5. 混合戦略

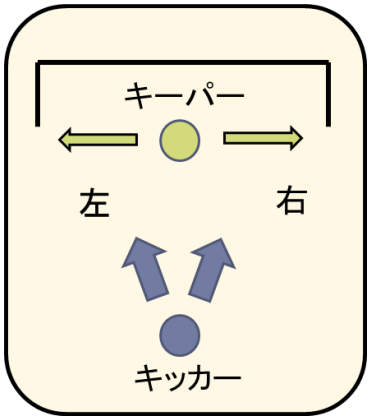
ゲーム理論の真髄「混合戦略」

5.1　混合戦略：イントロダクション

サッカーのPKから見る例題

サッカーのPK（ヨーロッパリーグのデータ）

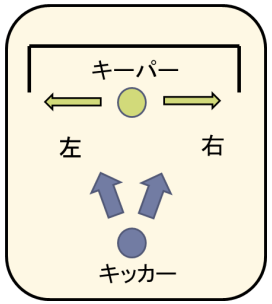
キッカー＼キーパー	左	右
左	58.3%	95.0%
右	93.0%	70.0%



- 1995年9月-2000年6月までのイタリア、スペイン、イングランドのヨーロッパのリーグ戦のデータ
- 試合中のPKの成功率
- キッカー「右、左のどちらに蹴ったか」（自分から見て）
- キーパー「（キッカーから見て）右、左のどちらに飛んだか」
  - 注１：右脚で蹴った場合を表す。左脚で蹴った場合は、右と左を入れ替えるとほぼ同じ比率になることが示せて、そのため左脚で蹴ったデータを右と左を入れ替えて合算している。
  - 注２：データには真ん中の場合もあるが、1%程度で少ないため除外されている
  - Ignacio Palacious-Huerta (2003) “Professionals Play Minmax”, Review of Economic Studies, 70, 395-415.

このゲームのナッシュ均衡を確認

キッカー＼キーパー	左	右
左	58.3%	95.0%
右	93.0%	70.0%



最適反応戦略を選び合う
ナッシュ均衡はない！

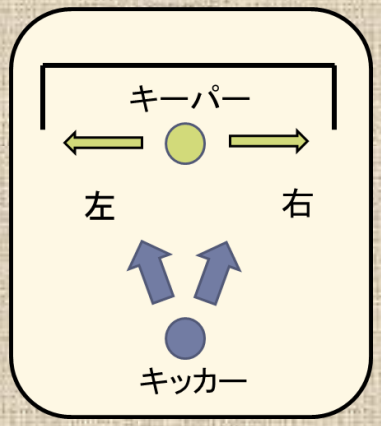
後で詳しく説明するとして…

キーパーの利得を防御率（＝1－成功率）とする
最適反応戦略を求めると？

キッカー＼キーパー	左	右
左	(58.3,41.7)	(95.0,5.0)
右	(93.0,7.0)	(70.0,30.0)

サッカーのPK（ヨーロッパリーグのデータ）

キッカー＼キーパー	左	右
左	58.3%	95.0%
右	93.0%	70.0%



- キーパーが飛ぶ方向と逆に蹴ると、当然、成功率は高い
- キーパーと同じ方向になるなら成功率はほぼ同じ、異なる方向だと右のほうが成功率が高そうだ
- 右に蹴った方が良い？

➢ あなたがキッカーならどちらに蹴るか（どちらに蹴る可能性を高くするか？）

実際は？

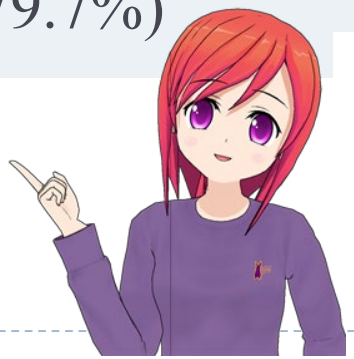
キーパー / キッカー	左	右
左	58.3%	95.0%
右	93.0%	70.0%

