ で最大値 0 をとる（これはすべての $0\le x\le 1$ で成り立つ）．したがって，プレイヤー 2 の最適反応関数は

$$y = x$$

となる．これをグラフに書くと解答にある図 (図 S.1) の左図のようになる．ナッシュ均衡は 2 つあり，$x=0$，$y=0$ と $x=1$，$y=1$ である．

(2) $u_1(x,y)=-(x-y-1/2)^2$ は，x の 2 次関数であり，x がすべての実数をとれば $x=y+1/2$ で最大値 0 となる．しかし $0\le x\le 1$ であることから，$x=y+1/2$ が最大値となるのは $0\le y+1/2\le 1$ であり，これは $0\le y\le 1/2$ の範囲である．$1/2\le y1$ においては $x=1$ が最大値となる．したがって，プレイヤー 1 の最適反応関数は

$$x = \begin{cases} y+1/2 & 0\le y\le 1/2 \\ 1 & 1/2\le y\le 1 \end{cases}$$

となる．同様に $u_2(x,y)=-(y-2x+1)^2$ は y の 2 次関数で，y がすべての実数をとれば $y=2x-1$ で最大値 0 となる．しかし $0\le y\le 1$ であることから，$y=2x-1$ が最大値となるのは $1/2\le x\le 1$ の範囲である．$0\le x\le 1/2$ においては $y=0$ が最大値となる．したがって，プレイヤー 2 の最適反応関数は

$$y = \begin{cases} 0 & 0\le x\le 1/2 \\ 2x-1 & 1/2\le x\le 1 \end{cases}$$

となる．これをグラフに書くと解答にある図 (図 S.1) の右図のようになる．ナッシュ均衡は 2 つあり，$x=1/2$，$y=0$ と $x=1$，$y=1$ である．

第 3 章

演習 3.1 解説： ここでプレイヤー 1 が U，D を選ぶ確率を p，プレイヤー 2 が L，R を選ぶ確率を q，$1-q$ とする．プレイヤー 1 が U を選んだときの期待利得は

$$2 \times q + 0 \times (1-q) = 2q$$

D を選んだときの期待利得は

$$1 \times q + 5 \times (1-q) = -4q + 5$$

混合戦略のナッシュ均衡では，この期待利得が等しくなければならないから $2q = -4q + 5$ より $q = 5/6$．プレイヤー 2 が L を選んだときの期待利得は

$$3 \times p + 7 \times (1-p) = -4p + 7$$

R を選んだときの期待利得は

$$4 \times p + 0 \times (1-p) = 4p$$

混合戦略のナッシュ均衡では，この期待利得が等しくなければならないから $-4p + 7 = 4p$ より $p = 7/8$．ナッシュ均衡は，プレイヤー 1 が U を 7/8，D を 1/8 で選び，プレイヤー 2 が L を 5/6，R を 1/6 で選ぶ．均衡でのプレイヤー 1 の期待利得は，U または R を（確率 1 で）選んだときの期待利得に等しくなり，U を選んだとき場合の式が簡単で，$2q = 5/3$ となる．プレイヤー 2 の期待利得は，L または R を（確率 1 で）選んだときの期待利得に等しくなり，R を選んだとき場合の式が簡単で，$4p = 7/4$ となる．

演習 3.3 解説： ナッシュ均衡では強支配された戦略に割り振られる確率は 0 になる．したがって C と R を除外して，2×2 ゲームとしてナッシュ均衡を求めれば良い．

演習 3.4 解説：

(1) 利得行列は図 **3.1** となり，混合戦略のナッシュ均衡は，カニがグーを 2/3，チョキを 1/3 で選び，ネコがパーを 1/3，グーを 2/3 で選ぶ，となる．

(2) その結果，
- カニがグーでネコがパーを出す確率 $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$
- カニがグーでネコがグーを出す確率 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
- カニがチョキでネコがパーを出す確率 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
- カニがチョキでネコがグーを出す確率 $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

となる．

(3) カニの期待利得は，

$$\frac{2}{9} \times (-1) + \frac{4}{9} \times 0 + \frac{1}{9} \times 1 \frac{2}{9} \times (-1) = -\frac{1}{3}$$

ネコの期待利得は

$$\frac{2}{9} \times 1 + \frac{4}{9} \times 0 + \frac{1}{9} \times (-1) \frac{2}{9} \times 1 = \frac{1}{3}$$

(4) カニの勝つ確率は 1/9，ネコの勝つ確率は 4/9，アイコの確率は 4/9.

カニ＼ネコ	パー	グー
チョキ	(1 ,-1)	(-1, 1)
グー	(-1 , 1)	(0 , 0)

図 3.1: カニとねこのじゃんけん

演習 3.5 解説： ナッシュ均衡では強支配された戦略に割り振られる確率は 0 になる．したがってアリスは Z を確率 1，S を確率 0 で選ぶ．アリスが Z を選ぶことを前提とすると文太とキャサリンの 2×2 ゲームになるので，このナッシュ均衡を求めれば良い．この 2×2 ゲームは図 **3.2** となる．

B＼C	Z	S
Z	(0 , 6)	(4 , 0)
S	(5 , 0)	(1 , 6)

図 3.2: アリスが Z を選ぶときの文太とキャサリンの 2×2 ゲーム

第 4 章

演習 4.1 解説： 解を太線で書き込むと図 **4.1** のようになる．

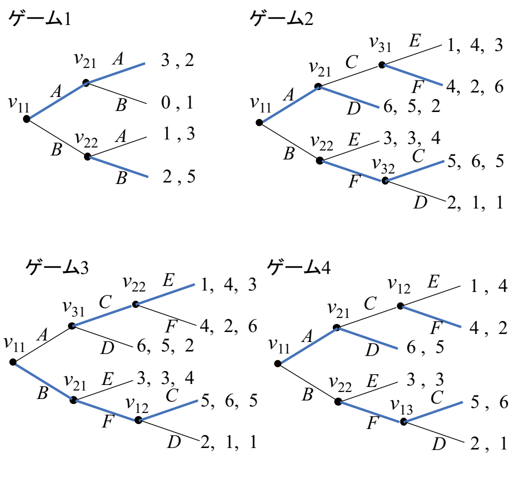
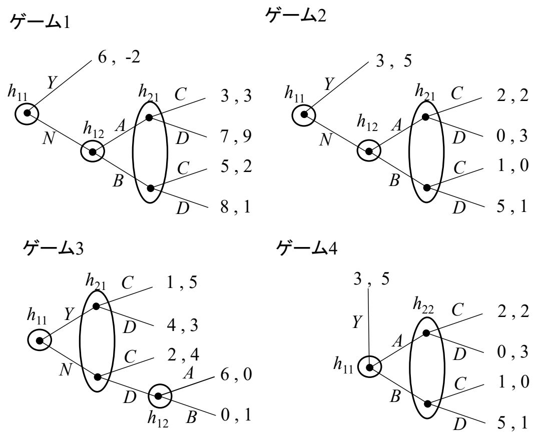


図 4.1: 図 **4.1** のバックワードインダクション解

演習 4.4 解説： 次のページから解説．

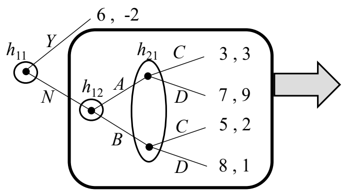
NABENAVI .net



#1 演習4.4

NABENAVI .net

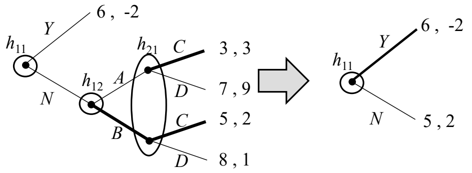
演習4.4　ゲーム1　部分ゲーム完全均衡の求め方1（縮約による）



1 \ 2	*C*	*D*
A	(3, 3)	(7, 9)
B	(5, 2)	(8, 1)

求め方1：

- 部分ゲームは，情報集合h_{12}以降のゲームです．
- そこで，そのゲームを取り出してナッシュ均衡を求めます．
- その部分ゲームのナッシュ均衡は (B,C)です．



- 情報集合h_{12}以降の部分ゲームのナッシュ均衡(B,C)で，その利得は$(5,2)$です．
- そこでh_{11}で Yを選ぶと利得は$(5,2)$，Nを選ぶと利得は$(6,-2)$，と考えられます
- そこでh_{11}でプレイヤー1はYを選びます．
- 部分ゲーム完全均衡は(YB , C)です．
- 正しくは以下の表のように表記します．

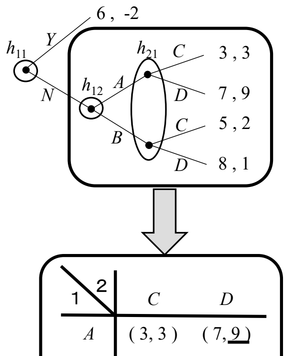
プレイヤー1	h_{11}	Y
	h_{12}	B
プレイヤー2	h_{21}	C

