静岡大学工学部　　数理システム工学科　　集中講義
社会システム工学　　第1回宿題

- 課題を解き、LMS システム LecShizu の小テストに入力してください。

課題 1.1

各飲料水メーカーは夏に向けて，新製品の発売を開始した．夏場はお茶の需要が伸びることもあり，各社は新製品の中でもお茶の販売に力を入れている．6 月になり，キリン日バレージ (KB) は「極烏」を，コカコーラ社（CC）は「七色亜茶」を発売した．

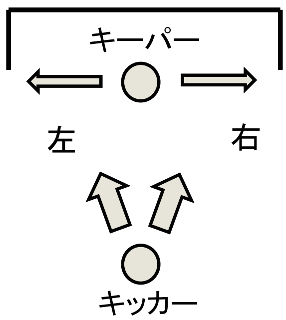
売り上げを伸ばすために，両社は新宿アルタ前および渋谷スクランブル交差点前の大型ハイビジョンで CM を流すことにした．ただし各社予算の関係上，どちらか 1ヶ所のみでしか CM は流すことはできない．新宿で宣伝を行った場合，飲料の売り上げは合計で 3,000 本増加し，渋谷で宣伝を行った場合は飲料の売り上げが合計で 2,400 本増加する．両社が異なる場所で宣伝を行った場合は増加した売り上げはすべて獲得できる．同じ場所で宣伝を行った場合は，増加した売り上げを 2 社が分け合うこととなるが，このとき KB が CC の 2 倍の売り上げとなる．両社はそれぞれどこで宣伝を実施すべきであるか．増加した売上本数を利得として考えよ．

図 1.1 の利得行列の a から g までに数値を埋め，利得行列を完成させよ．

KB \ CC	新宿	渋谷
新宿	（a , b）	（e , f）
渋谷	（c , d）	（g , h）

図 1.1: 飲料水メーカーの新製品広告

課題 1.2



サッカーの PK 戦の問題を考えよう（右図）．
キッカーは（自分から見て）ボールを右か左のどちらかに蹴るものとし，キーパーは（キッカーから見て）右か左に飛んでゴール阻止するとする．キッカーとキーパーが違う方向に飛べばゴールの成功率は高くなり，同じ方向に飛べば成功率は低くなる．キッカーは右に蹴る方が得意であり，右のほうが成功率が高い．

ここで

- キッカーが右に蹴ったとき，キーパーが左に飛べばゴールの成功率は 90%，キーパーが右に飛べば 50%である．
- キッカーが左に蹴ったとき，キーパーが右に飛べばゴールの成功率 60%，キーパーが左に飛べば 30%である．ゴールの成功率をキッカーの利得とし，失敗率（1 から成功率を引いた値）をキーパーの利得と考える．なお利得は小数で答えよ（80%⇒ 0.8，75%⇒ 0.25．ちなみにパーセントで利得を考えても問題は正しく解けるが，ここでは解答を統一するため）．

図 1.2 の利得行列の a から g までに数値を埋め，利得行列を完成させよ．

課題 1.3

図 1.3 の各ゲームについて，次の問いに答えなさい．

キッカー＼キーパー	右	左
右	（a，b）	（e，f）
左	（c，d）	（g，h）

図 1.2: PK 戦：右か？左か？

問題 1 ゲーム１の各プレイヤーに支配戦略はあるか．ある場合は (各プレイヤーごとに）その戦略を答え，ない場合は「なし」と答えよ．

問題 2 ゲーム２の各プレイヤーに支配戦略はあるか．ある場合は (各プレイヤーごとに）その戦略を答え，ない場合は「なし」と答えよ．

問題 3 次の文章のうち正しいものをすべて選べ．

(A) ゲーム１において，プレイヤー１の支配戦略は (D, R)

(B) ゲーム１において，支配戦略は (D, R)

(C) ゲーム１において，プレイヤー１の支配戦略は D

(D) ゲーム１において，ゲームの解は (D, R)

(E) ゲーム１において，プレイヤー１のゲームの解は D

(F) ゲーム１において，ゲームの解におけるプレイヤー１の戦略は D

ゲーム1

1＼2	L	R
U	(3 , 5)	(-1 , 6)
D	(4 , 0)	(3 , 5)

ゲーム2

1＼2	L	M	R
U	(6 , 1)	(2 , 2)	(1 , 3)
D	(5 , 0)	(-1 , 2)	(3 , 4)

図 1.3: 2 人ゲームの支配戦略

課題 1.4

以下の問題について，各プレイヤーの支配戦略を答えよ．なお，問１から問３までは支配戦略がない場合もある．その場合にはなしと答えよ．

問題 1 アリスと文太は，ショッピングに行く (戦略 S) か，座禅に行く（前略 Z) に行くかを同時に別々に決める．アリスは座禅に行くと利得 2，ショッピングに行くと利得 0 であり，文太と同じ戦略を選べばさらに利得が 1 増加する．文太は座禅に行くと利得 0，ショッピングに行くと利得 1 であり，アリスと同じ戦略を選ぶと利得が 2 増加する．

問題 2 アリスと文太は，ショッピングに行く (戦略 S) か，座禅に行く（前略 Z) に行くかを同時に宣言する．2 人の意見が一致すると，その場所へ 2 人で行くことになる．意見が異なると，アリスが行きたい場所へ 2 人で行くことになる．アリスは座禅に行くと利得 1，ショッピングに行くと利得 0．文太は座禅に行くと利得 0，ショッピングに行くと利得 1.（注：文太にとっては，アリスが何を選んでも，アリスの行きたい場所に行くことになるため，文

太にとって S も Z も同じ利得になる．支配戦略は，他の戦略より高い利得を与えなければならないので，他の戦略と同じ利得を与えるならば支配戦略とは言わない.）

問題 3 2 人のゲームで，各プレイヤーは 1 万円を出すか，出さないかを決める．どちらかがお金を出した場合は，各プレイヤーに 3 万円が配分される（1 人出しても，2 人出しても同じ 3 万円）．どちらもお金を出さない場合は，何も配分されない．各プレイヤーの利得は配分されたお金から，自分が出したお金を引いた金額とする．

問題 4 0 万円から 9 万円までのお金を 10 人で出し合う．各プレイヤーが出したお金の合計が 9 倍され，それが均等に 10 人に配分される．各プレイヤーの利得は配分されたお金から，自分が出したお金を引いた金額とする．

問題 5 上記において，各プレイヤーが出したお金の合計が 12 倍され，それが均等に 10 人に配分される場合はどうか．

問1

1 \ 2	L	R
U	(3 , 2)	(2 , 6)
D	(3 , 3)	(3 , 5)

問2

1 \ 2	L	M	R
U	(6 , 1)	(2 , 3)	(3 , 3)
D	(5 , 0)	(-1 , 2)	(1 , 4)

図 1.4: 2 人ゲームの弱支配戦略

課題 1.5

図 1.4 は 2 人ゲームの利得行列である．各ゲームの各プレイヤーに弱支配戦略はあるか．ある場合は (各プレイヤーごとに）その戦略を答え，ない場合は「なし」と答えよ．なお，支配戦略は弱支配戦略と考える．

課題 1.6

図 1.5 の利得行列におけるナッシュ均衡を求めよ．答は各プレイヤーの戦略をカッコに並べて答えなさい．

ゲーム1

1 \ 2	L	R
U	(1 , 4)	(2 , 3)
D	(0 , 2)	(3 , 0)

ゲーム2

1 \ 2	L	R
U	(2 , 4)	(4 , 3)
D	(1 , 2)	(5 , 5)

ゲーム3

1 \ 2	L	M	R
U	(6 , 1)	(0 , 1)	(-1, 0)
D	(5 , 1)	(1 , 0)	(0 , 1)

図 1.5: ナッシュ均衡を求める

課題 1.7

次のゲームにおいて，選択肢の中からナッシュ均衡となるものをすべて選びなさい．複数あるときは複数答えよ．選択肢の中に1つもナッシュ均衡がない場合は「なし」と答えよ．

