政策研究大学院大学　講義
ゲーム理論
2023年　春学期　後期

渡辺隆裕
（東京都立大学）

1. ゲーム理論とは

フォンノイマンとゲーム理論 #1

- ゲーム理論
  - 複数の意思決定主体（個人・企業・政府など）
    - 傘を持つかどうかの意思決定：「相手」である「天気」は，自分の行動に影響を受けない
    - 待合せ，価格競争，国家の交渉－自分の行動は相手の行動に依存し，また相手の行動は自分の行動に依存する．
  - お互いの行動・意思決定が相互に作用する状況を分析

フォンノイマンを知ってますか？

- ゲーム理論の始まり
  - 1944 Theory of Games and Economic Behavior
  - John von Neumann and Oskar Morgenstern

ゲーム理論を作ったvon Neumann
（フォン・ノイマン）を知ってますか？

J. von Neumann

- 数学者(1903-1957)
- コンピュータの父として知られる（プログラム内蔵方式）
- 数学基礎論，量子力学，核兵器の開発，アメリカ原子力委員会顧問

コンピュータって誰が作った？

- 「コンピュータの父」で検索

- フォンノイマン
  - 天才数学者
  - コンピュータの父
  - 数学基礎論
  - 量子力学
- モルゲンシュテルン
  - 経済学者

コンピュータの基礎を築いた人

アラン・チューリング	チューリングマシンの考案者	1999/08/31 掲載
チャールズ・バベッジ	コンピュータの父：解析エンジンの設計者	2000/02/21 掲載
フォン・ノイマン	ノイマン型コンピュータの発案者	1999/08/24 掲載
クロード・シャノン	情報理論の元祖：ブール代数をコンピュータに入れた人	2000/03/20 掲載
ジョン・アタナソフ	米国特許における最初の電子式計算機の発明者	2000/05/01 掲載
ジョン・プレスパー・エッカート	最初の汎用コンピュータENIACの共同制作者	1998/10/05 掲載
ジョン・モークリー	最初の汎用コンピュータENIACの発案者	1998/10/05 掲載
ゴットフリート・ライプニッツ	乗除算ができる歯車式計算機の発明者(読者リクエスト)	

どちらがフォンノイマンだ？

- ゲーム理論の始まり
  - 1944 Theory of Games and Economic Behavior
  - J. von Neumann and O. Morgenstern

- 左の写真のどちらがフォン・ノイマンで，どちらがモルゲンシュテルンでしょう？
  - （1）左後ろの背の高い人
  - （2）右前の背の低い人

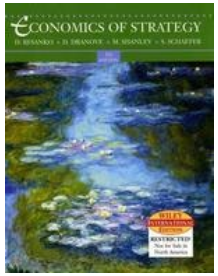
ゲーム理論の過去と現在

- 50年代・・・大きな期待
- 60年代・・・徐々に失望感？
- 70年代・・・静かなる研究の進行
- 80年代・・・専門家の間で研究が進展
- 90年代・・・大きな広がり
- 経済学で中心的な役割
- 社会学・政治学・法学・生物学にも応用
- MBA（経営学修士）では必修

ノーベル経済学賞とゲーム理論

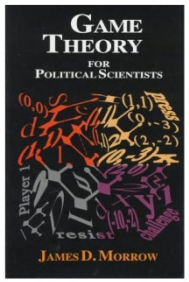
- 1994 Nash, Selten, Harsanyi　ゲーム理論
  - 1996 Mirrlees, Vickrey　情報の非対称性
  - 2001 Akerlof, Spence　情報の非対称性
- 2002 Kahneman, Smith　行動経済学，実験経済学
- 2005 Aumann, Schelling　ゲーム理論
- 2007 Hurwicz，Maskin，Myerson　メカニズムデザイン
  - 2009 Ostrom, Williamson　共有資源の分析，取引費用
  - 2010 Diamond　サーチ理論
- 2012 Roth, Shapley　マーケットデザイン
- 2014 Tirole　産業組織論
- 2016 Hart, Holmström　契約理論
- 2020 Milgrom　オークション理論

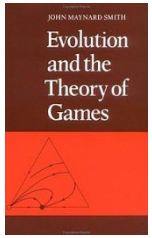
代表的な本で見る「経済学以外のゲーム理論」

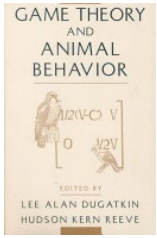


- 経営学： Economics of Strategy (他)
  - 戦略の経済学（経営戦略論），Northwestern Univ. (Kellogg)などのMBAテキスト，D. Besankoほか(2009)

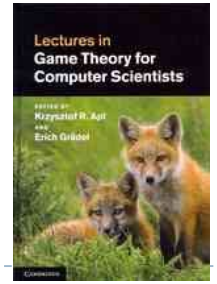
- 政治学： Game Theory for Political Scientists
  - 政治学者のためのゲーム理論
  - J. Morrow (1994), Princeton Univ. Press



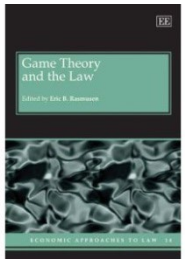




- 生物学: Evolution and Theory of Games, Game Theory and Animal Behavior
  - 進化とゲーム理論, J. Maynard Smith (1982)
  - ゲーム理論と動物行動 Dugatkinほか(2000)