これは部分ゲームでナッシュ均衡を求めたら，その部分ゲームの初期点をナッシュ均衡の結果に対応する終点に置き換え，部分ゲーム完全均衡を求めていると考えられます．これをゲームの縮約と呼びます．

#2 演習4.4

NABENAVI .net

演習4.4　ゲーム1　：部分ゲーム完全均衡の求め方　2



1 \ 2	*C*	*D*
YA	(6, -2)	(6, -2)
YB	(6, -2)	(6, -2)
NA	(3, 3)	(7, 9)
NB	(5, 2)	(8, 1)

求め方2

- 部分ゲームは，全体ゲームと情報集合h_{12}以降のゲーム．
- それぞれのナッシュ均衡を求めます．部分ゲームのナッシュ均衡は(B,C)です・
- 全体ゲームのナッシュ均衡は(YA, C)と(YB, C) の2つがありますが，部分ゲーム完全均衡は，(B, C) が戦略として用いられている(YB, C)だけです．

1 \ 2	*C*	*D*
A	(3, 3)	(7, 9)
B	(5, 2)	(8, 1)

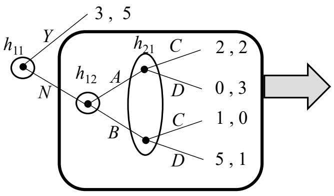
- ゲームの縮約による求め方（求め方1）は求め方2に比べて，部分ゲーム完全均衡を求めるのは易しいと思われます．したがってゲームで何が起きるかを求めるなら縮約のほうが良いです．
- ただしゲーム全体のナッシュ均衡を求めることができないという欠点があります．
- 求め方2は定義に沿った求め方と言えます．この方法では全体ゲームのナッシュ均衡も求められます．

演習4.4

#3

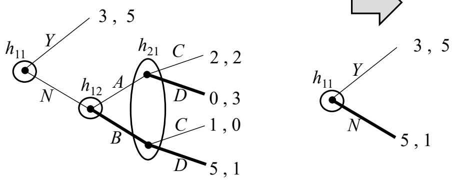
NABENAVI .net

演習4.4 ゲーム2 部分ゲーム完全均衡の求め方 1（縮約）



1 \ 2	C	D
A	$(\underline{2},2)$	$(0,\underline{3})$
B	$(1,0)$	$(\underline{5},\underline{1})$

求め方1：
- 部分ゲームは，情報集合h_{12}以降のゲームです．
- そこで，そのゲームを取り出してナッシュ均衡を求めます．
- その部分ゲームのナッシュ均衡は (B,D)です．



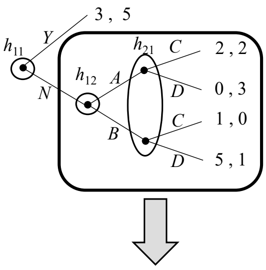
- 情報集合h_{12}以降の部分ゲームのナッシュ均衡(B,D)で，その利得は$(5,1)$です．
- そこでh_{11}で N を選ぶと利得は$(5,1)$，Yを選ぶと利得は$(3,5)$と考えられます
- そこでh_{11} でプレイヤー1はN を選びます．
- 部分ゲーム完全均衡は(NB , D)です．
- 正しくは以下の表のように表記します．

これは部分ゲームでナッシュ均衡を求めたら，その部分ゲームの初期点をナッシュ均衡の結果に対応する終点に置き換え，部分ゲーム完全均衡を求めていると考えられます．これをゲームの縮約と呼びます．

プレイヤー1	h_{11}	N
	h_{12}	B
プレイヤー2	h_{21}	D

NABENAVI .net

演習4.4 ゲーム2 ：部分ゲーム完全均衡の求め方2



1 \ 2	C	D
YA	$(\underline{3},\underline{5})$	$(3,\underline{5})$
YB	$(\underline{3},\underline{5})$	$(3,\underline{5})$
NA	$(2,2)$	$(0,\underline{3})$
NB	$(1,0)$	$(\underline{5},\underline{1})$

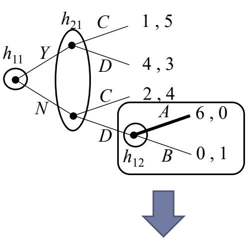
求め方2
- 部分ゲームは，全体ゲームと情報集合h_{12}以降のゲーム．
- それぞれのナッシュ均衡を求めます．部分ゲームのナッシュ均衡は(B,D)です・
- 全体ゲームのナッシュ均衡は(YA, C)と(YB, C) と(NB, D)の3つがあります．部分ゲーム完全均衡は，(B, D) が戦略として用いられている (NB, D)だけです．

1 \ 2	C	D
A	$(\underline{2},2)$	$(0,\underline{3})$
B	$(1,0)$	$(\underline{5},\underline{1})$

- ゲームの縮約による求め方（求め方1）は求め方2に比べて，部分ゲーム完全均衡を求めるのは易しいと思われます．したがってゲームで何が起きるかを求めるなら縮約のほうが良いです．
- ただしゲーム全体のナッシュ均衡を求めることができないという欠点があります．
- 求め方2は定義に沿った求め方と言えます．この方法では全体ゲームのナッシュ均衡も求められます．

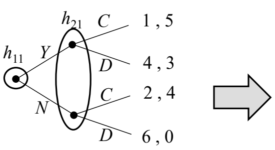
NABENAVI .net

演習4.4 ゲーム3 ：部分ゲーム完全均衡の求め方 1（縮約による）



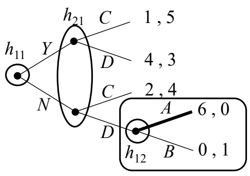
求め方1：
- 情報集合h_{12}以降は部分ゲーム（1人ゲーム）であり，解（1人ゲームのナッシュ均衡になる）は A です，その利得は$(4,0)$です．
- そこで h_{12}以降を縮約します．するとそれは，プレイヤー1と2の同時ゲームになります（下図）．この同時ゲームのナッシュ均衡は(N,C)です．
- したがって部分ゲーム完全均衡は(NA, C)です．

プレイヤー1	h_{11}	N
	h_{12}	A
プレイヤー2	h_{21}	C



1 \ 2	C	D
Y	$(1,\underline{5})$	$(4,3)$
N	$(\underline{2},\underline{4})$	$(\underline{6},0)$

演習4.4 ゲーム3 ：部分ゲーム完全均衡の求め方2

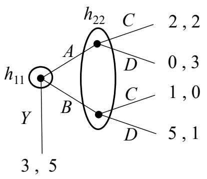


1 \ 2	C	D
YA	(1 , 5)	(4 , 3)
YB	(1 , 5)	(4 , 3)
NA	(2 , 4)	(6 , 0)
NB	(2 , 4)	(0 , 1)

1	
A	4
B	0

求め方2
- 部分ゲームは，全体ゲームと情報集合h_{12}以降のゲーム．
- それぞれのナッシュ均衡を求めます．部分ゲームのナッシュ均衡はAです．
- 全体ゲームのナッシュ均衡は$(NA\,,C)$と(NB,C) の2つがありますが，部分ゲーム完全均衡はAが戦略として用いられて$(NA\,,C)$だけです．

演習4.4 ゲーム4



1 \ 2	C	D
Y	(3 , 5)	(3 , 5)
A	(2 , 2)	(0 , 3)
B	(1 , 0)	(5 , 1)

- このゲームには全体ゲーム以外の部分ゲームはありません．プレイヤー1が，Yを選ばなかった（右側の）ゲームは部分ゲームのように見えますが，部分ゲームは「初期点となる点から後の，点と枝を全部取り出す」という条件ですので，部分ゲームにはならないです．
- したがって全体ゲームのナッシュ均衡が部分ゲーム完全均衡でもあり，それは(Y,C) と (B,D)の2つです．

- このゲーム4はゲーム2とほとんど同じゲームです．
  - ゲーム2：プレイヤー1はゲームをやめる(Y)か，やめないか(N)を選び，やめる(Y)を選んだならばAかBを選ぶ
  - ゲーム4：プレイヤー1はゲームにやめるる(Y)か，AかBかを同時に選ぶ
- しかしゲーム2では，(Y,C)に相当する戦略の組は部分ゲーム完全均衡ではない（解ではない）のに対して，このゲームではそれが解になっています．
- このような部分ゲーム完全均衡の問題点については，さまざまな議論と研究が行われています．

演習 4.6 解説： 図 **4.2** の解説図も参考にせよ．

(1) 混合戦略のナッシュ均衡を求める．
- プレイヤー 1:A を確率 p，B を確率 $1-p$
- プレイヤー 2:C を確率 q，D を確率 $1-q$

で選ぶとしよう．プレイヤー 1 の期待利得は
- A を選んだ時：$3q+0(1-q)=3q$
- B を選んだ時：$1q+4(1-q)=-3q+4$

である．このとき，どちらかが大きいと，混合戦略がナッシュ均衡にならないため，期待利得は等しくなければならない．したがって $3q=-3q+4$ を解いて $q=2/3$ を得る．同様にプレイヤー 2 の期待利得は
- C を選んだ時：$2p+(1-p)=p+1$
- D を選んだ時：$3p+0(1-p)=3p$