問題1 2人でじゃんけんをする．利得は勝つと $+1$，負けると -1，あいこは0とする．

問題1の選択肢

(A) なし
(B) 2人ともにグーを出す
(C) 1人がグー，1人がパーを出す
(D) 1人がチョキ，1人がパーを出す

問題2 7人でじゃんけんをする．利得は勝つと $+1$，負けると -1，あいこは0とする．

問題2の選択肢

(A) なし
(B) 7人ともにグーを出す
(C) 3人がグー，4人がパーを出す
(D) 1人がグー，2人がパー，4人がチョキを出す
(E) 2人がグー，2人がパー，3人がチョキを出す
(F) 3人がグー，2人がパー，2人がチョキを出す

問題3 （多数が勝ち） 5人で「海」か「山」を選ぶ．多い人数が選んだ方を選ぶと勝ちで利得は $+1$，少ない人数が選んだ方を選ぶと負けで利得は -1．全員が同じものを選ぶと利得は0とする．

問題3の選択肢

(A) なし
(B) 全員が「海」を選ぶ
(C) 4人が「海」，1人が「山」を選ぶ
(D) 3人が「海」，2人が「山」を選ぶ
(E) 2人が「海」，3人が「山」を選ぶ
(F) 1人が「海」，4人が「山」を選ぶ
(G) 全員が「山」を選ぶ

問題4 （奇数人の少数決） 5人で「海」か「山」を選ぶ．少ない人数が選んだ方を選ぶと勝ちで利得は $+1$，多い人数が選んだ方を選ぶと負けで利得は -1．全員が同じものを選ぶと利得は0とする．

問題4の選択肢

(A) なし
(B) 全員が「海」を選ぶ
(C) 4人が「海」，1人が「山」を選ぶ
(D) 3人が「海」，2人が「山」を選ぶ
(E) 2人が「海」，3人が「山」を選ぶ
(F) 1人が「海」，4人が「山」を選ぶ
(G) 全員が「山」を選ぶ

問題 5　（偶数人の少数決）4 人で「海」か「山」を選ぶ．少ない人数が選んだ方を選ぶと勝ちで利得は $+1$，多い人数が選んだ方を選ぶと負けで利得は -1，選んだ人数が同じ場合と，全員が同じものを選んだときは，利得は 0 とする．

問題 5 の選択肢

(A)　なし
(B)　全員が「海」を選ぶ
(C)　3 人が「海」，1 人が「山」を選ぶ
(D)　2 人ずつ「海」と「山」を選ぶ
(E)　1 人が「海」，3 人が「山」を選ぶ
(F)　全員が「山」を選ぶ

静岡大学工学部　数理システム工学科　集中講義
社会システム工学　第2回宿題

- 課題を解き、LMS システム LecShizu の小テストに入力してください。

課題 2.1

図 2.1 の２つのゲームについて,

- ナッシュ均衡は混合戦略まで含めて何個あるか.
- ゲームのナッシュ均衡で，完全に混合戦略だけのナッシュ均衡 (すべてのプレイヤーが純粋戦略を確率１で選ぶことはないもの）で，プレイヤー１が U を選ぶ確率と，プレイヤー２が R を選ぶ確率 (L の確率ではなく R であることに注意）.

について求めよ.

ゲーム1

1 \ 2	L	R
U	(1 , 3)	(3 , 2)
D	(2 , 5)	(1 , 9)

ゲーム2

1 \ 2	L	R
U	(3 , 5)	(1 , 2)
D	(2 , 4)	(4 , 8)

図 2.1: 混合戦略のナッシュ均衡を求めよ

課題 2.2

図 2.2 のゲームについて，次の問いに答えよ.

問題 1 プレイヤー２が L を 1/3, R を 2/3 で選ぶとする．このとき，プレイヤー１が U を選んだときのプレイヤー１の期待利得は [a]，プレイヤー１が D を選んだときのプレイヤー１の期待利得は [b] である．プレイヤー１が U を 1/2, D を 1/2 で選んだとき（混合戦略）のプレイヤー１の期待利得は [c] である.

問題 2 このゲームには混合戦略のナッシュ均衡が１つだけある．そのナッシュ均衡では，プレイヤー１が U を $[d]/[e]$，プレイヤー２が L を $[f]/[g]$ で選ぶ.

問題 3 プレイヤー２がナッシュ均衡を選ぶとする．プレイヤー１が U を選んだときのプレイヤー１の期待利得は $[h]$，プレイヤー１が D を選んだときのプレイヤー１の期待利得は $[i]$ である．プレイヤー１がナッシュ均衡の戦略を選んだとき，プレイヤー１の期待利得は $[j]$ である.

1 \ 2	L	R
U	(0 , 6)	(6 , 2)
D	(6 , 0)	(0 , 8)

図 2.2: ナッシュ均衡は混合戦略のが１つ

課題 2.3

サッカーの PK 戦において，キッカーが右と左のどちらにボールを蹴るべきか，キーパーが右と左のどちらに飛ぶべきか，という問題を考える．ここで右と左は，共にキッカーから見た方向を指している．

このキッカーは右に蹴るほうが得意であるとし，キッカーがどちらに蹴っても，キッカーとキーパーの異なる方向を選ぶ方が，同じ方向を選ぶよりゴールの成功率は高いとする．

ここで

- キッカーが右，キーパーも右を選ぶと，PK の成功率は 0.6
- キッカーが右，キーパーが左を選ぶと，PK の成功率は 0.8
- キッカーが左，キーパーも左を選ぶと，PK の成功率は 0.4
- キッカーが左，キーパーが右を選ぶと，PK の成功率は 0.7

とする．キッカーの利得を PK の成功率，キーパーの利得は PK の失敗率（1 から成功率を引いたもの）とするとき，混合戦略のナッシュ均衡を求めなさい．

課題 2.4

カニとネコがじゃんけんをする．カニはチョキとグーのどちらかを出し，ネコはパーとグーのどちらかを出す．互いにグーを出すとあいこで利得が 0．チョキとグーだとグーの勝ち，パーとグーだとパーの勝ち，チョキとパーだとチョキの勝ち（普通のじゃんけんと同じ）．勝ったほうの利得が 1，負けたほうの利得が -1 である．

問題 1 このゲームのナッシュ均衡では，カニがグーを [ ]/[ ] で選択し，ネコがパーを [ ]/[ ] で選択する．

問題 2 ナッシュ均衡でのカニの期待利得は [ ]/[ ]，ネコの期待利得は [ ]/[ ] である．負の数になる場合は，分子にマイナスをつけて答えよ．

問題 3 カニの勝つ確率は [ ]/[ ] である．

課題 2.5

ゲーム理論では，一般に以下のことが成立することが知られている．

> 強く支配された戦略（支配された戦略で弱支配ではない）は，混合戦略のナッシュ均衡でもその戦略に確率が割り当てられることはなく，常にその戦略は確率 0 で選択される．したがって，強く支配される戦略があるときにゲームの解を求めるには，その戦略を除いて混合戦略のナッシュ均衡を求めればよい．

このことを用いて，**図 2.3** の 3 人戦略形ゲームにおける混合戦略のナッシュ均衡を求めたい．次の問いに答えよ．

問題 1 各プレイヤーに対して，強く支配された戦略があるかどうか調べよ．

問題 2 以下のヒントを参考にして，混合戦略のナッシュ均衡を求めよ．

> **ヒント** 問 1 を考慮した結果，プレイヤーが選ぶ戦略が 1 つに絞られるとき（支配戦略があるとき）は，そのプレイヤーを考慮しなくても良いので，そのプレイヤーを除いて考えてよい．また 1 つに絞られなくても，支配された戦略があるときは，それを除いて考えてよい．

3	x_3		y_3	
1 \ 2	x_2	y_2	x_2	y_2
x_1	(3 , 2 ,-1)	(2 , 1 , 1)	(1 , 0 , 0)	(-2 ,-1 , 2)
y_1	(4 , 3 ,-3)	(4 , 2 , 1)	(2 , 0 , 0)	(0 , 1 , 3)
z_1	(2 , 4 ,-1)	(5 , 3 , 1)	(0 , 4 , 0)	(3 , 0 , 2)

図 2.3: 混合戦略のナッシュ均衡を求めよ

静岡大学工学部　数理システム工学科　集中講義
社会システム工学　第3回宿題

- 課題を解き、LMS システム LecShizu の小テストに入力してください。

課題 3.1

図 3.1 について，バックワードインダクションを用いてゲームの解を求めなさい．図において，利得は左から順にプレイヤー 1,2,3 を表し，点の v_{ij} はプレイヤー i の j 番目の意思決定点を表している．各点の上にある数は，意思決定するプレイヤーを表す（したがって v_{ij} の i と一致しているはずである）.