- 実際にデータでは、キーパーが
  - 左に飛んだ比率（確率） 42.3%
  - 右に飛んだ比率（確率） 57.7%

  であることが分かっている

- キッカーの成功率を計算すると？
- 左に蹴ったときの成功率
  - 0.583×0.423＋0.950×0.577=0.795 (79.5%)
- 右に蹴ったときの成功率
  - 0.930×0.423＋0.700×0.577=0.797 (79.7%)

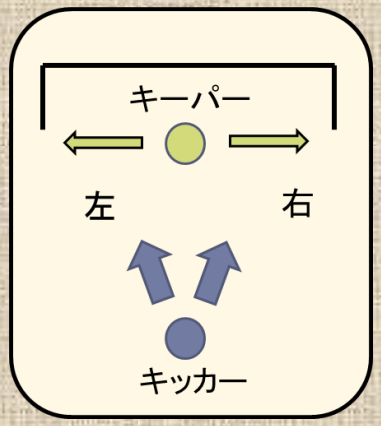
左に蹴っても、右に蹴っても成功率はほぼ同じ！？



実はこれ、ゲーム理論の予測通りになっているの

じゃあキーパーだったらどうする？

キッカー＼キーパー	左	右
左	58.3%	95.0%
右	93.0%	70.0%



- キーパーは成功率をできるだけ小さくしたい
- あなたがキーパーならどちらに蹴るか（どちらに蹴る可能性を高くするか？）

キーパーだったら？

キッカー＼キーパー	左	右
左	58.3%	95.0%
右	93.0%	70.0%

- 実際にデータでは、キッカーが
  - 左に蹴った比率（確率） 40.0%
  - 右に蹴った比率（確率） 60.0%

  であることが分かっている

- キッカーの成功率を計算すると？
- 左に飛んだときの成功率
  - 0.583×0.400＋0.930×0.600=0.791 (79.1%)
- 右に飛んだときの成功率
  - 0.950×0.400＋0.700×0.600=0.800 (80.0%)

やっぱり、左に飛んでも、右に飛んでも成功率・防御率は同じ！

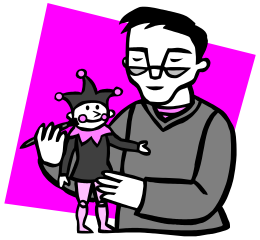
まとめ プロはゲーム理論に従う

- しろうとは「どちらに蹴ると有利か」をデータから探ろうとする
- プロはそれほど甘くない
- キッカーにとって「右に蹴ると有利」であれば、キーパーは「右に飛ぶ確率」が多くなるはず
- お互いの予想の行きつく結果＝ナッシュ均衡
  - このゲームは、一見するとナッシュ均衡はない
  - しかしどちらのプレイヤーも、それ以上、自分の利得を高くできない状態になっている、すなわちナッシュ均衡の考え方に基づいている？？
- 同様の結果はウインブルドンのサービスの研究でも得られている
  - Walker, Mark, and John Wooders. 2001. "Minimax Play at Wimbledon." American Economic Review, 91 (5): 1521-1538.

5.2 混合戦略とナッシュ均衡

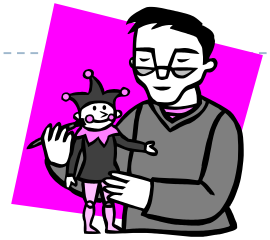
モデル4：精巧堂 vs 便乗工房

- 人形Aと人形Bのどちらを売り出すか？
- 精巧堂は，便乗工房と異なる人形にしたい
- 便乗工房は精巧堂と同じ人形にしたい
- 両者が人形Aを売り出せば，利得は120ずつ
- 両者が人形Bを売り出せば，利得は96ずつ
- 精巧堂が人形A，便乗工房が人形B
  - 利得は精巧堂が216，便乗工房が24
- 精巧堂が人形B，便乗工房が人形A
  - 利得は精巧堂が192，便乗工房が48