である．期待利得は等しくなければならないので $p+1=3p$ を解いて $p=1/2$ を得る．ナッシュ均衡は「プレイヤー 1 が A を 1/2，B を 1/2 で選び，プレイヤー 2 が C を 2/3，D を 2/3 で選ぶ」となる．

(2) プレイヤー 1 のナッシュ均衡での期待利得は，まともに計算すると

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times 3+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 4=2$$

で 2 となる．簡便に求めるには，以下のように考える．プレイヤー 1 が混合戦略を選ん

だときの期待利得は

$$p \times C \text{ の期待利得} + (1-p) \times D \text{ の期待利得}$$

となる．しかしナッシュ均衡ではプレイヤー 1 が C を選んだときも D を選んだときも期待利得が等しくなることから，上記の混合戦略の期待利得は C を選んだときの期待利得（$=D$ を選んだときの期待利得）と等しくなる．したがってプレイヤー 1 のナッシュ均衡での期待利得は，

$$C \text{ の期待利得} = 3q = 3 \times \frac{2}{3} = 2$$

と計算できる．

(3) プレイヤー 1 は Y を選べば期待利得 2，N を選べば 3 なので N を選ぶ．

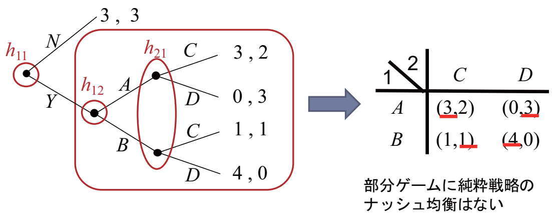
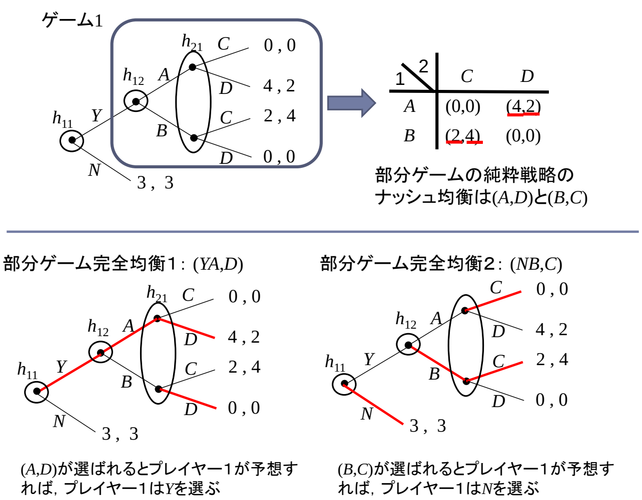
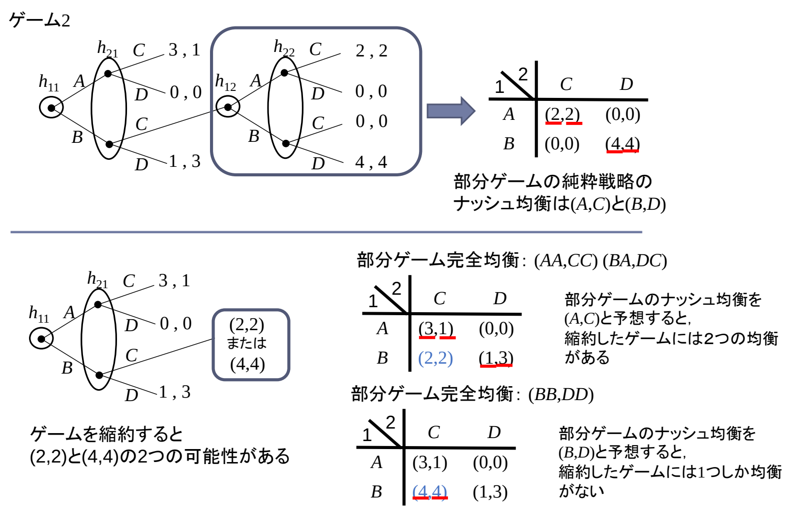


図 4.2: 部分ゲームに混合戦略のナッシュ均衡

演習 4.7 解説： 以下に解説．





演習 4.8 解説： バックワードインダクションで後から解く．図 **4.3** を参考にせよ．

- 第 2 段階 (A) の部分ゲームにおいて，ナッシュ均衡は (C, C) と (D, D).
- 第 2 段階 (B) の部分ゲームにおいて，ナッシュ均衡は (E, F) と (F, E).

したがって，部分ゲーム完全均衡はこれらを組み合わせた 4 通りが考えられる．

- 第 2 段階 (A) で (C, C)，第 2 段階 (B) で (E, F) が選ばれると予想される場合．第 1 段階ではプレイヤー 1 は B を選ぶ．部分ゲーム完全均衡は (BCE, CF)
- 第 2 段階 (A) で (C, C)，第 2 段階 (B) で (F, E) が選ばれると予想される場合．第 1 段階ではプレイヤー 1 は B を選ぶ．部分ゲーム完全均衡は (BCF, CE)
- 第 2 段階 (A) で (D, D)，第 2 段階 (B) で (E, F) が選ばれると予想される場合．第 1 段階ではプレイヤー 1 は B を選ぶ．部分ゲーム完全均衡は (BDE, DF)
- 第 2 段階 (A) で (D, D)，第 2 段階 (B) で (F, E) が選ばれると予想される場合．第 1 段階ではプレイヤー 1 は A を選ぶ．部分ゲーム完全均衡は (ADF, DE)

部分ゲーム完全均衡 4 つのうち，(BCE, CF) と (BDE, DF) は同じ結果（＝均衡経路が同じ）であることに注意する．部分ゲーム完全均衡は 4 つでも，起こる結果は 3 つである．

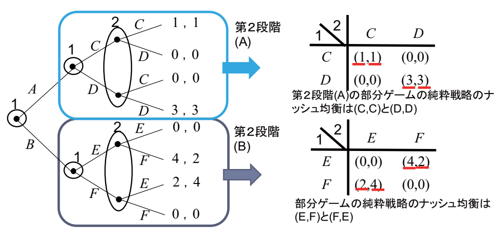


図 4.3: 展開形ゲームと部分ゲームのナッシュ均衡

第 5 章

演習 5.3 解説：

(1) 参入したときの企業 2 の利益を π_2 とすると，

$$\pi_2 = pq_2 - F = \{a - (q_1 + q_2)\}q_2 - F$$

である．利益を最大にする q_2 は $\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0$ より，$q_2 = -\frac{1}{2}q_1 + \frac{a}{2}$ であり，このときの企業 2 の利益は $\left(-\frac{1}{2}q_1 + \frac{a}{2}\right)^2 - F$ である．

(2) $\left(-\frac{1}{2}q_1 + \frac{a}{2}\right)^2 - F \leq 0$ であれば企業 2 は参入しない．したがって $q_1 \geq a - 2\sqrt{F}$ であれば企業 2 は参入しないこととなり，$q_1^E = a - 2\sqrt{F}$ である．

(3) 企業 2 が参入しない場合の企業 1 の利益は $pq_1 = (a - q_1)q_1$ であり，これを最大にする q_1 は $a/2$ である．したがって $q_1^M = a/2$．$q_1^E \leq q_1^M$ を F について解くことより，$F \geq a^2/16$ のとき参入封鎖となる．

(4) $\pi_1^E = 2\sqrt{F}(a - 2\sqrt{F})$.

(5) $q_1^S = a/2$ であり，$\pi_1^S = a^2/8$．このとき $q_1^M = q_1^S$ であるが，$q_1^E > q_1^M$ の場合を考えていることから，q_1^S で生産すると企業 2 は参入することが確認できる．つまり企業 1 は独占であってもシュタッケルベルグ競争であっても同じ生産量 $a/2$ を生産することになるが，$q_1^E > a/2$ であれば企業 2 が参入しシュタッケルベルグ競争（参入許容）となり，$q_1^E \leq a/2$ であれば企業 2 が参入せず企業 1 の独占（参入封鎖）となる．

(6) $\pi^E < \pi^S$ より，$(2\sqrt{F})^2 - 2\sqrt{F}a + a^2/8 > 0$ を F について解けば良い．そこで $x = 2\sqrt{F}$ と置くと $x^2 - 2ax + a^2/8 > 0$ となる．これを x について解くと $x < \frac{2-\sqrt{2}}{4}a$, $x > \frac{2+\sqrt{2}}{4}a$，を得る．ここで $q_1^E \leq q_1^M$ の場合を考えているので，問 3 から $F < a^2/16$ であり，これより $x < a/2$ である．したがって $x > \frac{2+\sqrt{2}}{4}a$ は不適であり，$x < \frac{2-\sqrt{2}}{4}a$ となる．したがって $\sqrt{F} < \frac{2-\sqrt{2}}{8}a$ となり，$F < \frac{3-2\sqrt{2}}{32}a$.