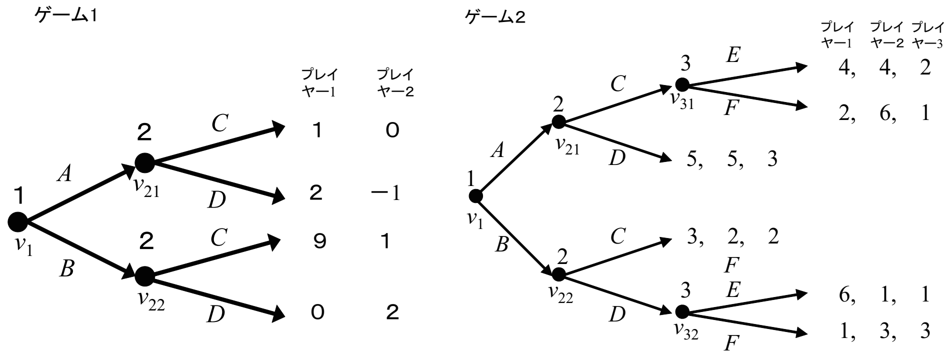


図 3.1: ゲームの解を求める

課題 3.2

展開形ゲームにおいて「プレイヤーが何を知っていなければならないか」について考えてみる．まず解説を読んだ後で，その後の問題について答えよ.

図 3.2 における先手（プレイヤー 1）と後手（プレイヤー 2）を考える，利得は左が先手，右が後手である.

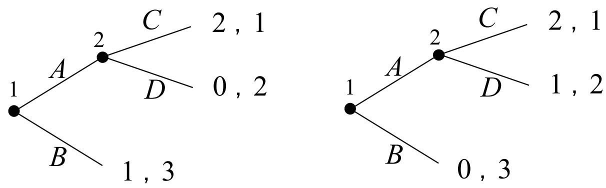


図 3.2: 2 つの展開形ゲーム

後手は，自分の選択だけで自分の利得が決まるので，左右のどちらのゲームでも，先手の選択に関係なく C と D のどちらが良いかを決定できる．つまり**後手は，先手の利得を知らなくても，常に自分にとって良い選択を決められる**ことが分かる.

これに対して，左のゲームで先手は,

- 後手が C を選べば B より A を選ぶほうが良い
- 後手が D を選べば A より B を選ぶほうが良い

ので，後手が何を選ぶかによって自分の良い選択が異なる．もし先手が (1) 後手の利得を知っていて，かつ (2) 後手が利得が高くなる方を選ぶ合理的なプレイヤーだと知っていたら，後手は D を選ぶことが先読みできるので,「自分は A より B を選ぶほうが良い」と結論できる．このことから**左の**

ゲームでは先手は少なくとも後手の利得が分からなければ自分にとって良い選択は決められないことがわかる．またたとえ後手の利得が分かっても，後手が利得の低い方を選ぶようなクレイジーな奴だと思えば，自分の選択は決まらない．

これに対して右のゲームで先手は,

- 後手が C を選んでも D を選んでも，B より A を選ぶほうが良い

ので，後手が何を選んでも自分の良い選択を決定できる．つまり**右のゲームでは先手は後手の利得が分からなくても自分にとって良い選択を決められる**．たとえ後手が利得の低い方を選ぶクレイジーな奴でも自分の選択を決められる．

上記を参考に以下の問いに答えよ．

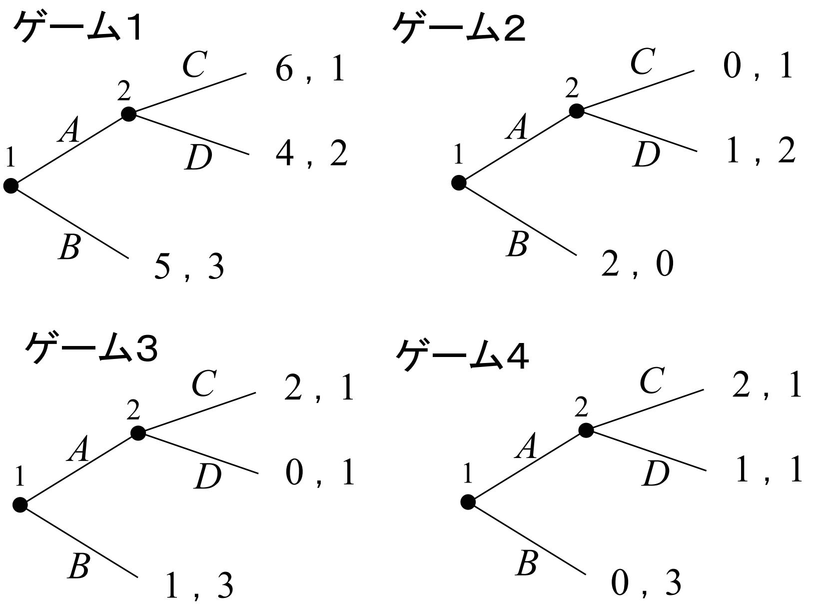


図 3.3: 先手は，後手の選択が分からなくても，最適な選択が可能か？

問題 1 **図 3.3** のゲーム１において，先手と後手は相手の利得を知らなければ自分の選択ができないかどうかについて答えよ．

問題 2 **図 3.3** のゲーム２において，先手と後手は相手の利得を知らなければ自分の選択ができないかどうかについて答えよ．

問題 3 **図 3.3** のゲーム３とゲーム４において，後手は C を選んでも D を選んでも利得が同じである．したがって先手は後手の利得が分かったとしても，後手が C を選ぶか D を選ぶかは分からない．しかし，どちらかのゲームは（後手の選択が決まらなくても）先手は選択を決定できる．それはどちらであるか，答えよ．

課題 3.3

図 3.4 は，× と ◯ の三目並べの途中経過（7 手目）である．

この三目並べは × が先手で，◯ が後手であり，先手は × を．後手は ◯ を交互に記入して行き，タテ・ヨコ・ナナメに × が 3 つ並ぶと先手の勝ち，◯ が 3 つならぶと後手の勝ちでゲームが終了する．9 マス埋まった時点で，どちらも並ばないと引き分けである．利得は勝つと 1，負けると -1，引き分けは 0 である．

図 3.4 は次に × がプレイし，次に ◯ が，次に × がプレイする．記入する場所は A，B，C のどれかである．

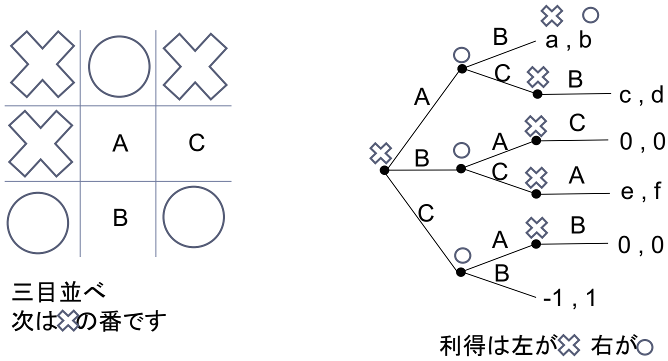


図 3.4: ゲームの解を求める

問題 1 図 3.4 の右側にあるゲームの木に a から f の利得を埋めて完成させなさい．

問題 2 この後のゲームの結果はどうなるか，バックワードインダクションで求めよ．複数あるときは，すべて答えよ．

課題 3.4

次のゲーム１，２，３を表す展開形ゲームはどれか，**図 3.5** のゲーム A からゲーム D の中から，当てはまるものを**すべて**選びなさい．

ゲーム１ プレイヤー１が A か B を選び，プレイヤー２はそれを知って C か D を選ぶ．

ゲーム２ プレイヤー１が A か B を選び，プレイヤー２はそれを知らないで，C か D を選ぶ.（引っかかりやすいので注意しましょう，プレイヤー１が先に選ぶとは言っていません）.）