◆ 精巧堂 vs 便乗工房のナッシュ均衡は？

精巧堂 vs 便乗工房ー均衡を求める



精巧堂＼便乗工房	人形Ａ	人形Ｂ
人形Ａ	(120, 120)	(216, 24)
人形Ｂ	(192, 48)	(96, 96)

最適反応戦略を選びあう組はない
→ナッシュ均衡がない！？

コインの表裏合わせ (Matching Pennies)

1 \ 2	H	T
H	(1 , -1)	(-1, 1)
T	(-1, 1)	(1, -1)

- このゲームには，一見するとナッシュ均衡はない…
- 最初にフォン・ノイマン達が問題にしたのは，このタイプのゲーム

- このようなゲームでは，プレイヤーは混合戦略（mixed strategy)を使うと考える
- 混合戦略：確率を用いて戦略を選択する戦略

- このゲームでは，両方のプレイヤーが共に，表と裏を1/2ずつの確率で選択する戦略がナッシュ均衡となる

じゃんけんと混合戦略のナッシュ均衡

1＼2	グー	チョキ	パー
グー	(0, 0)	(1,-1)	(-1, 1)
チョキ	(-1, 1)	(0, 0)	(1,-1)
パー	(1,-1)	(-1, 1)	(0, 0)

- じゃんけん
  - 勝つと+1，負けると-1，あいこは0とする
  - ナッシュ均衡は，どうなると予想されるか？

じゃんけんのナッシュ均衡
グー，チョキ，パーを1/3ずつの確率で選択する

- 混合戦略は日常的に使っている！？

定義　混合戦略

- 戦略形ゲームにおいて，戦略を確率的に選択する戦略を**混合戦略**と呼ぶ
- 混合戦略と区別するために，従来の戦略を**純粋戦略**と呼ぶことがある
- 混合戦略は，純粋戦略を確率的に選択する戦略

混合戦略の考え方：直観どおりではない？

- 混合戦略の計算方法は，このあとで学びます．

キッカー＼キーパー	右	左
右	(0.5,0.5)	(0.9,0.1)
左	(0.6,0.4)	(0.3,0.7)

- 混合戦略のナッシュ均衡は
- キッカー：右に3/7，左に4/7
- キーパー：左に1/7，右に6/7
- キッカーが右に蹴る確率は左より小さい！

- キッカーが，得意である右に蹴る確率を高くすると
  - キーパーは右に飛ぶ方が，左に飛ぶより絶対良いので，右に絶対飛ぶ
  - キッカーは，左に蹴ったほう方が良いため，右に飛ぶ確率を高くしていることに矛盾してしまう

⇒ナッシュ均衡にはならない

自分が得意な方を選ぶ確率を小さく，不得意な方を選ぶ確率を大きくすることが解となる

一発大儲けの「拳合せ」

パーとグーの拳合わせ：利得行列 （単位：万円）

A君＼B君	パー	グー
パー	（100 ,−100）	（−1 , 1）
グー	（−1 , 1）	（1 , −1）

A君にとって絶対的に有利なゲームであることに注意

- A君とB君が同時にグーかパーを出す．
- 同じ拳ならA君の勝ち，違う拳ならB君の勝ち．
- 両方がパーならば，A君はB君から100万円もらう．
- それ以外は勝った方が負けた方から，1万円もらう．
- あなたがA君なら，パーとグーを出す比率は？

実験　一発大儲けの「拳合せ」

- あなたがA君なら，パーとグーを出す比率は？

パーとグーの拳合わせ：利得行列　（単位：万円）

A君＼B君	パー	グー
パー	（100，−100）	（−1　，　1　）
グー	（−1　，　1　）	（　1　，−1　）

あなたがA君で，私がB君だとして，
実際にゲームをしてみましょう

5.3　２×２ゲームの混合戦略のナッシュ均衡を求める

5.3.1 期待利得の計算方法

混合戦略，確率，期待利得

- 混合戦略を用いたときの利得⇒期待利得（利得の期待値）
- 確率と期待値の知識が必要

混合戦略の例：
精巧堂：人形Aを確率1/3，人形Bを確率2/3で選択
便乗工房：人形Aを確率1/4，人形Bを確率3/4で選択

	精巧堂＼便乗工房	人形A（$\frac{1}{4}$）	人形B（$\frac{3}{4}$）
$\frac{1}{3}$	人形A	(120, 120)	(216, 24)
$\frac{2}{3}$	人形B	(192, 48)	(96, 96)