(7) $F \geq a^2/16$ のとき参入封鎖，$\frac{3-2\sqrt{2}}{32}a \leq F < a^2/16$ のとき参入阻止，$F < \frac{3-2\sqrt{2}}{32}a$ のとき参入許容となる．

演習 5.4 解説： $2m$ 回繰り返した時，プレイヤー 1 の利得は

$$\begin{aligned}
& 0 + 5\delta + 0\delta^2 + 5\delta^3 \cdots + 0\delta^{2m-2} + 5\delta^{2m-1} \\
= \; & (5\delta)(1 + \delta^2 + \delta^4 + \cdots + \delta^{2(m-1)}) \\
= \; & \tfrac{5\delta(1-\delta^{2m})}{1-\delta^2}
\end{aligned}$$

同様にプレイヤー 2 の利得は $\frac{5(1-\delta^{2m})}{1-\delta^2}$ 無限回繰り返したときは，$m \to \infty$ とすると $\delta^{2m} \to 0$ となることより得られる．

演習 5.5 解説： どのような戦略の組が部分ゲーム完全均衡になるか考えてみる．まず囚人のジレンマの 2 回繰り返しで考えた論理と同様に**部分ゲーム完全均衡では，最終回の成分ゲームで，その成分ゲームのナッシュ均衡がプレイされていなければならない**ということが，すぐに分かる（考えよ）．したがって例に挙げた $((C, ACAABA), (B, ABAABA))$ は部分ゲーム完全均衡ではない．なぜなら最終回（2 回目）に (B, B) が起きているが，これはナッシュ均衡ではないからである[*1]．また戦略の組 (i)$((A, CCCCCC), (A, BBBBBB))$ のように 2 回目のすべての部分ゲームで同じナッシュ均衡が選ばれるならば，1 回目のゲームは 2 回目に影響を及ぼさない．したがって 1 回目のゲームは独立に考えることができ，成分ゲームのナッ

[*1] 戦略の組によって実現する履歴は $(C, B)(A, A)$ で，両方ともナッシュ均衡であるにも関わらず！

シュ均衡であれば部分ゲーム完全均衡になり，そうでなければ部分ゲーム完全均衡ではない，と言える．戦略の組 (i) では 1 回目は (A, A) であるから戦略の組 (i) は部分ゲーム完全均衡である．興味深いのは戦略の組 (ii)$((B, CCCACC), (B, BBBABB))$ である．この場合は，2 回目の部分ゲームで異なるナッシュ均衡が起きる．このゲームを 1 回目に縮約したゲームは図 **5.1** となる．図 **5.1** の (B, B) はナッシュ均衡になる．すなわち戦略の組 (ii) は部分ゲーム完

縮約ゲーム

1 \ 2	A	B
A	(5+2,1+2)	(0+2,0+2)
B	(0+2,0+2)	(1+5,5+1)
C	(0+2,0+2)	(2+2,2+2)

図 5.1: $((B, CCCACC), (B, BBBABB))$ の縮約ゲーム

全均衡になるのである．この部分ゲーム完全均衡では

- 1 回目のゲームで選ばれる (B, B) は，元のゲームのナッシュ均衡ではない．
- この部分ゲーム完全均衡で，プレイヤー 1 と 2 の利得はともに 6 になる．プレイヤー 2 は，成分ゲームの 2 つのナッシュ均衡 (A, A)，(C, B) のどちらが 2 回選ばれても最高の利得は 4 であり，それ以上の利得を得ている．

という特徴がある．複数のナッシュ均衡がある繰り返しゲームは大変複雑で，このようなナッシュ均衡ではない高い利得を部分ゲーム完全均衡で獲得する可能性もある．

演習 5.6 解説：

(1) $v_C = 4 + \delta\{(1-p) \times 0 + p \times v_C\}$ を解いて，$v_C = \frac{4}{1-\delta p}$．

(2) 同様にして

$$v_D = 1 + \delta\{(1-p) \times 0 + p \times v_D\}$$

から，$v_D = \frac{1}{1-\delta p}$ となる．

(3) プレイヤーがトリガー戦略から変更した戦略によって，ずっと協力が続けば利得は同じである．そうではない場合，t 回目までは協力し $t+1$ 回目に初めて協力しないとしよう．このとき利得は $t+1$ 回目で 5 に上昇するが，そのあと $t+1$ 回目以降に得られる利得は最大で v_D となる．一方，戦略を変更しないときは $t+1$ 回目以降，ずっと v_C が得られる．よって

$$\delta^t v_C \geq \delta^t \{5 + \delta((1-p) \times 0 + p \times v_D)\}$$

であれば，どんな戦略もトリガー戦略を選んだときの利得より高くならない．これより $p \geq \frac{1}{\delta 4}$ であれば，トリガー戦略を選び合い，互いに協力を続けることがナッシュ均衡になる．

(4) $\delta = 3/4$ のときは，$p \geq 1/3$ であれば協力が達成できる．

演習 5.7 解説： ここで G_{ij} はプレイヤー 1 が i ポイント，プレイヤー 2 が j ポイント獲得したときのゲーム（それ以降のゲームを縮約したゲーム）を表す．

- 両プレイヤーともどんなときも 2 ポイントを獲得すれば勝ちなので，(A,A) が選ばれると利得は $(1,-1)$，(A,B) が選ばれると利得は $(-1,1)$ です．
- 最初のゲーム（ゲーム G_{00}）では，(B,B) が選ばれるとゲーム G_{10} に移り，(B,A) が選ばれるとゲーム G_{01} に移る．
- ゲーム G_{10} では，(B,B) が選ばれるとプレイヤー 1 の勝ちなので利得は $(1,-1)$，(B,A) が選ばれるとゲーム G_{11} に移る．
- ゲーム G_{01} では，(B,A) が選ばれるとプレイヤー 2 の勝ちなので利得は $(-1,1)$，(B,B) が選ばれるとゲーム G_{11} に移る．
- ゲーム G_{11}（緑枠で囲まれたゲーム，両プレイヤーが 1 ポイントを獲得したとき）．このときは両プレイヤーともポイントを獲得すれば勝ちで，A,B を選ぶ確率は 1/2，期待利得はともに 0 です（問 1 の答）．
- そこで G_{10} の G_{00} に利得 (0.0) を入れて（縮約して）解くと，1 は A を 1/3，B を 2/3 で選び，2 は A を 2/3，B を 1/3 で選ぶことになり，1 の期待利得は 1/3，2 は $-1/3$ になる．
- 同様に G_{01} を解くと，1 の期待利得は $-1/3$，2 は 1/3 になる．
- この期待利得をゲーム G_{00} のゲーム G_{10}，ゲーム G_{01} に相当する部分に代入（縮約）すると図 5.2 のようなゲームが得られる．これを解くと，1 は A を 1/4，B を 3/4 で選び，2 は A を 1/2，B を 1/2 で選ぶことになり，1 と 2 の期待利得は 0 になる．

このゲームはプレイヤー 1 と 2 に有利不利はないので，1 と 2 の期待利得は最初の段階で 0 になることは予想される．その一方，その戦略がプレイヤー 1 と 2 でずれるところは大変興味深い．ゲームの全体像と解き方を示した図を次のページに，またその次ページには，ゲームの木を描いているので，参考にして欲しい．

G_{00}

1 \ 2	*A*	*B*
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	(1/3,- 1/3)	(-1/3,1/3)

図 5.2: 縮約されたゲーム（ゲーム G_{00}）

G_{00}

1 \ 2	*A*	*B*
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	G_{10}	G_{01}

G_{10}

1 \ 2	*A*	*B*
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	G_{11}	(1,- 1)

G_{01}

1 \ 2	*A*	*B*
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	(-1, 1)	G_{11}

G_{11}

1 \ 2	*A*	*B*
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	(-1, 1)	(1,- 1)

- プレイヤー1と2はAとBを確率1/2で選ぶ
- 期待利得はプレイヤー1も2も0

G_{00}

1 \ 2	*A*	*B*
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	G_{01}	G_{10}

縮約したG_{00}

1 \ 2	*A*	*B*
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	(-1/3, 1/3)	(1/3,-1/3)