ゲーム３ プレイヤー１は A か B を，プレイヤー２は C か D を同時に選ぶ．

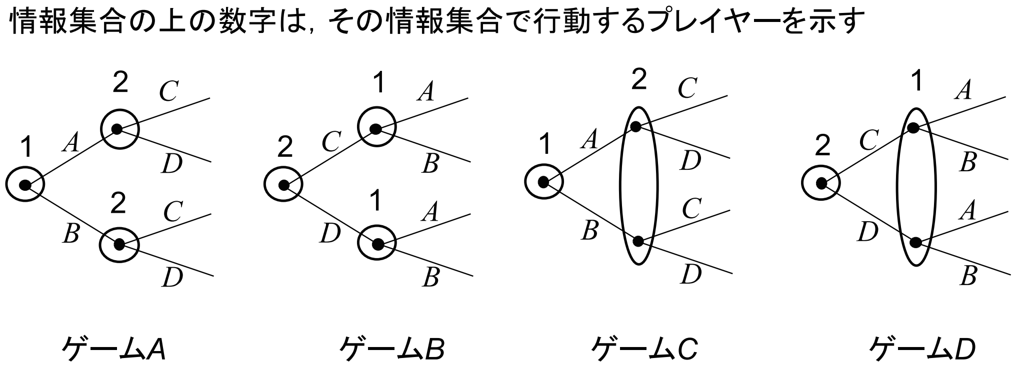


図 3.5: ４つの展開形ゲーム

課題 3.5

図 3.6 の２つの展開形ゲームを，戦略形ゲームに変換すると，**図 3.7** のような利得行列になる．このとき，空欄の a から h までの利得を答えよ．

課題 3.6

図 3.8 のゲーム１とゲーム２は，上が展開形ゲームで，下はそれを戦略形ゲームに変換したものである．アルファベットに当てはまる利得を答えなさい．なお，戦略形ゲームのプレイヤー i の戦略は，h_{ij} で選ぶ行動を j が小さい順番に（かっこをつけず）並べて表しており，例えばゲーム１の

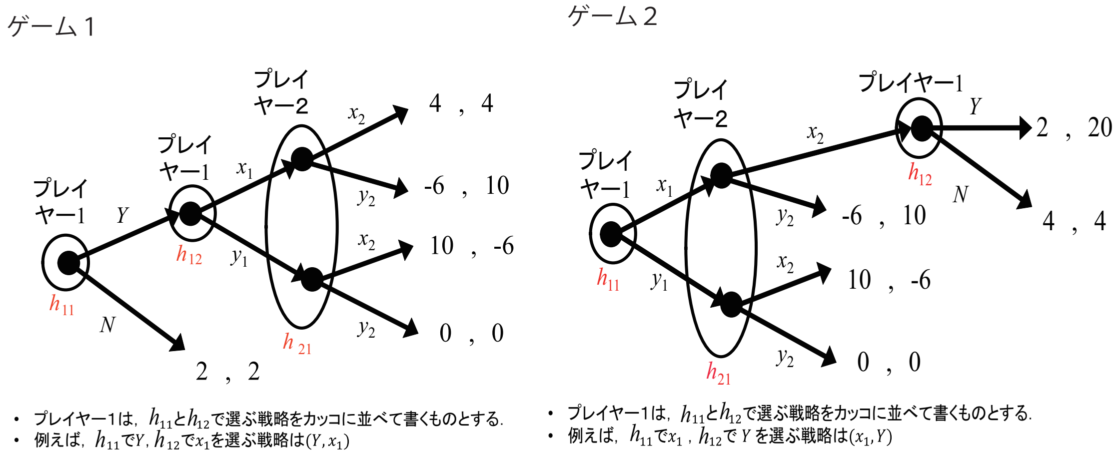


図 3.6: 展開形ゲーム

ゲーム１

1 \ 2	x_2	y_2
(Y, x_1)	(a , b)	(c , d)
(Y, y_1)	(10 , -6)	(e , f)
(N, x_1)	(g , h)	(2 , 2)
(N, y_1)	(2 , 2)	(2 , 2)

ゲーム２

1 \ 2	x_2	y_2
(x_1, Y)	(2 , 20)	(-6 , 10)
(x_1, N)	(a , b)	(c , d)
(y_1, Y)	(e , f)	(g , h)
(y_1, N)	(10 , -6)	(0 , 0)

図 3.7: 戦略形ゲーム

AL は h_{21} で A，h_{22} で L を選ぶことを表している．ゲーム１ではプレイヤー２からゲームが始まることに気をつけなさい．

課題 3.7

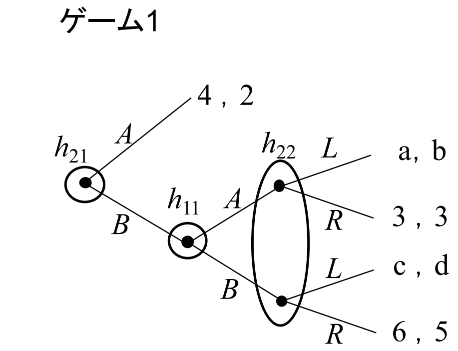
図 3.9 に示されている４つの展開形ゲームについて，それぞれナッシュ均衡と部分ゲーム完全均衡を求めよ．ただし，ここで情報集合 h_{ij} はプレイヤー i の j 番目の情報集合を表しており，利得は左にプレイヤー 1，右にプレイヤー 2 の利得が与えられている．

解答はゲーム１－ゲーム３は**表 3.1** から，ゲーム４は**表 3.2** から，当てはまるものを，すべて選びなさい．

選択肢		(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)	(H)
プレイヤー 1	h_{11}	Y	Y	Y	Y	N	N	N	N
	h_{12}	A	A	B	B	A	A	B	B
プレイヤー 2	h_{21}	C	D	C	D	C	D	C	D

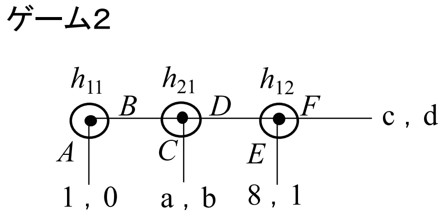
表 3.1: ゲーム１－ゲーム３の選択肢

問題は次ページに続く



利得は左がプレイヤー1，右がプレイヤー2
最初にプレイヤー2から始まることに注意

1 \ 2	AL	AR	BL	BR
A	(4,2)	(4,2)	(5,6)	(e,f)
B	(4,2)	(g,h)	(2,4)	(6,5)



1 \ 2	C	D
AE	(1,0)	(1,0)
AF	(1,0)	(e,f)
BE	(g,h)	(i,j)
BF	(0,2)	(7,4)

図 3.8: 展開形ゲームと戦略形ゲーム

選択肢		(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)
プレイヤー１	h_1	N	N	A	A	B	B
プレイヤー２	h_2	C	D	C	D	C	D