情報科学：
コンピュータ科学者のためのゲーム理論



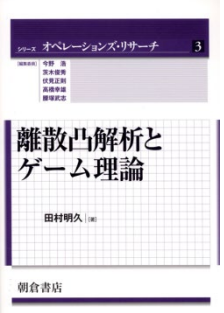
法学：
ゲーム理論と法

本で見る「経済学以外のゲーム理論」

- 国際法，国際関係論
  - 「ゲーム理論で読み解く国際法」（森大輔）勁草書房
  - 「国際紛争と協調のゲーム」（鈴木基史，岡田章）有斐閣

- 会計学
  - 「ゲーム理論で考える企業会計」（田村威文）中央経済社

- OR・応用数学
  - 「離散凸解析とゲーム理論」（田村明久）朝倉書店



ゲーム理論の地図

非協力ゲーム

合理的プレイヤーの理論

プレイヤーは利得を最大化

	戦略形ゲーム ゲーム理論の基礎となる形式	展開形ゲーム 時間と情報の構造を扱える形式
完備情報 ゲームに不確実性がない	完備情報 戦略形	完備情報 展開形
不完備情報 ゲームに不確実性がある	不完備情報 戦略形	不完備情報 展開形

- Kalai：11領域のうち1,3,5,7,9,10,11が対応

10のEconomic gamesを「経済学とゲーム理論」として詳しく解説

進化ゲーム

プレイヤーの行動は遺伝的に決定
選択と淘汰により、結果が決まる

- Kalai：11領域の4

協力ゲーム

- Kalai：11領域の2

ナッシュ交渉解

個人の意思決定理論

- Kalai：11領域の8

渡辺隆裕【東京都立大学】

非協力ゲーム理論の分類

- 非協力ゲーム理論の2つの分野

1）プレイヤーの行動選択を前提にしたゲーム理論

- もともとのゲーム理論
- プレイヤーは、自分の利得（利益、効用）が最大になるように行動を自分の意思で選択する
- 伝統的には、利己的で、合理的で、万能なプレイヤー
- 近年は、利他的、感情的、学習するプレイヤーなどを考える

2）進化ゲーム理論

- 生物の進化を分析するために作られた
- 遺伝によって、プレイヤーの行動が決められている。高い利得（適応度）を獲得したプレイヤーが多くの子孫を残す（その行動を選ぶプレイヤーの比率が増える）
- 近年は生物の進化だけではなく、社会を進化論的に分析する道具としても用いられる

本講義では1）について説明する

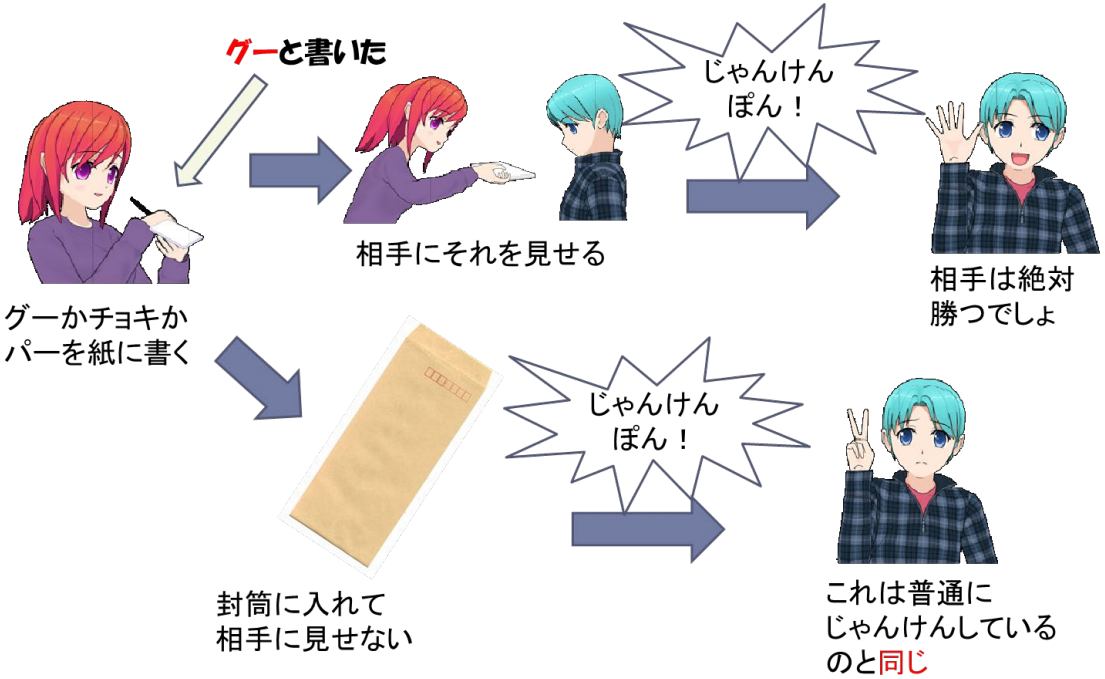
非協力ゲームの2つの形式

- 戦略形ゲームと展開形ゲーム
  - 戦略形ゲーム：
    - プレイヤーが同時に行動するゲームで，ゲーム理論の基本.
    - プレイヤーが2人で，戦略が2つのゲームは最も基本的な2×2ゲームと呼ばれ，利得行列という表で表現される.
  - 展開形ゲーム：
    - プレイヤーが交互に行動するものを含み，全てのゲームを表現できる.
      将棋，チェス，競り　etc…

- 「同時に行動する」とは？
  - 先に行動していても，その結果がわからなければ同時であると考える
  - 面倒なじゃんけん

時間ではなく情報が重要

- 展開形ゲームで重要な点：先にプレイをした相手の行動が分かるかどうか
- たとえあるプレイヤーが先に行動しても、後から行動するプレイヤーが、その行動を観察できない場合（何の情報もない場合）は同時であると考える。
- 行動を起こす時間（タイミング）ではなく、行動に関する情報を知りえるかどうか