G_{01}

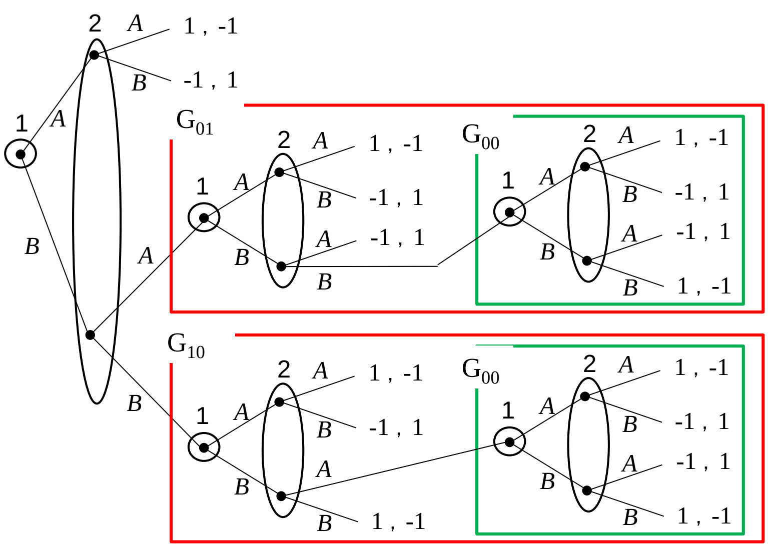
1 \ 2	*A*	*B*
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	(-1, 1)	(0 , 0)

G_{10}

1 \ 2	*A*	*B*
A	(1,- 1)	(-1, 1)
B	(0 , 0)	(1,- 1)

- 1はAを1/3, Bを2/3で選ぶ
- 2はAを1/3, Bを2/3で選ぶ
- 1の期待利得は-1/3
- 2は1/3

- 1はAを1/3, Bを2/3で選ぶ
- 2はAを2/3, Bを1/3で選ぶ
- 1の期待利得は1/3
- 2は-1/3



41

演習 **5.8** 解説：

(1) G_1 は図 **5.3** となる．このゲームには純粋戦略のナッシュ均衡はない．混合戦略のナッシュ均衡は「プレイヤー 1 が E と C を 1/2 ずつ，プレイヤー 2 が E と C を 1/2 ずつ選ぶ」というもので，プレイヤー 1 の期待利得は $v_1 = 0$，プレイヤー 1 が勝つ確率 $w_1 = 1/2$ であることが分かる．

1 \ 2	S	C
E	(-1,1)	(1,-1)
C	(1,-1)	(-1,1)

図 5.3: ゲーム G_1

(2) G_2 は図 **5.4** のようになり，G_1 を縮約すると，図 **5.4** の右図のようになる．これを解

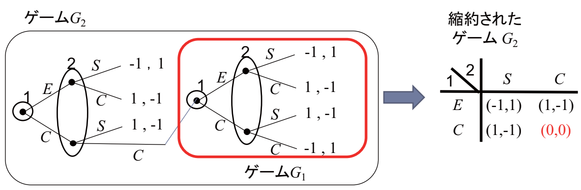


図 5.4: ゲーム G_2

くと，プレイヤー 1 は E を 1/3，C を 2/3 で選び，プレイヤー 2 は S を 1/3，C を 2/3 で選ぶ，となる．プレイヤー 1 の期待利得 v_2 を求めると

$$v_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times v_1$$

となる．$v_1 = 0$ からプレイヤー 1 の期待利得 $v_2 = \frac{1}{3}$ である．またこのゲームはゼロ和ゲームなので，プレイヤーの期待利得は $-v_2 = -\frac{1}{3}$ となる．プレイヤー 1 の勝つ確率は，

$$\begin{aligned} &(E, C) \text{ が起きる確率} + (C, S) \text{ が起きる確率} \\ &+(C, C) \text{ が起きる確率} \times G_1 \text{でプレイヤー 1 が勝つ確率} \end{aligned}$$

であり，

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times w_1$$

となり $w_2 = 2/3$ となる．

(3) ゲーム G_n とゲーム G_{n+1} の関係を考える．ゲーム G_{n+1} は図 **5.5** のようになる．こ

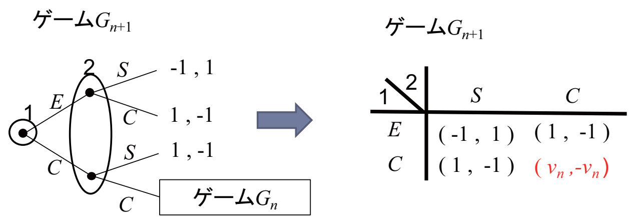


図 5.5: ゲーム G_{n+1}

のゲーム G_{n+1} の混合戦略のナッシュ均衡を求める．

- プレイヤー 1:E を確率 p，C を確率 $1 - p$
- プレイヤー 2:S を確率 q，C を確率 $1 - q$

とする．プレイヤー 1 の期待利得は

- E を選んだ時：$-q + (1 - q) = -2q + 1$
- C を選んだ時：$q + v_n(1 - q) = (1 - v_n)q + v_n$

である．このとき，どちらかが大きいと，混合戦略がナッシュ均衡にならないため，期待利得は等しくなければならない．したがって $-2q + 1 = (1 - v_n)q + v_n$ を解いて $q = \frac{1-v_n}{3-v_n}$ を得る．同様にプレイヤー 2 の期待利得は

- S を選んだ時：$p - (1 - p) = 2p - 1$
- C を選んだ時：$-p - v_n(1 - p) = (v_n - 1)p - v_n$

である．期待利得は等しくなければならないので，$p = \frac{1-v_n}{3-v_n}$ を得る．改めて p，q を p_{n+1}，q_{n+1} と書き直しておく（ゲーム G_{n+1} の混合戦略のナッシュ均衡で，プレイヤー 1 が E を選ぶ確率と，プレイヤー 2 が S を選ぶ確率）

$$p_{n+1} = q_{n+1} = \frac{1 - v_n}{3 - v_n}$$

皇帝と奴隷が E，S を選ぶ確率は同じである．プレイヤー 1 のナッシュ均衡による期待利得 v_{n+1} は，

$$v_{n+1} = -2q_{n+1} + 1 = \frac{v_n + 1}{3 - v_n} \tag{5.1}$$

となる（E を選んだとき，C を選んだときと，期待利得はすべて等しくなるので，E を選んだ期待利得を計算した）．プレイヤー 1 の勝つ確率 w_{n+1} は，

$$\begin{aligned} &(E, C) \text{ が起きる確率} + (C, S) \text{ が起きる確率} \\ &+(C, C) \text{ が起きる確率} \times G_n \text{でプレイヤー 1 が勝つ確率} \end{aligned}$$

であることから，

$$w_{n+1} = p_{n+1} \times (1 - q_{n+1}) + (1 - p_{n+1}) \times q_{n+1} + (1 - p_{n+1}) \times (1 - q_{n+1}) \times w_n$$

となる．$q_{n+1} = p_{n+1}$ より，これを計算すると

$$w_{n+1} = (1 - p_{n+1})\{2p_{n+1} + (1 - p_{n+1})w_n\}$$

となる．

(4) $v_1 = 0$，$w_1 = 1/2$ であることは既に求めているため，これを使って $n = 2, 3, 4$ の値を求めると，

n	p_n	v_n	w_n
1	1/2	0	1/2
2	1/3	1/3	2/3
3	1/4	1/2	3/4
4	1/5	3/5	4/5

となる．

第 6 章

演習 6.2 解説： ここで B を目撃者が実際に見たのは青タクシー，G を目撃者が実際に見たのは緑タクシー，b は目撃者がタクシーを青タクシーに見えたという事象だとする．青タクシーに見えたという条件のもとで，それが実際に青タクシーであった確率を求める．ベイズの定理より

$$P(B|b) = \frac{P(b|B)P(B)}{P(b|B)P(B) + P(b|G)P(G)}$$

である．この街のタクシーの比率より $P(G) = 0.85$，$P(B) = 0.15$．目撃者が青タクシーを正しく認識する確率は 0.8 なので $P(b|B) = 0.8$，目撃者が緑タクシーを青タクシーに見間違える確率は 0.2 なので $P(b|G) = 0.2$ である．これより $P(B|b) \approx 0.41$ となる．

演習 6.3 解説： ベイズの定理より，

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)}$$

である．どの箱も事前には当たる確率は同じなので，$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 1/3$，箱 1 が当たりの場合，司会者が 2 と 3 の箱をはずれであると示す確率は半々なので $P(A|B_1) = 1/2$ である．箱 1 が当たりの時に箱 2 が開けられることはないので，$P(A|B_2) = 0$，箱 3 が当たりの時には，必ず箱 2 が開けられるので，$P(A|B_3) = 1$．これより $P(B_1|A) = 2/3$，同様に $P(B_3|A) = 1/3$ である．

演習 6.4 解説：

(1) ゲームの木は図 **6.1**

(2) 利得行列は図 **6.2** の左側のようになる．このときプレイヤー 1 の戦略 BB は DB と DD を支配する．戦略 DB と DD は使われることはない（DB と DD を選ぶよりは，BB を選んだほうが良いから）．しかし，これは戦略 BB が選ばれることを意味しない．BB と BD に支配関係はないからである．したがって選ばれない DB と DD を削除すると，図 **6.2** の右側のような利得行列になる．このゲームのナッシュ均衡を求めれば良い．このゲームには純粋戦略のナッシュ均衡はない．混合戦略のナッシュ均衡を求め