期待利得：
利得の期待値をどう計算する？

期待利得の計算：確率分布を考える

精巧堂：人形Aを確率1/3，人形Bを確率2/3で選択
便乗工房：人形Aを確率1/4，人形Bを確率3/4で選択

精巧堂＼便乗工房		1/4 人形A	3/4 人形B
1/3	人形A	(120, 120)	(216, 24)
2/3	人形B	(192, 48)	(96, 96)

確率分布

精巧堂＼便乗工房	人形A	人形B
人形A	1/12	3/12
人形B	2/12	6/12

事象（戦略の組合せ）の起きる確率

- 精巧堂も便乗工房も人形Aを選ぶ確率：$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$
- 精巧堂が人形A，便乗工房が人形Bを選ぶ確率：$\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{12}$
- 精巧堂が人形B，便乗工房が人形Aを選ぶ確率：$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{12}$
- 精巧堂も便乗工房も人形Bを選ぶ確率：$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{12}$

期待利得の計算：精巧堂の期待利得は？

精巧堂：人形Aを確率1/3，人形Bを確率2/3で選択
便乗工房：人形Aを確率1/4，人形Bを確率3/4で選択

精巧堂＼便乗工房		1/4 人形A	3/4 人形B
1/3	人形A	(120, 120)	(216, 24)
2/3	人形B	(192, 48)	(96, 96)

確率分布

精巧堂＼便乗工房	人形A	人形B
人形A	1/12	3/12
人形B	2/12	6/12

精巧堂の期待利得は？

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times 120+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times 216+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times 192+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times 96$$
$$=\frac{1}{12}\times 120+\frac{3}{12}\times 216+\frac{2}{12}\times 192+\frac{6}{12}\times 96=144$$

【重要】期待利得のもう1つの計算方法

精巧堂：人形Aを確率1/3，人形Bを確率2/3で選択
便乗工房：人形Aを確率1/4，人形Bを確率3/4で選択

精巧堂＼便乗工房		1/4 人形A	3/4 人形B
1/3	人形A	(120, 120)	(216, 24)
2/3	人形B	(192, 48)	(96, 96)

確率分布

精巧堂＼便乗工房	人形A	人形B
人形A	1/12	3/12
人形B	2/12	6/12

精巧堂の期待利得：人形A，人形Bを確実に（確率1で）選んだときの期待利得を先に計算する

★「人形A」を選んだ時の期待利得

$$\frac{1}{4}\times 120+\frac{3}{4}\times 216=192$$

★「人形B」を選んだ時の期待利得

$$\frac{1}{4}\times 192+\frac{3}{4}\times 96=120$$

精巧堂：人形Aを確率1/3，人形Bを確率2/3で選んだときの期待利得

$$\frac{1}{3}\times\boxed{\text{「人形A」を選んだ時の期待利得}}+\frac{2}{3}\times\boxed{\text{「人形B」を選んだ時の期待利得}}$$

$$\frac{1}{3}\times 192+\frac{2}{3}\times 120=144$$

5.3.2 最適反応戦略とナッシュ均衡

ゲームの解「ナッシュ均衡を求める」

- 考え方は常に同じ

① 各プレイヤーの視点に立つ

② 自分以外のプレイヤーのすべての戦略に対する「最適反応戦略」を考える

③ すべてのプレイヤーと戦略について繰り返す

④ 最適反応戦略を選びあう戦略の組がナッシュ均衡

混合戦略での最適反応戦略の計算

		q	$1\text{-}q$
	便乗工房 / 精巧堂	人形A	人形B
p	人形A	(120, 120)	(216, 24)
$1\text{-}p$	人形B	(192, 48)	(96, 96)