表 3.2: ゲーム４の選択肢

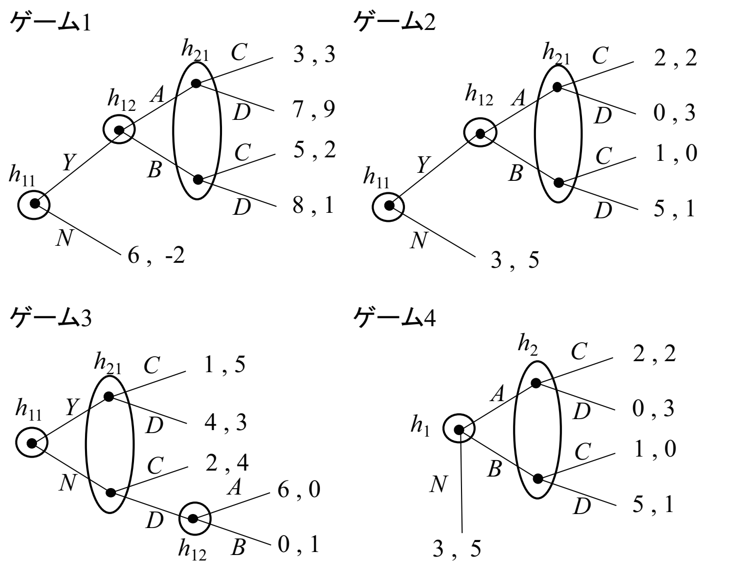


図 3.9: 部分ゲーム完全均衡を求めよ

課題 3.8

図 3.10 の２つの展開形ゲームについて，次の問いに答えよ．ここで情報集合 h_{ij} はプレイヤー i の j 番目の情報集合を表しており，利得は左がプレイヤー１，右がプレイヤー２を表している．選択肢では，プレイヤーが選ぶ行動を，プレイヤー順にカンマで区切って並べ，各プレイヤーでは情報集合の番号順に並べている．
例えばゲーム１の選択肢の場合，(A, CE) はプレイヤー１が A を選び，プレイヤー２が h_{21} で C を h_{22} で E を選ぶことを表している．

問題 1 ゲーム１のナッシュ均衡を選択肢から**すべて**選びなさい．

問題 2 ゲーム１の部分ゲーム完全均衡を選択肢から**すべて**選びなさい．

問題 3 ゲーム２のナッシュ均衡を選択肢から**すべて**選びなさい．

問題 4 ゲーム２の部分ゲーム完全均衡を選択肢から**すべて**選びなさい．

ゲーム２の選択肢はすべての戦略の組が列挙されているわけではない．この選択肢以外にもナッシュ均衡や部分ゲーム完全均衡が存在する可能性がある．選択肢の中だけ当てはまるものを注意して選んでください．

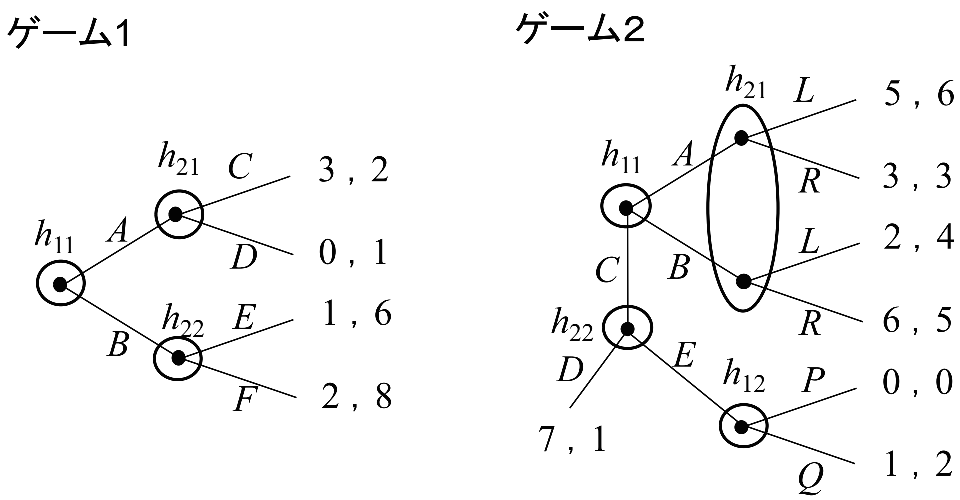


図 3.10: ナッシュ均衡と部分ゲーム完全均衡を求めよ

問題１，問題２の選択肢（ゲーム１）

$A.$ (A, CE) $B.$ (A, CF) $C.$ (A, DE) $D.$ (A, DF)
$E.$ (B, CE) $F.$ (B, CF) $G.$ (B, DE) $H.$ (B, DF)

問題３，問題４の選択肢（ゲーム２）

$A.$ (AP, LD) $B.$ (AP, LE) $C.$ (AQ, LD) $D.$ (AQ, LE) $E.$ (BQ, RD)
$F.$ (BQ, RE) $G.$ (CP, LD) $H.$ (CP, LE) $I.$ (CQ, RD) $J.$ (CQ, RE)

課題 3.9

次の２つのゲームの部分ゲーム完全均衡を求めよ．ただし混合戦略は考えない．ゲーム１は部分ゲーム完全均衡をすべて求め，ゲーム２では，部分ゲーム完全均衡として当てはまるものを選択肢の中からすべて選びなさい（すべての戦略の組や部分ゲーム完全均衡が選択肢に列挙されているとは限らない）．

ゲーム１： プレイヤー 1 が N を選ぶとゲームは終わり，4 万円を半分ずつ分ける．Y を選ぶと 6 万円を交渉で取り合う．具体的には以下のようなゲームになる．

第 1 段階： プレイヤー 1 は Y か N を選ぶ.

- N を選ぶとゲームは終わり，2 人の利得は 2
- Y を選ぶと第 2 段階のゲームに入る

第 2 段階： プレイヤー 1 とプレイヤー 2 が，同時に C(妥協) か D 強硬）を選ぶ.

- 両プレイヤーが C を選ぶと 2 人の利得は 3
- 一方が C，もう一方が D を選ぶと，C を選んだ方の利得は 1，D を選んだ方の利得は 5
- 両プレイヤーが D を選ぶと 2 人の利得は 0

プレイヤー 1 の戦略は，第 1 段階と第 2 段階で選ぶものを続けて書くことにする．例えば YC は第 1 段階で Y，第 2 段階で C を選ぶことを表す．また戦略の組は，プレイヤー 1，プレイヤー 2 の順に並べて書く．例えば (YC, D) はプレイヤー 1 が YC をプレイヤー 2 が D を選んでいることを表す.

ゲーム１の選択肢

$A.$ (NC, C) $B.$ (NC, D) $C.$ (ND, C) $D.$ (ND, D)
$E.$ (YC, C) $F.$ (YC, D) $G.$ (YD, C) $H.$ (YD, D)

ゲーム２： プレイヤー 1 と 2 の２段階のゲーム

第 1 段階： プレイヤー 1 と 2 は同時に A か B を選ぶ．2 人が同じものを選ぶとゲームが続き，異なるものを選ぶとゲームは終わる.

- 一方が A，もう一方が B を選ぶと 2 人の利得は 3 でゲームは終わり.
- 両プレイヤーが A を選ぶと第 2 段階 (A) のゲームに入る.
- 両プレイヤーが B を選ぶと第 2 段階 (B) のゲームに入る.

第 2 段階 (A)： プレイヤー 1 とプレイヤー 2 が，同時に C か D を選ぶ.

- 両プレイヤーが C を選ぶと 2 人の利得は 3
- 一方が C，もう一方が D を選ぶと，C を選んだ方の利得は 1，D を選んだ方の利得は 5
- 両プレイヤーが D を選ぶと 2 人の利得は 2

第 2 段階 (B)： プレイヤー 1 とプレイヤー 2 が，同時に E か F を選ぶ.

- 両プレイヤーが E を選ぶと 2 人の利得は 3
- 一方が E，もう一方が F を選ぶと，E を選んだ方の利得は 1，F を選んだ方の利得は 5
- 両プレイヤーが F を選ぶと 2 人の利得は 0

ここでプレイヤーの戦略は，第１段階，第２段階 (A)，第２段階 (B) で選ぶものを順番に書くことにする．例えば ACE は第１段階で A，第２段階 (A) で C, 第２段階 (B) で E をを選ぶことを表す．戦略の組は，プレイヤー１，プレイヤー２の順に並べて書く．例えば (ACE, BDF) はプレイヤー１が ACE をプレイヤー２が BDF を選んでいることを表す.