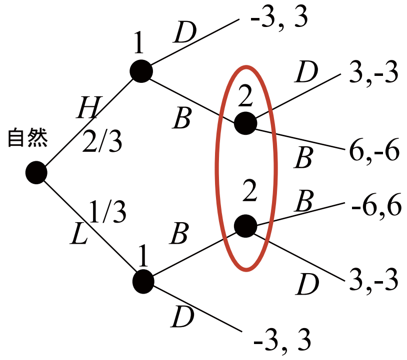


図 6.1: **演習 6.4** のゲームの木

1 \ 2	B	D
BB	(2,-2)	(3,-3)
BD	(3,-3)	(1,-1)
DB	(-4, 4)	(-1, 1)
DD	(-3, 3)	(-3, 3)

1 \ 2	B	D
BB	(2,-2)	(3,-3)
BD	(3,-3)	(1,-1)

図 6.2: **演習 6.4** の利得行列

ると，プレイヤー 1 は BB を 2/3，BD を 1/3 で選び（DB，DD は確率 0)，プレイヤー 2 は B を 2/3，D を 1/3 で選ぶことになる．

(3) プレイヤー 1 は BB か BD を選ぶ．H を引いたときは必ず B を選ぶ（確率 1)．L を引いたときは，B を確率 2/3，D を確率 1/3 で選ぶ．

(4) 先に事後の期待値について考えよう．H を引いたとき，プレイヤー 1 は確実に B を選び，プレイヤー 2 は B を 2/3，D を 1/3 で選ぶので，H を引いたときの事後の期待値は

$$\frac{2}{3} \times 6 + \frac{1}{3} \times 3 = 5$$

である．L を引いたとき，プレイヤー 1 は B を 2/3，D を 1/3 で選び，B が選ばれたときはプレイヤー 2 は B を 2/3，D を 1/3 で選ぶ．(共に B になる確率が 4/9，プレイヤー 1 が B，プレイヤー 2 が D となる確率は 2/9，プレイヤー 1 が D を選んでゲームが終わる確率が $1/3 = 3/9$. すべての確率を足すと 1 になっていることを確認せよ)．L を引いたときの事後の期待値は

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times (-6) + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 3 + \frac{1}{3} \times (-3) = -3$$

事前の期待値は

$$\frac{2}{3} \times 5 + \frac{1}{3} \times (-3) = \frac{7}{3}$$

である．

演習 6.5 解説：

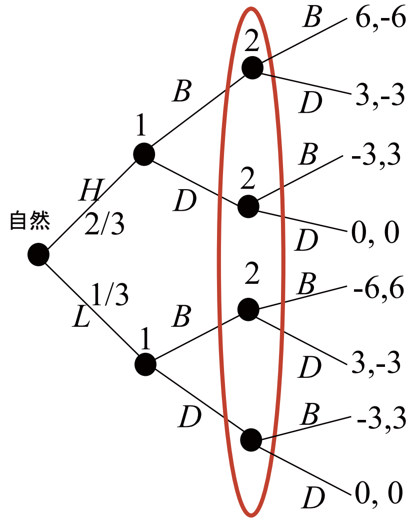


図 6.3: **演習 6.5** のゲームの木

1 \ 2	B	D
BB	(2,-2)	(3,-3)
BD	(3,-3)	(2,-2)
DB	(-4, 4)	(-1, 1)
DD	(-3, 3)	(0, 0)

1 \ 2	B	D
BB	(2,-2)	(3,-3)
BD	(3,-3)	(2,-2)

図 6.4: **演習 6.5** の利得行列

(1) ゲームの木は図 **6.3**

(2) 利得行列は図 **6.4** の左のようになる．このときプレイヤー 1 の戦略 BB は DB と DD を支配する．戦略 DB と DD は使われることはない（DB と DD を選ぶよりは，BB を選んだほうが良いから）．しかし，これは戦略 BB が選ばれることを意味しない．BB と BD に支配関係はないからである．したがって選ばれない DB と DD を削除すると，図 **6.4** の右側のような利得行列になる．このゲームのナッシュ均衡を求めれば良い．このゲームには純粋戦略のナッシュ均衡はない．混合戦略のナッシュ均衡を求めると，プレイヤー 1 は BB を 1/2，BD を 1/2 で選び（DB，DD は確率 0)，プレイヤー 2 も B を 1/2，D を 1/2 で選ぶことになる．

(3) プレイヤー 1 は BB か BD を選ぶ．H を引いたときは必ず B を選ぶ（確率 1)．L を引いたときは，B を確率 1/2，D を確率 1/2 で選ぶ．

(4) 先に事後の期待値について考えよう．H を引いたとき，プレイヤー 1 は確実に B を選び，プレイヤー 2 は B を 1/2，D を 1/2 で選ぶので，H を引いたときの事後の期待値は

$$\frac{1}{2}\times 6+\frac{1}{2}\times 3=\frac{9}{2}$$

である．L を引いたとき，プレイヤー 1 は B を 1/2，D を 1/2 で選び，プレイヤー 2 は B を 1/2，D を 1/2 で選ぶ．L を引いたときの事後の期待値は

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(-6)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(-3)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 0=-\frac{3}{2}$$

事前の期待値は

$$\frac{2}{3} \times \frac{9}{2} + \frac{1}{3} \times (-\frac{3}{2}) = \frac{5}{2}$$

である．

第 7 章

演習 7.2 解説： 不完備情報ゲームの利得行列は図 **7.1** となる．

1 \ 2	*LL*	*LR*	*RL*	*RR*
UU	((3,2) , (5,4))	((5,0) , (5,3))	((5,5) , (4,4))	((7,3) , (4,3))
UD	((3,1) , (4,2))	((5,3) , (4,5))	((5,2) , (3,2))	((7,4) , (3,5))
DU	((6,2) , (3,4))	((8,0) , (3,0))	((0,5) , (2,4))	((2,3) , (2,0))
DD	((6,1) , (2,2))	((8,3) , (2,2))	((0,2) , (1,2))	((2,4) , (1,2))

図 7.1: **演習 7.2** の不完備情報ゲーム利得行列

演習 7.3 解説： 不完備情報ゲームの利得行列は図 **7.2** となる．問 3 で一ノ瀬の事前の期待利得は

$$4/5 \times 300 + 1/5 \times 750 = 390$$

と計算できる．

1 \ 2	*A*	*B*
AA	((200,200),400)	((600,600),390)
AB	((200,750),440)	((600,250),340)
BA	((300,200),560)	((100,600),310)
BB	((300,750),600)	((100,250),260)

図 7.2: **演習 7.3** の不完備情報ゲーム利得行列

演習 7.4 解説： 企業 1 高費用タイプの利益を π_{1H} とする．企業 1 高費用タイプは自分の製品の価格は p_{1H} で，相手の企業 2 の製品の価格は p_2 であることを知っている．したがって需要量は $q_1 = 108 - p_{1H} + p_2$ であることが分かるので，π_{1H} は

$$\begin{aligned}\pi_{1H} &= p_{1H}(108 - p_{1H} + p_2) - 48(108 - p_{1H} + p_2) \\ &= -p_{1H}^2 + (156 + p_2)p_{1H} - 48p_2 - 5184\end{aligned}$$

である．これを p_{1H} で偏微分すると，

$$\frac{\partial \pi_{1H}}{\partial p_{1H}} = -2p_{1H} + 156 + p_2$$

となる．$\frac{\partial \pi_{1H}}{\partial p_{1H}} = 0$ を解くことにより，企業 1 高費用タイプの最適反応関数は

$$p_{1H} = \frac{1}{2}p_2 + 78 \tag{7.1}$$

である．同様に企業 1 低費用タイプのの利益を π_{1L} とすると，

$$\begin{aligned}\pi_{1L} &= p_{1L}(108 - p_{1L} + p_2) - 24(108 - p_{1L} + p_2)\\ &= -p_{1L}^2 + (132 + p_2)p_{1L} - 24p_2 - 2592\end{aligned}$$

である．これを p_{1L} で偏微分すると，

$$\frac{\partial \pi_{1L}}{\partial p_{1L}} = -2p_{1L} + 132 + p_2$$

となる．$\frac{\partial \pi_{1L}}{\partial p_{1L}} = 0$ を解くことにより，企業 1 低費用タイプの最適反応関数は

$$p_{1L} = \frac{1}{2}p_2 + 66 \tag{7.2}$$

である．企業 2 の利益を π_2 とする．企業 2 は自分の製品の価格は p_2 であることが分かるが，相手企業の製品価格は確実には分からず，p_{1H} である確率が $\frac{1}{4}$，p_{1L} である確率が $\frac{3}{4}$ であると予想していることになる．そこで π_2 は，需要量が $q_2 = 72 - p_2 + p_{1H}$ であるような利益である確率が $\frac{1}{4}$，$q_2 = 72 - p_2 + p_{1L}$ であるような利益である確率が $\frac{3}{4}$ と考えた期待値となるので，

$$\begin{aligned}\pi_2 = &\frac{1}{4}\left\{p_2(72 - p_2 + p_{1H}) - 24(72 - p_2 + p_{1H})\right\}\\ &+ \frac{3}{4}\left\{p_2(72 - p_2 + p_{1L}) - 24(72 - p_2 + p_{1L})\right\}\end{aligned} \tag{7.3}$$