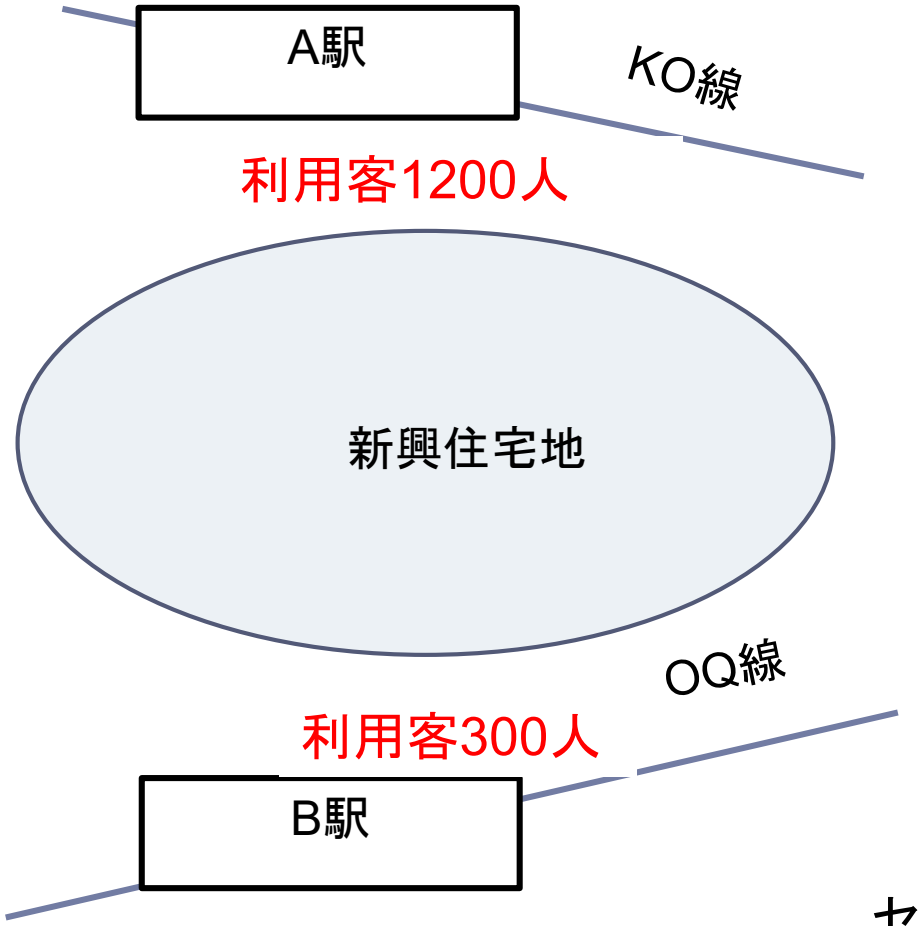
注意ポイント

先のプレイヤーの行動を、後のプレイヤーが観察できるかどうかが問題

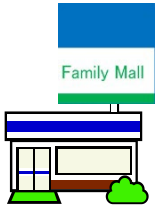
２．戦略形ゲーム

2.1　戦略形ゲームと利得行列

モデル1：I市コンビニ競争 PART1



近くて便利
セレブイレブン

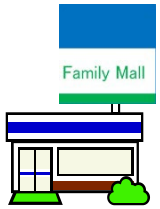


あなたとコンビに
ファミリーモール

セレブとファミモは
A駅とB駅のどちらに立地する？

I市コンビニ戦争

- 2つのコンビニ，セレブとファミモ
- どちらの駅に出店するか？
  - A駅（Akabadai)の店舗利用客　1200人
  - B駅（Black River)の店舗利用客　300人
- 違う場所に出店すれば客を独占
- 同じ場所に出店ーファミモが人気
  - ファミモはセレブの2倍の客数を獲得できる
  - A駅に出店：セレブ400人，ファミモ800人
  - B駅に出店：セレブ100人，ファミモ200人
- 客数を利得と考える



定義　プレイヤー・戦略・利得

- プレイヤー　ゲームをする主体
  - セレブ　ファミモ
- 戦略　各プレイヤーが選択する行動
  - セレブの戦略　A駅に出店する，B駅に出店する
  - ファミモの戦略　A駅に出店する，B駅に出店する
- ゲームの結果　各プレイヤーが選ぶ戦略の組
- 利得　戦略の組に対するプレイヤーの好みを数値で表したもの
- 利得行列　プレイヤーの戦略と利得を表した表

- 戦略形ゲームを作る－プレイヤー・利得・戦略が何かを明らかにする

利得行列

ファミモ / セレブ	A駅	B駅
A駅	(400, 800)	(1200, 300)
B駅	(300,1200)	(100, 200)

カッコの左側がセレブの利得

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(400, 800)	(1200, 300)
B駅	(300,1200)	(100, 200)

カッコの右側はファミモの利得

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(400, 800)	(1200, 300)
B駅	(300,1200)	(100, 200)

利得行列の読み方

セレブがA駅を，ファミモがB駅を選択したならば？

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(400, 800)	(1200, 300)
B駅	(300,1200)	(100, 200)

セレブの利得は1200，ファミモの利得は300

2.2　支配戦略

定義　支配戦略

- 支配戦略
  - 自分以外のプレイヤーのすべての戦略に対し，自分の他のどの戦略よりも，利得が高くなる戦略

- 各プレイヤーの立場で，自分以外のプレイヤーが選んだ戦略それぞれに対し，自分の最善の戦略を考える
- もし，あるひとつの戦略が常に利得をもっとも高くするならば，その戦略を選べば良い⇒支配戦略