ゲーム２の選択肢

$A.$ (ACE, ACE)	$B.$ (ADE, BDF)	$C.$ (ADF, ADE)	$D.$ (ADF, ADF)
$E.$ (ACF, BDF)	$F.$ (BCE, ACE)	$G.$ (BDE, BDF)	$H.$ (BDF, ADE)
$I.$ (BDF, ADF)	$J.$ (BCF, BCF)		

静岡大学工学部　　数理システム工学科　　集中講義
社会システム工学　　第 4 回宿題

- 課題を解き、LMS システム LecShizu の小テストに入力してください。

課題 4.1
図 4.1 のゲームの部分ゲーム完全均衡を考える．ここで情報集合 h_{ij} はプレイヤー i の j 番目の情報集合を表しており，利得は左にプレイヤー 1，右にプレイヤー 2 の利得が与えられている．

問題 1 このゲームの純粋戦略の部分ゲーム完全均衡を，選択肢からすべて選べ．ここでは戦略をプレイヤー 1，2 の順にカッコに並べて，プレイヤー 1 の戦略では（カッコをつけず），左が h_{11}，右が h_{12} での選択を表すものとする．例えば (YC, D) は，プレイヤー 1 が h_{11} で Y，h_{12} で C, プレイヤー 2 が h_{21} で D を選択していることを表す．

(A) (YC, C) (B) (YC, D) (C) (YD, C) (D) (YD, D)
(E) (NC, C) (F) (NC, D) (G) (ND, C) (H) (ND, D)

問題 2 このゲームにおいて，h_{11} 以下の部分ゲームには混合戦略を用いたナッシュ均衡もある．その部分ゲームの混合戦略ナッシュ均衡を答えよ．

問題 3 その混合戦略を用いた部分ゲーム完全均衡では，プレイヤー 1 は h_{11} で Y と N のどちらを選ぶか．

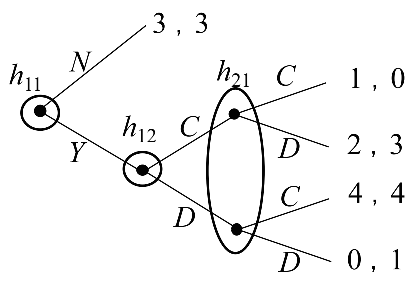


図 4.1: 部分ゲーム完全均衡を求めよ

課題 4.2
「賭博黙示録カイジ（福岡伸行著）」の 8 巻と 9 巻に出てくる E カードについて分析する（ざわ …）．渡辺ゼミ 2019 年夏合宿の学生発表に基づいている[1)]
これは皇帝（プレイヤー 1）と奴隷（プレイヤー 2）の以下のようなゲームである．

- プレイヤー 1 は，市民カード（C：Citizen)4 枚と皇帝カード（E：Emperor)1 枚を持つ．
- プレイヤー 2 は，市民カード（C：Citizen)4 枚と奴隷カード（S：Slave)1 枚を持つ．
- プレイヤーは，１つのゲームで，プレイヤーは毎回カードを 1 枚ずつ同時に出して行く．全部で 5 回の勝負がある．
- 基本的には，皇帝カードは市民カードに勝ち，市民カードは奴隷カードに勝ち，奴隷カードは皇帝カードに勝つ．市民カードどうしは引き分けると考える．

1) Thanks to Hiroki, Mari, Ryousuke and Kurumi.

- プレイヤー１が皇帝カードを出した時に，プレイヤー２が奴隷カードを出すことができれば，そのときのみプレイヤー２がゲームに勝ち（皇帝を刺す）．それ以外は，プレイヤー１がゲームに勝つ．

このルールより

- プレイヤー１が皇帝カードを出した時に，プレイヤー２が市民カードを出してしまうと，その時点でプレイヤー１の勝ちが確定する．
- また，プレイヤー２が奴隷カードを出したときにプレイヤー１が市民カードを出すと，やはりプレイヤー１の勝ちが確定する．

したがって，ここでは皇帝カードか奴隷カードが出た時点でゲームは終わると考える（コミックでは，一応，５回ともゲームはする）．
ここでゲームに勝つと利得が $+1$，負けると -1 とする．このゲームはプレイヤー１（皇帝）が絶対的に有利なゲームであるが，その勝つ確率と期待利得を計算したい．そこで市民カードを n 枚であるとし $n = 1, 2, \ldots$ と増やして考える．市民カードが n 枚のときのゲームを G_n，そのときの，プレイヤー１の期待利得を v_n，プレイヤー１が勝つ確率を w_n を計算する．

市民カード１枚のとき

- プレイヤー１は，市民カード（C：Citizen)1 枚と皇帝カード（E：Emperor)1 枚，
- プレイヤー２は，市民カード（C：Citizen)1 枚と奴隷カード（S：Slave)1 枚

を持っている２回のゲームとして，ゲームを分析する．
１回目の勝負において

- (E, C)（プレイヤー１が E，プレイヤー２が C を出す）だと，プレイヤー１が勝つ．
- (C, S)（プレイヤー１が C，プレイヤー２が S を出す）でも，プレイヤー１が勝つ．
- (E, S)（プレイヤー１が C，プレイヤー２が S を出す）だと，プレイヤー２が勝つ．
- (C, C)（プレイヤー１も２も C を出す）だと，プレイヤー２の勝ちが確定する（２回目にプレイヤー２が勝つ）．

このことから市民カード１枚のときのゲーム G_1 は図 4.2 のようになる．

1 ＼ 2	S	C
E	(-1,1)	(1,-1)
C	(1,-1)	(-1,1)

図 4.2: ゲーム G_1

このゲームには純粋戦略のナッシュ均衡はない．混合戦略のナッシュ均衡は「プレイヤー１が E と C を 1/2 ずつ，プレイヤー２が E と C を 1/2 ずつ選ぶ」というもので，プレイヤー１の期待利得は $v_1 = 0$，プレイヤー１が勝つ確率 $w_1 = 1/2$ であることが分かる（混合戦略の求め方は，先週の宿題などを参考にせよ，ただしこの場合は直観的にも明らかか）．

もし市民カードが１枚なら，ゲームは五分五分…（ざわ ⋯ ）

市民カード 2 枚のとき

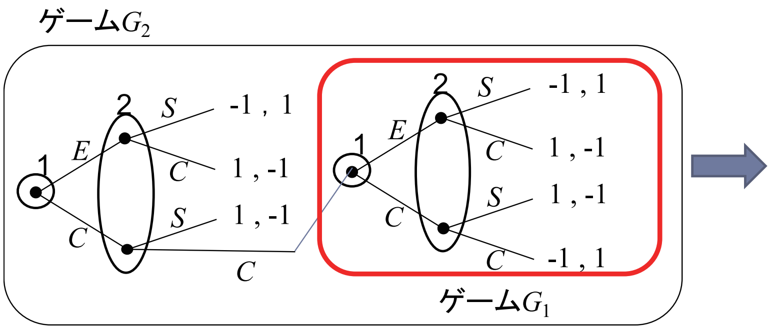
次に

- プレイヤー 1 は，市民カード（C：Citizen)2 枚と皇帝カード（E:Emperor)1 枚，
- プレイヤー 2 は，市民カード（C：Citizen)2 枚と奴隷カード（S:Slave)1 枚

を持っている 3 回のゲーム G_2 を分析する．
1 回目の勝負において

- (E, C)（プレイヤー 1 が E，プレイヤー 2 が C を出す）だと，プレイヤー 1 が勝つ．
- (C, S)（プレイヤー 1 が C，プレイヤー 2 が S を出す）でも，プレイヤー 1 が勝つ．
- (E, S)（プレイヤー 1 が C，プレイヤー 2 が S を出す）だと，プレイヤー 2 が勝つ．
- (C, C)（プレイヤー 1 も 2 も C を出す）だと引き分け，次のゲームに．このとき次のゲームは G_1 になる．