となる．この式は変形すると

$$\pi_2 = p_2\left(72 - p_2 + \frac{1}{4}p_{1H} + \frac{3}{4}p_{1L}\right) - 24\left(72 - p_2 + \frac{1}{4}p_{1H} + \frac{3}{4}p_{1L}\right) \tag{7.4}$$

となる．もし不完備情報ではなく企業 1 の決定する価格が p_1 であるとすると，企業 2 の利益は

$$\pi_2 = p_2\left(72 - p_2 + p_1\right) - 24\left(72 - p_2 + p_1\right) \tag{7.5}$$

となる．式 (7.4) は，式 (7.5) の p_1 が価格の期待値 $\frac{1}{4}p_{1H} + \frac{3}{4}p_{1L}$ に置き換わったものと解釈することができるだろう．式 (7.4) を計算すると（式 (7.4) を計算しても同じ），

$$\pi_2 = -p_2^2 + \left\{96 + \left(\frac{1}{4}p_{1H} + \frac{3}{4}p_{1L}\right)\right\}p_2 - 24\left(\frac{1}{4}p_{1H} + \frac{3}{4}p_{1L}\right) - 1728$$

p_2 で偏微分すると，

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = -2p_2 + 96 + \left(\frac{1}{4}p_{1H} + \frac{3}{4}p_{1L}\right)$$

となる．$\frac{\partial \pi_2}{\partial p_2} = 0$ を解くと，企業 2 の最適反応関数は

$$p_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}p_{1H} + \frac{3}{4}p_{1L}\right) + 48$$

である．このままでも良いが計算すると

$$p_2 = \frac{1}{8}p_{1H} + \frac{3}{8}p_{1L} + 48 \tag{7.6}$$

	$0 \leq q \leq 1/3$	$1/3 \leq q \leq 1$
$0 \leq p \leq 1/2$	NN	NY
$1/2 \leq p \leq 1$	YN	YY

表 8.1: プレイヤー 2 の信念と最適反応戦略

である．ベイズナッシュ均衡は，式 (7.1)，式 (7.2) と式 (7.2) を同時に満たす p_{1H}，p_{1L}，p_2 である．式 (7.6) に，式 (7.1) と式 (7.2) を代入し計算すると $p_2 = 110$ を得る．これを式 (7.1) と式 (7.2) に代入して $p_{1H} = 133$ と $p_{1L} = 121$ を得る．企業 1 が高費用タイプであった場合，$q_1 = 108 - p_1 + p_2$ より企業 1 の需要量は 85，企業 2 の需要量は $q_1 = 72 - p_2 + p_1$ より企業 2 の需要量は 95 となる．

第 8 章

演習 8.2 解説：

■ゲーム 1　まずプレイヤー 2 の最適反応戦略を信念によって場合分けしておこう．h_{21} においてプレイヤー 2 が Y を選んだときの期待利得は

$$p \times 4 + (1 - p) \times 0 = 4p$$

となる．また N を選んだときの期待利得は，

$$p \times 0 + (1 - p) \times 4 = 4(1 - p)$$

となる．このことより $p \geq 1/2$ であれば Y，$p \leq 1/2$ であれば N を選ぶことが最適反応戦略の行動である．同様に h_{21} においてプレイヤー 2 が Y を選んだときの期待利得は，$8q$，N を選んだときの期待利得 $4(1 - q)$ であり，$q \geq 1/3$ であれば Y を選ぶことが，$q \leq 1/3$ であれば N を選ぶことが最適反応戦略の行動である．表にすると**表 8.1** となる．

プレイヤー 1 が AB を選ぶとき　整合的な信念は $p = 1$，$q = 0$ であり，これに対するプレイヤー 2 の最適反応戦略は**表 8.1** より h_1 で Y を，h_2 で N を選ぶ YN である（**表 8.1** を使うまでもなく，x_{11}，x_{13} での最適な選択を考えれば良い）．YN に対して，プレイヤー 1 のタイプ H（x_1 で行動）は，A を選べば利得は 3，B を選べば利得は 0 であるから，A を選ぶことが最適反応戦略である．またタイプ L（x_2 で行動）は，A を選べば利得は 0，B を選べば利得は 4 であるから，B を選ぶことが最適反応戦略である．したがって AB が YN に対して最適反応戦略であることが確認できた．以上から，プレイヤー 1 が AB を選び，プレイヤー 2 が YN を選ぶことは完全ベイズ均衡であり，そのときの信念は $p = 1$，$q = 0$ である．（均衡 2）

プレイヤー 1 が BA を選ぶとき　BA における整合的な信念は $p = 0$，$q = 1$ であり，**表 8.1** よりプレイヤー 2 の最適反応戦略は NY である（表を使うまでもない）．NY に対してプレイヤー 1 の最適反応戦略は BA である．よってプレイヤー 1 が BA を選び，プレイヤー 2 が NY を選ぶことは完全ベイズ均衡であり，そのときの信念は $p = 0$，$q = 1$ である．（均衡 3）

	$0 \leq q \leq 1/2$	$1/2 \leq q \leq 1$
$0 \leq p \leq 1$	YY	YN

表 8.2: プレイヤー 2 の信念と最適反応戦略

プレイヤー 1 が AA を選ぶとき　AA に整合的な信念は $p = 1/4$，q はどんな値でも良い．表 **8.1** よりこのとき $q \geq 1/3$ とすれば NY が，$q \leq 1/3$ とすれば NN がプレイヤー 2 の最適反応戦略となる．プレイヤー 2 が NY を選ぶとき，プレイヤー 1 の最適反応戦略は BA であり，AA は最適反応戦略にならない．したがって完全ベイズ均衡にはならない．一方，プレイヤー 2 が NN を選ぶとき，プレイヤー 1 の最適反応戦略は BB である．AA は最適反応戦略にならない．したがって完全ベイズ均衡にはならない．

プレイヤー 1 が BB を選ぶとき　BB に整合的な信念は $q = 1/4$，p はどんな値でも良い．表 **8.1** よりこのとき $p \geq 1/2$ とすれば YN が，$p \leq 1/2$ とすれば NN がプレイヤー 2 の最適反応戦略となる．プレイヤー 2 が YN を選ぶとき，プレイヤー 1 の最適反応戦略は AB であり，BB は最適反応戦略にならない．したがって完全ベイズ均衡にはならない．一方，プレイヤー 2 が NN を選ぶとき，プレイヤー 1 の最適反応戦略は BB である．よってプレイヤー 1 が BB を選び，プレイヤー 2 が NN を選ぶことは完全ベイズ均衡であり，そのときの信念は $0 \leq p \leq 1/2$，$q = 1$ である．（均衡 1）

■ゲーム 2　プレイヤー 2 の最適反応戦略を信念によって場合分けする．h_{21} においてプレイヤー 2 が Y を選んだときの期待利得は

$$p \times 4 + (1 - p) \times 3 = 3$$

となる．また N を選んだときの期待利得は,

$$p \times 0 + (1 - p) \times 4 = 0$$

となる．このことより p が何であっても Y を選ぶことが最適反応戦略の行動である．同様に h_{22} においてプレイヤー 2 が Y を選んだときの期待利得は，$3(1 - q)$，N を選んだときの期待利得 $3q$ であり，$q \geq 1/2$ であれば N を，$q \leq 1/2$ であれば Y を選ぶことが最適反応戦略の行動である．表にすると表 **8.2** となる．

プレイヤー 1 が AB を選ぶとき　整合的な信念は $p = 1$，$q = 0$ であり，これに対するプレイヤー 2 の最適反応戦略は YY．YY に対するプレイヤー 1 の最適反応戦略は AB である．よってプレイヤー 1 が AB を選び，プレイヤー 2 が YY を選ぶことは完全ベイズ均衡であり，そのときの信念は $p = 1$，$q = 0$ である．（均衡 2）

プレイヤー 1 が BA を選ぶとき　BA における整合的な信念は $p = 0$，$q = 1$ であり，プレイヤー 2 の最適反応戦略は YN である．YN に対してプレイヤー 1 の最適反応戦略は AA である．したがって完全ベイズ均衡にはならない．

プレイヤー 1 が AA を選ぶとき　AA に整合的な信念は $p = 1/3$，q はどんな値でも良い．表 **8.2** よりこのとき $q \geq 1/2$ とすれば YN が，$q \leq 1/2$ とすれば YY がプレイヤー 2 の最適反応戦略となる．プレイヤー 2 が YN を選ぶとき，プレイヤー 1 の最適反応戦略は AA である．よってプレイヤー 1 が AA を選び，プレイヤー 2 が YN を選ぶことは完全ベイズ均衡であり，そのときの信念は $p = 1/3$，$1/2 \leq q \leq 1$ である．（均衡 1）一