（注）自分以外のすべてに対し，他のどの戦略より利得が厳密に大きくなければならない．ある戦略に対し，等しい利得だと支配戦略とは言わない（弱支配戦略と言う）

「セレブ」の支配戦略

セレブの立場で考える

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(400, 800)	(1200, 300)
B駅	(300,1200)	(100, 200)

ファミモが「A駅」に出店するなら？

セレブは「A駅」に出店するのが良い

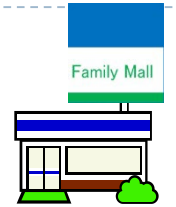
「セレブ」の支配戦略を探せ！

セレブの立場で考える

ファミモ / セレブ	A駅	B駅
A駅	(400, 800)	(1200, 300)
B駅	(300,1200)	(100, 200)

ファミモが「B駅」に出店するなら？
セレブは「A駅」に出店するのが良い

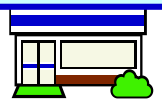
ファミモの支配戦略



セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(400, 800) >	(1200, 300)
B駅	(300,1200)	(100, 200)

ファミモの支配戦略

A駅を選ぶことはファミモの支配戦略



セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(400, 800) >	(1200, 300)
B駅	(300,1200) >	(100, 200)

セレブがA駅を選択しても，B駅を選択しても
→ファミモはA駅を選ぶことが良い

支配戦略があるときのゲームの解

- セレブの立場で考える
  - ファミモが「A駅」を選ぶならば
    - 自分は「A駅」を選ぶ方が良い
  - ファミモが「B駅」を選ぶならば
    - やはり「A駅」を選ぶ方が良い
- 「A駅」はセレブの支配戦略
- ファミモも同じ
  - 「A駅」はファミモにとっても支配戦略
- 結果・・・2つのコンビニとも「A駅」を選

すべてのプレイヤーに
支配戦略がある場合
のゲームの解は？

すべてのプレイヤーが
支配戦略を選ぶ
戦略の組

演習　支配戦略とゲームの解を求めよ

ゲーム1

1 \ 2	L	R
U	(1, 9)	(-6, 8)
D	(2, 4)	(-5, 2)

ゲーム2

1 \ 2	L	M	R
U	(4, 5)	(0, 6)	(-2, 5)
D	(3, 3)	(-1, 4)	(-3, 1)

★各プレイヤーの支配戦略を求めよ

★ゲームの解も求めよ，(U,L)のように戦略の組で示せ

解答　支配戦略とゲームの解を求めよ

ゲーム1

1 \ 2	L	R
U	(1, 9)	(-6, 8)
D	(2, 4)	(-5, 2)

ゲーム1

- プレイヤー1の支配戦略は D
- プレイヤー2の支配戦略は L
- ゲームの解は (D, L)

ゲーム2

1 \ 2	L	M	R
U	(4, 5)	(0, 6)	(-2, 5)
D	(3, 3)	(-1, 4)	(-3, 1)

ゲーム2

- プレイヤー1の支配戦略は U
- プレイヤー2の支配戦略は M
- ゲームの解は (U, M)

2.3　戦略の支配

戦略の強支配、弱支配、支配戦略と弱支配戦略

定義　戦略の支配

プレイヤーの2つの戦略 X と Y に対して，
自分以外のプレイヤーがどの戦略を選択しても，
X の方が Y より高い利得を与えるとき，
戦略Xは戦略Yを強支配していると言う
（単に支配しているということもある）

1＼2	L	M	R
U	(3, 1)	(0, 2)	(-2, 0)
D	(2, 9)	(-1, 3)	(-3, 8)

- プレイヤー1
  - UはDを支配
- プレイヤー2
  - LはRを支配
  - LとM は支配関係なし
  - MとR は支配関係なし

支配戦略を「戦略の支配」から見る

- 支配戦略の定義
  - 自分以外のプレイヤーのすべての戦略に対し，自分の他のどの戦略よりも，利得が高くなる戦略

- 支配戦略の定義を言い換えると？
  - 支配戦略とは，その戦略以外のすべての戦略を強支配する戦略

定義　戦略の弱支配

- プレイヤーの2つの戦略XとYに対して，自分以外のプレイヤーがどんな戦略を選択しても，
  Xの方がYより同じか高い利得を与えるとき，
  戦略Xは戦略Yを弱支配していると言う

ただし、少なくとも1つの他のプレイヤーの戦略に対しては，厳密に高い利得を与える（全部同じではダメ）

全部同じときは
XとYは戦略的同等である
と呼ぶ

1＼2	L	R
U	(4, 2)	(1, 3)
D	(3, 1)	(1, 2)

- プレイヤー1
  - UはDを弱支配
- プレイヤー2
  - RはLを支配
  - このときRはLを弱支配しているとも言える

ここに注意！
- 支配は弱支配でもある
- 戦略Xは戦略Yを支配しているならば，弱支配もしている

定義　弱支配戦略

- 他のすべての戦略を弱支配する戦略を弱支配戦略と呼ぶ

1＼2	L	M	R
U	(3, 1)	(2, 0)	(-2, 1)
D	(2, 9)	(1, 3)	(-3, 8)

- Uはプレイヤー1の弱支配戦略(支配戦略でもある)
- Lはプレイヤー2の弱支配戦略（支配戦略ではない）

- プレイヤー1
  - UはDを支配している（よって，弱支配している）
- プレイヤー2
  - LはMを支配している（よって，弱支配している）
  - LはRを弱支配している

ここに注意！
- 支配戦略は弱支配戦略でもある
- Uはプレイヤー1の支配戦略であり，弱支配戦略でもある

演習　各プレイヤーに弱支配戦略はあるか，あれば求めよ

ゲーム1

1 \ 2	L	R
U	(1, 9)	(2, 8)
D	(2, 2)	(1, 2)