市民カード 2 枚のときのゲーム G_2 は図 4.3 のようになる．



1＼2	S	C
E	(-1,1)	(1,-1)
C	(1,-1)	(0,0)

図 4.3: ゲーム G_2

ここで部分ゲーム完全均衡を考える．(C, C) が起きて引き分けたときは，ゲーム G_1 における期待利得 $(0, 0)$ が入ると考えて，1 回目のゲームを解けば良い（図 4.3 の右図）．
これを解くと，プレイヤー 1 は E を 1/3，C を 2/3 で選び，プレイヤー 2 は S を 1/3，C を 2/3 で選ぶ，となる（混合戦略の求め方は，先週の宿題などを参考にせよ）.
プレイヤー 1 の期待利得 v_2 を求めると

$$v_2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times (-1) + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times v_1$$

となる．$v_1 = 0$ からプレイヤー 1 の期待利得 $v_2 = \frac{1}{3}$ である．またこのゲームはゼロ和ゲームなので，プレイヤーの期待利得は $-v_2 = -\frac{1}{3}$ となる．
プレイヤー 1 の勝つ確率は，

$$(E, C) \text{ が起きる確率} + (C, S) \text{ が起きる確率} + (C, C) \text{ が起きる確率} \times G_1 \text{でプレイヤー − 1 が勝つ確率}$$

であり，

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times w_1$$

となり $w_2 = 2/3$ となる．

市民カードが 3 枚のとき

市民カードが 3 枚のときを宿題とする．次の問いに答えよ．

問 1 部分ゲーム完全均衡において，プレイヤー 1 とプレイヤー 2 の 1 回目の混合戦略を求めよ．

問 2 このときプレイヤー 1 の期待利得 v_3，勝つ確率 w_3 を計算せよ．

興味があれば，オリジナルのゲーム**市民カードが 4 枚のとき**を計算してみよ（宿題ではない）．

課題 4.3
マカヌハニーは，女王島原産の貴重な蜂蜜で稀にしか入手できないが，一ノ瀬アリス（プレイヤー 1）は仕入れのルートを持っている．二子山文太（プレイヤー 2）は，この蜂蜜をアリスから売ってもらうことになった．マカヌハニーには良品と粗悪品があり，良品と粗悪品の確率は p と $1-p$ であり，アリスも文太もそれを知っている．文太は，良品に対しては（価格に換算して）24 の価値を持っており，粗悪品には 4 の価値しか持っていない．
アリスは，ハニーが手に入ったと養蜂家から連絡が入ると買い付けに行き，そこで良品か不良品かが分かる．アリスは仕入れないか，商品を価格 8 で仕入れて文太に価格 16 で売る（良品と粗悪品で仕入れ値は変わらない）．
一方，文太はアリスからハニーを買うまで良品か粗悪品かは分からない．アリスは粗悪品だと分かれば仕入れない選択もできるが，粗悪品を仕入れて文太に売りつけてしまい儲かる可能性もある．また，文太が粗悪品を恐れて仕入れたアリスから蜂蜜を買わないならば，アリスは損をするので，良品であっても仕入れないかもしれない．
この問題（逆選抜:adverse selection）について，以下のようなゲームで考察してみよう．

第 1 段階 アリスは品物が良品か，粗悪品かが分かる．

第 2 段階 アリスは価格 8 で仕入れて文太に売る (Y) か，仕入れないか (N) を決める．N を選ぶとアリスと文太の利得は 0 でゲームは終わる．Y だと第 3 段階に移る．

第 3 段階 文太は，アリスが売りに出しているときは，アリスが良品を仕入れて売ったのか，粗悪品を仕入れて売っているのかは分からず，価格 16 で買う (Y) か，買わないか (N) を決める．もし Y を選んだ場合，アリスの利得は 8，文太の利得は良品なら 8，粗悪品なら -12 とする．一方，N を選んだ場合，アリスの利得は -8，文太の利得は 0 とする．

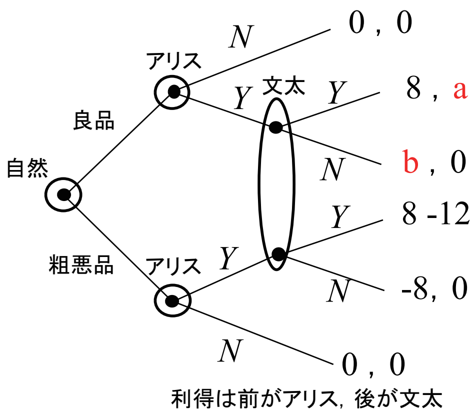
次の問いに答えよ．この問題は部分ゲームはないので，ナッシュ均衡が答になる．

問題 1 $p = 3/4$ のときを考える．**図 4.4** は，このゲームを展開形ゲームで表したものと，それを戦略形ゲームに変換したものである．a から h に当てはまる数値を答えよ．ここで戦略形ゲームのアリス 1 の戦略は，良品を仕入れたとき，粗悪品を仕入れたときの行動を並べて書くものとする．例えば YN は，良品ならば仕入れて売り，不良品ならば仕入れないことを表す．

問題 2 このゲームの結果（ナッシュ均衡）を求めよ．

問題 3 p がいくつ以上であれば「アリスは良品でも粗悪品でも仕入れて，文太はそれを買う」という結果がナッシュ均衡になるか？

課題 4.4
2 人のプレイヤーの戦略形ゲームにおいて，プレイヤー 1 にはタイプ A, タイプ B の 2 つのタイプがあるような不完備情報ゲームを考える．**図 4.5** は，この 2 つのタイプに対応する利得行列である．プレイヤー 1 は自分のタイプを知っているが，プレイヤー 2 は相手のタイプが分からず，タイプ A



アリス \ 文太	Y	N
YY	(c, d)	(-8,g)
YN	(e, 6)	(h,0)
NY	(2, f)	(-2,0)
NN	(0, 0)	(0,0)

図 4.4: 逆選抜

プレイヤー１がタイプ A のとき

1 \ 2	L	R
U	(0 , 9)	(4 ,12)
D	(3 ,12)	(1 , 0)

プレイヤー１がタイプ B のとき

1 \ 2	L	R
U	(3 , 9)	(0 ,12)
D	(1 , 3)	(2 , 0)

図 4.5: 各タイプに対応する利得行列

である確率を $\frac{1}{3}$, タイプ B である確率を $\frac{2}{3}$ で推測しているとする．このゲームのベイズナッシュ均衡を求めよ（混合戦略は考えない）.

課題 4.5

双子酒場放浪記は，BS-TBS で毎週水曜の夜に放映されている中高年に密かな人気の 15 分番組である．この番組は，毎週，マナとカナという双子のどちらかが 1 人が出演し，日本全国のどこかの居酒屋を訪問し，その居酒屋の肴を堪能して，酒を飲むという番組である．マナとカナは，とてもよく似ていて見分けがつかないが，視聴者には，番組が終わるまでどちらであるかが知らされていない．最後，居酒屋を出た時に「マナでした」「カナでした」と正体が明かされ，視聴者は「マナだったのか」「カナだったのか！」と分かることになっている．

これまでの放映では，マナの方が出演回数が多く，しかもマナは居酒屋に入った「最初の一杯」に熱燗を頼む傾向にある．過去 30 回の放映を調べると，以下のようになっていた．

- 出演者がマナで，最初に熱燗を頼む：18 回
- 出演者がマナで，最初に熱燗以外を頼む：6 回
- 出演者がカナで，最初に熱燗を頼む：4 回
- 出演者がカナで，最初に熱燗以外を頼む：2 回

ここで事象を以下の記号で表す.