方，プレイヤー 2 が YY を選ぶとき，プレイヤー 1 の最適反応戦略は AB である．したがって完全ベイズ均衡にはならない．

プレイヤー 1 が BB を選ぶとき BB に整合的な信念は $q = 1/3$，p はどんな値でも良い．表 **8.2** より，すべての p で YY が最適反応戦略である．プレイヤー 2 が YY を選ぶとき，プレイヤー 1 の最適反応戦略は AB である．したがって完全ベイズ均衡にはならない．

演習 8.4 解説： 問 3 均衡 2 は直観的基準を満たさない理由は，以下の通りである．

(1) プレイヤー 2 は，B が選ばれたとき，信念が $0 \leq p \leq 1/2$ であれば D，$1/2 \geq p \leq 1$ であれば N が最適反応戦略であるから，最適反応戦略になりうる行動の集合 A は，$A = \{D, N\}$ となる．つまり，プレイヤー 1 が均衡から逸脱して，ビールを飲んだとき，プレイヤー 2 は信念によっては，決闘を申し込むことはありうる．

(2) プレイヤー 1 のタイプ W は，B を選んだときに，プレイヤー 2 が A のどの戦略を選んだとしても（利得は 0 か 2），一括均衡のシグナル Q を選んでいたときのほうが，利得が 3 で高くなる．タイプ W は，均衡では大好きなキッシュを食べて，決闘も申し込まれていないので，均衡から逸脱することはありえない．

(3) プレイヤー 2 が「B が選ばれたときに，それはタイプ S である」という信念を確率 1 とするならば，その最適反応戦略は N である．プレイヤー 2 が N を選ぶならば，タイプ H は，一括均衡のシグナル U を選ぶよりも，Q を選んだ（逸脱した）ほうが利得が高くなる．つまり，プレイヤー 2 は，タイプ W は B を選ばないため，B を選んだのはタイプ D であると確率 1 で考えて決闘を申し込まない．このため，プレイヤー 1 は B を選んだほうが良くなり，均衡から逸脱する．

.

演習 8.5 解説： まず，文太の最適反応戦略を p の値で場合分けする．文太が A を選んだときの期待利得は $15p - 5$，R を選んだときの期待利得は $-10p + 5$ なので，$p \geq 2/5$ なら A が，$p \leq 2/5$ ならば R が最適反応戦略となる．このとき

- アリスが戦略 TT を選んだとすると，整合的な信念は $p = 1/3$．$p \leq 2/5$ より文太は R が最適反応戦略．R に対してアリスの最適反応戦略は NN なので，完全ベイズ均衡ではない．
- アリスが戦略 TN を選んだとすると，整合的な信念は $p = 1$．このとき文太は A が最適反応戦略．A に対してアリスの最適反応戦略は TT なので，これは完全ベイズ均衡ではない
- アリスが戦略 NT を選んだとすると，整合的な信念は $p = 0$．このとき文太は R が最適反応戦略．R に対してアリスの最適反応戦略は NN なので，これは完全ベイズ均衡ではない．
- アリスが戦略 NN を選んだとすると，整合的な信念は何でも良い．このとき $p \geq 2/5$ とすると文太は A が最適反応戦略であるが A に対してアリスの最適反応戦略は TT なので，これは完全ベイズ均衡にならない．一方 $p \leq 2/5$ ならば文太は R が最適反応戦略である．R に対してアリスの最適反応戦略は NN なので，これは完全ベイズ均衡である．

したがって完全ベイズ均衡は，アリスが NN（タイプ A もタイプ B も N）を選び，文太が A を選び，信念は $0 \leq p \leq 2/5$ になる．混合戦略の完全ベイズ均衡は，以下のように考える．ま

ず，混合戦略における文太の整合的な信念をベイズの定理で求めると，

$$p = \frac{1/3}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x} = \frac{1}{1+2x} \tag{8.1}$$

となる．一方，文太が A を選ぶことと R を選ぶことが無差別になる信念は既に求めており，$p = 2/5$ である．この信念が整合的になるようなアリスの混合戦略は，(8.1) から

$$\frac{1}{1+2x} = 2/5$$

であり，これを解いて $x = 3/4$ である．（なお，文太が A を確率 y，R を確率 $1-y$ で選ぶならば，文太の期待利得は

$$y(15p-5) + (1-y)(-10p+5) = y \times 1 + (1-y) \times 1 = 1$$

となり，y によらず 1 となる．A と R が同じ利得になるならば，それを確率で選ぶ混合戦略も同じ期待利得となることに注意しよう．）このとき，タイプ D のアリスが T を選ぶと期待利得は

$$y \times 6 + (1-y) \times (-6) = 12y - 6$$

となり，これと N を選ぶ利得が等しくなるためには $12y - 6 = 0$ でなければならない．これより $y = 1/2$ となる．このときタイプ L のアリスの期待利得は

$$y \times 12 + (1-y) \times (-6) = 1/2 \times 12 + 1/2 \times (-6) = 3$$

である．アリスは N を選ぶことよりは T を選ぶことが良く，T を選ぶことは最適反応戦略になっている．一方，タイプ D のアリスの期待利得は N を選んでも T を選んでも同じ利得 0 であり（そのように y を決めた），このときは混合戦略を選んでも 0 である．ちなみに確かめると：

$$x \times (12y-6) + (1-x) \times 0 = x \times 0 + (1-x) \times 0 = 0$$

である．したがってタイプ D のアリスは $x = 3/4$ の混合戦略を選ぶことが最適反応戦略（タイプ D のアリスは何を選んでも最適反応戦略である）．文太の混合戦略 $y = 1/2$ も最適反応戦略であり（文太も何を選んでも最適反応戦略）．したがって，アリスは最適反応戦略を選び，それに整合的な文太の信念は $p = 2/5$ で，文太はそれに対する最適反応戦略を選んでいるので，完全ベイズ均衡であることが確かめられる．

第 9 章

演習 9.2 解説： ゲーム 1 ：$\epsilon-$ コアが満たす領域は，

$$\begin{array}{l} 3-\epsilon \le x_1 \le 18+\epsilon \quad 6-\epsilon \le x_2 \le 22+\epsilon \quad 4-\epsilon \le x_3 \le 16+\epsilon \\ x_1 + x_2 + x_3 = 36 \end{array} \tag{9.1}$$

と書くことができる．$\epsilon-$ コアが空にならないように ϵ をどこまで小さくできるか考えると，x_3 に関する制約が一番厳しく，ϵ を -6 より小さくすると，$x_3 \ge 4-\epsilon$ と $x_3 \le 16+\epsilon$ の制約が

交差し，$\epsilon-$ コアを満たす領域は空となってしまう．したがって $\epsilon = -6$ とすると，(9.1) から，$x_3 = 10$，$x_1 + x_2 = 26$ $9 \le x_1 \le 12$，$12 \le x_2 \le 16$ を得る．$x_1 + x_2 = 26$ と $12 \le x_2 \le 16$ から $10 \le x_1 \le 14$ となるので，これらを合わせて解答を得る．ゲーム２：このゲームはテキスト本文やゲーム１と同様には解くことができない．$\epsilon-$ コアが満たす領域は，

$$\begin{array}{l} -\epsilon \le x_1 \le 11 + \epsilon \quad -\epsilon \le x_2 \le 28 + \epsilon \quad -\epsilon \le x_3 \le 9 + \epsilon \\ x_1 + x_2 + x_3 = 36 \end{array} \tag{9.2}$$

と書くことができる．ここまでと同様に (9.2) で ϵ をどこまで小さくできるか考えると，x_3 に関する制約が一番厳しく，ϵ を -4.5 となる．そこで $\epsilon = -4.5$ とすると，(9.2) は，$x_3 = 4.5$，$x_1 + x_2 = 31.5$ $4.5 \le x_1 \le 6.5$，$4.5 \le x_2 \le 23.5$ を得る．しかし $x_1 + x_2 = 31.5$ と $4.5 \le x_2 \le 23.5$ から $8 \le x_1 \le 27$ となる．これらを合わせると，x_1 は $x_1 \le 6.5$ と $x_1 \ge 8$ を満たさなければならず，その領域は存在しない．これは $x_1 + x_3 \ge 8 - \epsilon$ と $x_1 \le 11 + \epsilon$ （$x_2 + x_3 \ge 25 - \epsilon$）の２つの制約式から，$x_3 \ge -3 - 2\epsilon$ でなければならないが，$\epsilon \le -3$ においては $-\epsilon \le -3 - 3\epsilon$ であるため

$$-\epsilon \le -3 - 3\epsilon \le x_3 \le 9 + \epsilon$$

となり，x_3 に関する制約が空にならないためには $-3 - 3\epsilon \le 9 + \epsilon$ でなければならないからである．したがって ϵ の最小値は $\epsilon = -4$ となり，このとき $x_1 + x_3 = 8 - \epsilon = 12$，$x_3 = 5$ が成立するため最小コアは１点となり，かつ仁と等しくなる．