ゲーム2

1 \ 2	L	M	R
U	(4, 5)	(3, 6)	(-2, 5)
D	(3, 3)	(1, 4)	(-3, 4)

解答　各プレイヤーの弱支配戦略があれば，それを求めよ

ゲーム1

1 \ 2	L	R
U	(1, 9)	(2, 8)
D	(2, 2)	(1, 2)

プレイヤー1はない

プレイヤー2の弱支配戦略は L

ゲーム2

1 \ 2	L	M	R
U	(4, 5)	(3, 6)	(-2, 5)
D	(3, 3)	(1, 4)	(-3, 4)

プレイヤー1の弱支配戦略はU

プレイヤー2の弱支配戦略はM

支配戦略は弱支配戦略でもある！

支配された戦略

- ある戦略に弱支配された戦略を，支配された戦略（dominated strategy）と呼ぶ
- プレイヤーは支配された戦略は選択しないと考える

1＼2	L	R
U	(2, 1)	(0, 0)
M	(1, 2)	(8, 1)
D	(1, 0)	(5, 5)

- プレイヤー1
  - MはDを弱支配している
  - つまりDは支配された戦略
  - プレイヤー1はMを選ぶとは限らない
    - Uの方が良いときもある
  - しかし，プレイヤー1はDを選ばない！（Mの方が常に良いので，UかMを選ぶ）

ここに注意！
- プレイヤーは何かを支配した戦略を選ぶとは限らない
- しかし支配された戦略は選ばないと考える
- 支配する戦略より支配される戦略に着目する

定義　支配された戦略

- ある戦略に弱支配された戦略を，支配された戦略（dominated strategy）と呼ぶ

- ポイント
  - 戦略Xが戦略Yを弱支配しているとき，戦略Yは戦略Xに弱支配されていると言う（これは日本語の問題，受動態）
  - 何かある1つの戦略に弱支配されている戦略は，（「弱」をつけず単に）支配された戦略と言う
  - 何かある1つの戦略に支配されている（弱支配ではなく，支配）されている戦略を強く支配された戦略と言うことがある

（注）支配，弱支配は，テキストや文献によっては「強支配」「弱支配」と呼ぶ時もあり，支配された戦略も文献によっては「強く支配された戦略」「弱く支配された戦略」と呼ぶときもある．ここでは上記の定義を用いる

【もういちど確認】とても重要！

ゲーム理論では、
プレイヤーは支配された戦略は選ばない
と考える

2.4　支配された戦略の繰返し削除

支配可解によるゲームの解

支配された戦略（再掲）

- プレイヤーは支配された戦略は選択しないと考える

1 \ 2	L	R
U	(3, 1)	(0, 0)
M	(2, 2)	(8, 1)
D	(1, 0)	(5, 5)

- プレイヤー1
  - *M*は*D*を支配している
  - *D*は支配された戦略
  - プレイヤー1は*D*を選ばない
  - プレイヤー1は*M* を選ぶとは限らない
    - *U* の方が良いときもある

- プレイヤー1はUとMのどちらを選ぶのか？
- 戦略の支配という観点から，それを知ることはできないか？

支配された戦略の削除

- プレイヤー1
  - （支配された戦略である）Dは選ばない
  - UとMのどちらを選べば良いかは分からない…ように思える
- プレイヤー2
  - LとRに支配関係はない
  - LとRのどちらを選ぶかわからない．．．ように思えるが？

1＼2	L	R
U	(3, 1)	(0, 0)
M	(2, 2)	(8, 1)
~~D~~	~~(1, 0)~~	~~(5, 5)~~

- プレイヤー2
  - プレイヤー1がDを選ばないと推測すると？
  - LがRより良い（LがRを支配している）と分かる
  - （注：正確には，Dを削除した新しいゲームで，LがRを支配している）

支配された戦略の削除

- 支配された戦略は選択されないので削除する
- すると新しいゲームで，支配された戦略があるかもしれないので，それをまた削除する

1＼2	L
U	(3, 1)

- プレイヤー1がDを選ばない
  ⇒Dを削除する
- するとそのゲームでは，プレイヤー2においてLがRを支配する
- プレイヤー2はRを選ばない
  ⇒Rを削除する

- すると，そのゲーム（1人ゲームだが）では，プレイヤー1においてUがMを支配する.
- プレイヤー2はMを選ばない⇒Mを削除する
- （U,L)が残る ⇒ ゲームの解

支配された戦略の繰り返し削除＃2

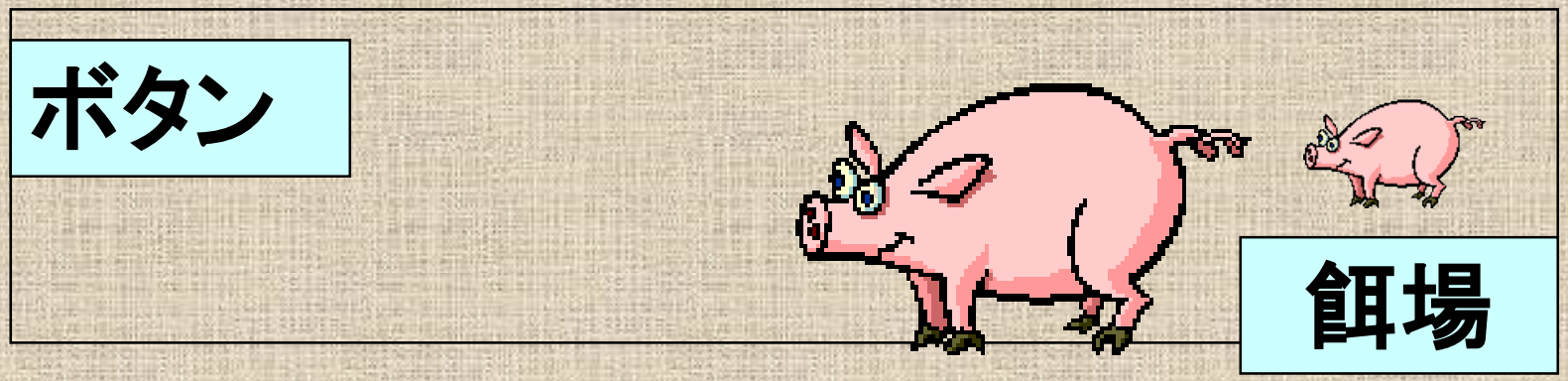
- 支配された戦略を繰り返し削除すると，1つの戦略の組み合わせに到達する時，そのゲームは支配可解(dominance solvable)であると言う
- そのような戦略の組み合わせがあれば，それがゲームの解になる。