- M : 出演者がマナである
- M^c : 出演者がカナである

- A：最初に熱燗を頼む
- A^c：最初に熱燗以外を頼む

過去 30 回の頻度を確率であると考え，次の確率を求めよ．

問題 1 出演者がマナである確率 $P(M)$

問題 2 出演者がマナであり，かつ最初に熱燗を頼む確率 $P(M \cap A)$

問題 3 出演者がカナであり，かつ最初に熱燗を頼む確率 $P(M^c \cap A)$

問題 4 最初に熱燗を頼んだとき，それがマナである確率 $P(M|A)$

問題 5 最初に熱燗以外を頼んだとき，それがマナである確率 $P(M|A^c)$

静岡大学工学部　数理システム工学科　集中講義
社会システム工学　第5回宿題

- 課題を解き、LMS システム LecShizu の小テストに入力してください。

課題 5.1

図 5.1 に示されているゲーム 1 とゲーム 2 は以下のようなゲームである。

- 最初に自然がプレイヤー 1 のタイプを H か L か決める。
- プレイヤー 1 は自分のタイプを知った上で、N か G を選ぶ。
- N を選んだらゲームは終わり、G を選んだらプレイヤー 2 はプレイヤー 1 のタイプを知らずに A か R を選ぶ。

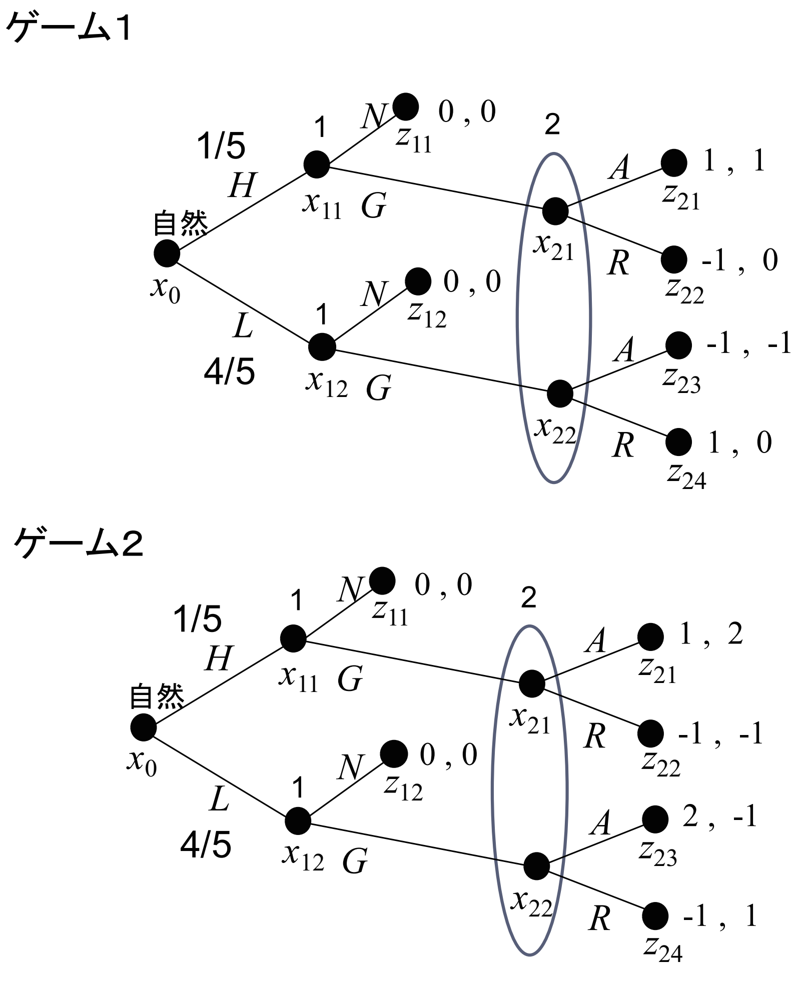


図 5.1: 各タイプに対応する利得行列

このとき、以下の選択肢から完全ベイズ均衡をすべて選べ。ここでプレイヤー 1 の戦略は x_{11} で選ぶものを左に、x_{12} で選ぶものを右に書いている。例えば NG は x_{11} で N、x_{12} で G を選ぶ戦略の組を表す。また信念は x_{21} の実現する確率を p、x_{22} を $1-p$ としている。各選択肢では、プレイヤー 1 の戦略、プレイヤー 2 の戦略、信念を順に並べている。

選択肢（ゲーム１、ゲーム２）

選択肢	プレイヤー１	プレイヤー２	信念
$A.$	GG	A	$p = 1/5$
$B.$	GG	R	$p = 1/5$
$C.$	GN	A	$p = 1$
$D.$	GN	A	$p = 0$
$E.$	NG	A	$p = 0$
$F.$	NG	R	$p = 0$
$G.$	NN	R	$0 \leq p \leq 2/5$
$H.$	NN	R	$0 \leq p \leq 1/2$

課題 5.2

図 5.2 に書かれたシグナリングゲームは，以下のようなゲームである：

- プレイヤー１は, タイプ A と B の２つで，その確率は，それぞれ 3/4 と 1/4 である．
- プレイヤー１は L か R を選ぶ.
- プレイヤー２は，プレイヤー１のタイプは分からないが，L と R のどちらを選んだかは分かり，そのもとで U か D を選ぶ．その結果，両プレイヤーの利得が決まる.
- 利得はプレイヤー１は左，プレイヤー２は右に書かれている.

以下，完全ベイズ均衡を求める．ここで

- プレイヤー１の戦略はタイプ A，B が選んだ行動をそれぞれ並べて書くこととし，例えば LR はタイプ A が L，タイプ B は R を選んだ戦略を指す.
- またプレイヤー２の戦略はプレイヤー１が L と R を選んだときに選ぶ行動をそれぞれ並べて書くこととし，例えば UD は L を選んだときは U，R を選んだときは D を選ぶ戦略を指す.

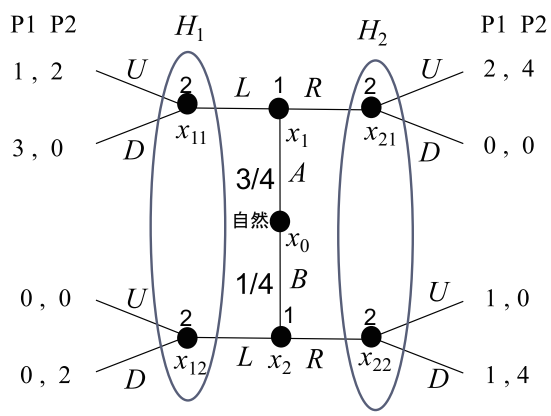


図 5.2: シグナリングゲーム：完全ベイズ均衡を求めよ

このとき純粋戦略のベイズ完全均衡を求めると，以下のような２つの均衡が現れる．このときの [a] から [l] までの空欄を埋めよ．空欄には，(1) プレイヤーの行動（L や U など）(2) タイプ (A か B)，(3) 戦略（LR や UD など），(4) 数値，のどれかが入る．kibaco には「半角文字の大文字」か「数

値」で入力せよ（全角文字や，小文字では間違いとなる）．なお数値の場合，1 は $\frac{1}{1}$，0 は $\frac{0}{1}$ で答えなさい．

- 均衡の 1 つは分離均衡である．プレイヤー 1 の戦略は [a] で，プレイヤー 2 の戦略は [b] である．プレイヤー 2 の信念は，
  - プレイヤー 1 が L を選んだときは，タイプ A である確率を $\frac{[c]}{[d]}$，
  - プレイヤー 1 が R を選んだときは，タイプ A である確率を $\frac{[e]}{[f]}$

  と推測している．
- 均衡の 1 つは一括均衡である．プレイヤー 1 の戦略は [g] で，プレイヤー 2 の戦略は [h] である．プレイヤー 1 が L を選んだときプレイヤー 2 の信念は，タイプ A である確率を p とすると，p は $\frac{[i]}{[j]}$ 以上，1 以下であれば何でも良い．プレイヤー 1 が R を選んだときプレイヤー 2 の信念は，タイプ A である確率が $\frac{[k]}{[l]}$ である．