（注）

- このような繰り返し削除を考える場合，通常は支配された戦略（何かに弱支配された戦略）ではなく，強く支配された戦略を考える
- その理由は，強く支配された戦略を削除するときは，順序に依存せず同じ戦略の組が残るが，支配された戦略を削除するときは，順序に依存して残る戦略の組が異なることがあるからである

モデル8： 合理的な豚

- 大きな豚と小さな豚が大きな檻に入れられている
- 一方の隅のボタンを押すと，もう一方の隅にエサが出てくる（5単位）
- エサは食べたい
- レバーは押しに行きたくない（－1単位）
- 一緒にボタンに行くと，大きな豚がエサを総どり



➢ 結果はどうなるでしょう？

出典：経営戦略のゲーム理論—交渉・契約・入札の戦略分析　（有斐閣　1995）
ジョン マクミラン (著), John McMillan (原著), 伊藤 秀史 (翻訳), 林田 修 (翻訳)

合理的な豚　利得行列

大豚＼小豚	ボタン	待つ
ボタン	(4, −1)	(2, 2)
待つ	(5, −1)	(0, 0)

小豚は「待つ」が「ボタン」を強支配

大豚＼小豚	ボタン	待つ
ボタン	(4 , −1)	(2 , 2)
待つ	(5 , −1)	(0 , 0)

子豚は「待つ」を選ばない
⇒子豚が「ボタン」を選べば
大豚は「ボタン」を選ぶ

大豚＼小豚	待つ
ボタン	(2 , 2)
待つ	(0 , 0)

子豚が待って，大豚がボタンを押す

実際にそうなるらしい！

大豚＼小豚	ボタン	待つ
ボタン	(4 , −1)	(2 , 2)
待つ	(5 , −1)	(0 , 0)

２人ゲームで支配戦略がある場合

２人ゲームにおいて一方のプレイヤーに支配戦略がある場合

（強支配された戦略の繰り返し削除の特殊ケース）

一方のプレイヤーが支配戦略を選ぶ

もう一方は，相手が支配戦略を選ぶと考え、一番利得が高い戦略を選ぶ

演習　ゲームの解を求めよ

ゲーム1

1 \ 2	L	R
U	(0, 5)	(9, 4)
D	(1, 4)	(-1, 2)

ゲーム2

1 \ 2	L	M	R
U	(3, 1)	(0, 2)	(-2, 0)
D	(2, 9)	(-1, 3)	(-3, 8)

解答　ゲームの解を求めよ

ゲーム1

1 \ 2	L	R
U	(0, 5)	(9, 4)
D	(1, 4)	(-1, 2)

ゲーム1

- ゲームの解は (D, L)

ゲーム2

1 \ 2	L	M	R
U	(3, 1)	(0, 2)	(-2, 0)
D	(2, 9)	(-1, 3)	(-3, 8)

ゲーム2

- ゲームの解は (U, M)

2.5　ナッシュ均衡

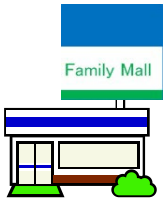
ここまで習ったこと

- 両方のプレイヤーが支配戦略を持つ
  - 両プレイヤーが支配戦略を選ぶ
- 一方のプレイヤーだけが支配戦略を持つ
  - 支配戦略を持つプレイヤーは支配戦略を選び，他のプレイヤーは，その最適反応戦略を選ぶ

➢ では，次はどのような場合を考える？

モデル　I市コンビニ戦争PART3　利得行列

- A駅600人，B駅750人



セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(200, 400)	(600, 750)
B駅	(750, 600)	(250, 500)

セレブには支配戦略がない

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(200, 400)	(600, 750)
B駅	(750, 600)	(250, 500)

ファミモにも支配戦略はない

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(200, 400)	(600, 750)
B駅	(750, 600)	(250, 500)

$(200, 400) < (600, 750)$

$(750, 600) > (250, 500)$

$(200, 400) < (750, 600)$

$(600, 750) > (250, 500)$

セレブ，ファミモ，共に支配戦略がない！

I市コンビニ戦争PART3　利得行列

ファミモ＼セレブ	A駅	B駅
A駅	(200, 400)	(600, 750)
B駅	(750, 600)	(250, 500)

- 両プレイヤー共に支配戦略がない
- 結果（ゲームの解）はどうなるか？

まず最適反応戦略という言葉を覚える

- 最適反応戦略
  - 相手の戦略に対し利得がもっとも高くなる（最適の）戦略
  - 「戦略〇〇に対する最適反応戦略」という言い方をする
- セレブの最適反応戦略
  - ファミモがA駅を選ぶと，セレブはB駅が最適反応戦略
  - ファミモがB駅を選ぶと，セレブはA駅が最適反応戦略

ファミモ / セレブ	A駅	B駅
A駅	(200, 400)	(600, 750)
B駅	(750, 600)	(250, 500)

支配戦略がないとき⇒ナッシュ均衡

- 支配戦略がないときはどうするか？
- ゲームのプレイヤーは，お互いに結果（戦略の組）を予測する
- 最終的に，すべてのプレイヤーが予測するゲームの解
  ⇒最適反応戦略を選び合う戦略の組
  ＝すべてのプレイヤーは，自分以外のその戦略の組に対して，利得を最大にする戦略を選ぶ
  ＝すべてのプレイヤーは，自分以外のその戦略の組に対して，それ以外の戦略を選んでも，利得は下がるか同じ（それ以下）

ゲーム理論では，その概念を考えた研究者の名前をとって，その戦略の組を**ナッシュ均衡**と呼ぶ

定義　ナッシュ均衡

- すべてのプレイヤーが最適反応戦略を選び合う戦略の組をナッシュ均衡と呼ぶ

- 戦略の組がナッシュ均衡である:
  - どのプレイヤーも，自分以外のプレイヤーが，そのナッシュ均衡の戦略を選択しているもとでは，自分だけが他のどの戦略を選んでも利得が高くできない
- 戦略の組がナッシュ均衡ではない:
  - あるプレイヤーは，自分以外のプレイヤーが，そのナッシュ均衡の戦略を選択しているもとで，自分だけがある他の戦略に変えれば利得が高くできる

ナッシュ均衡ではない予測

セレブもファミモもA駅を選ぶ

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(200, 400)	(600, 750)
B駅	(750, 600)	(250, 500)

セレブの最適反応戦略はB駅
（A駅ではない）

→ ナッシュ均衡ではない

ナッシュ均衡

セレブがB駅，ファミモがA駅を選ぶ

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(200, 400)	(600, 750)
B駅	(750, 600)	(250, 500)

両プレイヤー共に最適反応戦略を選んでいる
⇒他の戦略に変えても，利得が高くならない

もう1つのナッシュ均衡

セレブがA駅，ファミモがB駅を選ぶ

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(200, 400)	(600, 750)
B駅	(750, 600)	(250, 500)

ナッシュ均衡は2つ以上存在する時がある
⇒結果の候補が複数ある！

利得行列からナッシュ均衡を求める

- 各プレイヤーごとに考える
  - そのプレイヤー以外の戦略を1つずつ考える
  - それに対する最適反応戦略を考え，最適反応戦略の利得に下線を引く
  - 最適反応戦略が2つあるときは2つに下線を引く
- すべてのプレイヤーについて上記の作業が終わったなら，全プレイヤーの利得に下線が引かれている戦略の組がナッシュ均衡

ナッシュ均衡を求める

1 \ 2	L	M	R
U	(3, 4)	(0, 2)	(2, 0)
D	(2, 2)	(1, 3)	(2, 9)

- プレイヤー1を考える
- L に対する最適反応戦略は？
  - U（利得の下に線を引く）
- M に対する最適反応戦略は？
  - D（利得の下に線を引く）
- R に対する最適反応戦略は？
  - U と D（2つあるので2つとも線を引く）

- 次はプレイヤー2
- Uに対する最適反応戦略は？
  - L
- Dに対する最適適反応戦略は？
  - R

両方の利得に下線が引かれているのがナッシュ均衡

(U, L) (D, R)

演習★ ナッシュ均衡を求めよ

- 演習1.4

ゲーム1

1 \ 2	L	R
U	(0, 2)	(9, 4)
D	(1, 4)	(-1, 2)

ゲーム2

1 \ 2	L	M	R
U	(3, 1)	(4, 2)	(2, 0)
D	(8, 1)	(-1, 1)	(-5, 0)

解答　ナッシュ均衡を求めよ

ゲーム1

1 \ 2	L	R
U	(0, 2)	(9, 4)
D	(1, 4)	(-1, 2)

(U, R)

(D, L)

ゲーム2

1 \ 2	L	M	R
U	(3, 1)	(4, 2)	(2, 0)
D	(8, 1)	(-1, 1)	(-5, 0)

(U, M)

(D, L)

もナッシュ均衡（＝もOK）

演習　ナッシュ均衡を求めよ

問題C

1 \ 2	U	D
U	(5, 5)	(1, 1)
D	(1, 1)	(2, 2)

解答　ナッシュ均衡を求めよ

問題C

1 \ 2	U	D
U	(5, 5)	(1, 1)
D	(1, 1)	(2, 2)

(U , U)

(D , D)

ナッシュ均衡は「最適な戦略を取り合う」といい加減に覚えてはいけない

⇒最適反応戦略の定義を考える

なぜナッシュ均衡がゲームの解か？

- ナッシュ均衡以外が解であると？
  - そのような理論・予測・予言のもとでは，人間は行動を変える
    - 天体は，その運動を予測する理論が発表されても軌道は変えない
    - しかし人間は？
    - 株の暴落する日を予言できるか？
    - 渋滞・帰省ラッシュの予測
    - じゃんけんの出しやすい手
- ゲームの解をプレイヤーが知っても，それがゲームの解であり続けるには，ナッシュ均衡でなければならない
  - 必要条件
  - ナッシュ均衡の自己拘束性

しかし十分ではない－
－複数均衡の問題

2.6　戦略の支配とナッシュ均衡

支配されないナッシュ均衡

今までのゲームの解とナッシュ均衡

- これまで学んだゲームの解
  - 全員に支配戦略がある場合
  - 支配された戦略の繰り返し削除（本当は証明が必要）
  - 2人ゲームで「一方が支配戦略があり，もう一方はその最適反応戦略を選ぶ」

両方ともナッシュ均衡の特殊ケース

合理的な豚

大豚＼子豚	ボタン	待つ
ボタン	(4 , -1)	(2 , 2)
待つ	(5 , -1)	(0 , 0)

1 \ 2	L	R
U	(2, 2)	(1, 3)
M	(1, 1)	(0, 0)
D	(0, 0)	(2, 1)

プレイヤー1の戦略Mは強支配されているのでMを削除する

1 \ 2	L	R
U	(2, 2)	(1, 3)
D	(0, 0)	(2, 1)

プレイヤー2の戦略Lは強支配されているのでLを削除する

1 \ 2	R
U	(1, 3)
D	(2, 1)

プレイヤー1の戦略Uは強支配されているのでUを削除する

1 \ 2	R
D	(2, 1)

ゲームの解は(D, R)

強支配された戦略の繰り返し削除により得られる解は唯一のナッシュ均衡

(D, R)は
唯一のナッシュ均衡

1 \ 2	L	R
U	(2, 2)	(1, 3)
M	(1, 1)	(0, 0)
D	(0, 0)	(2, 1)

弱支配とナッシュ均衡

1 \ 2	L	R
U	$(1, \underline{2})$	$(\underline{3}, \underline{2})$
D	$(\underline{3}, \underline{1})$	$(1, 0)$

- LはRを弱支配している
- ナッシュ均衡は？

$(D, L)(U, R)$

ナッシュ均衡の中で（U, R）は，支配された戦略Rを用いている！

【もういちど確認】とても重要！

ゲーム理論では、
プレイヤーは支配された戦略は選ばない
と考える

弱支配とナッシュ均衡

1 \ 2	L	R
U	$(1, \underline{2})$	$(\underline{3}, \underline{2})$
D	$(\underline{3}, \underline{1})$	$(1, 0)$

- LはRを弱支配している
- ナッシュ均衡は？

$(D, L)(U, R)$

- ナッシュ均衡の中で (U, R) は，支配された戦略Rを用いている
- このようなナッシュ均衡は「ゲームの解」としてふさわしくない．（プレイヤーは支配された戦略は選ばない）
- ゲームの解は(D, L)であるべき．

定義　支配されないナッシュ均衡

- 支配されない戦略のみを用いたナッシュ均衡

- ポイント
  - 支配されないナッシュ均衡(undominated Nash equilibrium)の訳！
  - ナッシュ均衡の中で、あるプレイヤーの戦略が支配されたものを除く

均衡の精緻化と支配されないナッシュ均衡

- たくさんのナッシュ均衡の中で，ゲームの解としてふさわしくないものを除く

↓

- 支配された戦略を用いたナッシュ均衡を除く
- すべてのプレイヤーが支配されていない戦略を用いたナッシュ均衡は支配されないナッシュ均衡（Undominated Nash Equilibrium）と呼ばれる
- 支配されないナッシュ均衡をゲームの解と考える
- このような過程を均衡の精緻化と呼ぶ

演習★

ナッシュ均衡をすべて求め，更にその中で支配されないナッシュ均衡を求めよ

- 演習1.5

ゲーム1

1 \ 2	L	R
U	(0, 2)	(9, 2)
D	(1, 4)	(-1, 2)

ナッシュ均衡

支配されないナッシュ均衡

ゲーム2

1 \ 2	L	M	R
U	(3, 1)	(4, 2)	(2 , 0)
D	(8, 1)	(-1, 1)	(-5, 0)

ナッシュ均衡

支配されないナッシュ均衡

NABENAVI .net

解答　ナッシュ均衡をすべて求め，更にその中で支配されないナッシュ均衡を求めよ

ゲーム1

1＼2	L	R
U	(0, 2)	(9, 2)
D	(1, 4)	(-1, 2)

ナッシュ均衡

(U, R)　(D, L)

支配されないナッシュ均衡

(D, L)

ゲーム2

1＼2	L	M	R
U	(3, 1)	(4, 2)	(2 , 0)
D	(8, 1)	(-1, 1)	(-5, 0)

ナッシュ均衡

(U, M)　(D, L)

支配されないナッシュ均衡

(U, M)

まとめ　支配と弱支配，支配されないナッシュ均衡

- 2つの戦略に対し，弱支配や支配の関係がある場合がある
- 支配された戦略（ある戦略に弱支配された戦略）は選ばれないと考える
- すべての戦略を弱支配する戦略を弱支配戦略と呼ぶ
  - 弱支配戦略があれば，プレイヤーはそれを選ぶと考える
- ナッシュ均衡の中には，支配された戦略が用いられているナッシュ均衡もある．このようなナッシュ均衡は解としてふさわしくない
- よって，すべてのプレイヤーが支配されていない戦略を用いている「支配されないナッシュ均衡」をゲームの解と考える．
- このような過程を均衡の精緻化と呼ぶ．

注意：支配とナッシュ均衡の性質まとめ

- 以下の性質が成り立つ
  - 弱支配戦略があるとき：
    - ナッシュ均衡では，その弱支配戦略以外の戦略が用いられることがある
    - しかし，支配されないナッシュ均衡では，その弱支配戦略がナッシュ均衡の戦略として必ず選ばれていなければならない
    - 支配戦略ならば，ナッシュ均衡において，その支配戦略が必ずナッシュ均衡の戦略として選ばれてなければならない
  - すべてのプレイヤーに弱支配戦略があるとき
    - すべてのプレイヤーが弱支配戦略を選ぶ戦略の組は，支配されないナッシュ均衡であり，支配されないナッシュ均衡はそれだけである．つまり全員が弱支配戦略を選ぶことが唯一の解と考えられる．
    - すべてのプレイヤーが支配戦略を選ぶ戦略の組は，ナッシュ均衡でありナッシュ均衡はそれだけである．そして支配されないナッシュ均衡も，そのナッシュ均衡だけである．