精巧堂の混合戦略：人形Aを確率p，人形Bを確率$1\text{-}p$で選択する
便乗工房の混合戦略：人形Aを確率q，人形Bを確率$1\text{-}q$ で選択する

精巧堂の最適反応戦略は？

精巧堂の最適反応戦略の計算

精巧堂＼便乗工房	q 人形A	$1-q$ 人形B
人形A	(120, 120)	(216, 24)
人形B	(192, 48)	(96, 96)

便乗工房：人形Aを確率q，人形Bを確率$1-q$で選択

精巧堂の期待利得

★「人形A」を選んだ時　$q \times 120 + (1-q) \times 216 = -96q + 216$

★「人形B」を選んだ時　$q \times 192 + (1-q) \times 96 = 96q + 96$

人形Aが最適反応戦略になる範囲

$$-96q + 216 > 96q + 96$$

$$-192q > -118$$

$$\boxed{q < \frac{5}{8}}$$

$q < \frac{5}{8}$のとき精巧堂の最適反応戦略は，「人形A」を（確率1で）選択すること

⇒混合戦略を$p=1$とすること

精巧堂の最適反応戦略の計算

	精巧堂＼便乗工房	人形A (q)	人形B ($1-q$)
p	人形A	(120, 120)	(216, 24)
$1-p$	人形B	(192, 48)	(96, 96)

精巧堂の最適反応戦略を，混合戦略で表す

精巧堂の最適反応戦略

$q < \frac{5}{8}$　人形Aを選択

$q > \frac{5}{8}$　人形Bを選択

$q = \frac{5}{8}$　人形AもBも両方とも最適反応戦略

$q < \frac{5}{8}$ のとき　$p = 1$

$q > \frac{5}{8}$ のとき　$p = 0$

$q = \frac{5}{8}$ のとき　$0 \leqq p \leqq 1$ のすべての p

最適反応戦略の計算

精巧堂の期待利得

★「人形A」を選んだ時　★「人形B」を選んだ時

$-96q+216$　　$96q+96$

精巧堂も混合戦略！人形Aを確率p　人形Bを確率1-p　で選択

精巧堂の期待利得　$p\times(-96q+216)+(1-p)\times(96q+96)$

$pa+(1-p)a=a$

$-96q+216>96q+96$ ⇒ $p=1$ が最適反応戦略　$q<\frac{5}{8}$

$-96q+216=96q+96$ ⇒ $0\leqq p\leqq 1$ のすべての p が最適反応戦略　$q=\frac{5}{8}$

$-96q+216=96q+96=a$ とすると

$-96q+216<96q+96$ ⇒ $p=0$ が最適反応戦略　$q>\frac{5}{8}$

便乗工房の最適反応戦略の計算

精巧堂の混合戦略
人形Aを確率p
人形Bを確率$1-p$
で選択，とする

精巧堂 ＼ 便乗工房		q 人形A	$1-q$ 人形B
p	人形A	(120, 120)	(216, 24)
$1-p$	人形B	(192, 48)	(96, 96)

便乗工房の期待利得

★「人形A」を選んだ時 $p\times120+(1-p)\times48=72p+48$

★「人形B」を選んだ時 $p\times24+(1-p)\times96=-72p+96$

人形Aが最適反応戦略になる範囲

$$72p+48>-72p+96$$

$$144p>48 \Rightarrow \boxed{p>\frac{1}{3}}$$

$p>\frac{1}{3}$ のとき $q=1$

$p<\frac{1}{3}$ のとき $q=0$

$p=\frac{1}{3}$ のとき $0\leqq q\leqq1$ のすべての q

ナッシュ均衡の計算

精巧堂の最適反応戦略

$q < \frac{5}{8}$ のとき　$p = 1$

$q > \frac{5}{8}$ のとき　$p = 0$

$q = \frac{5}{8}$ のとき　$0 \leqq p \leqq 1$ のすべての p

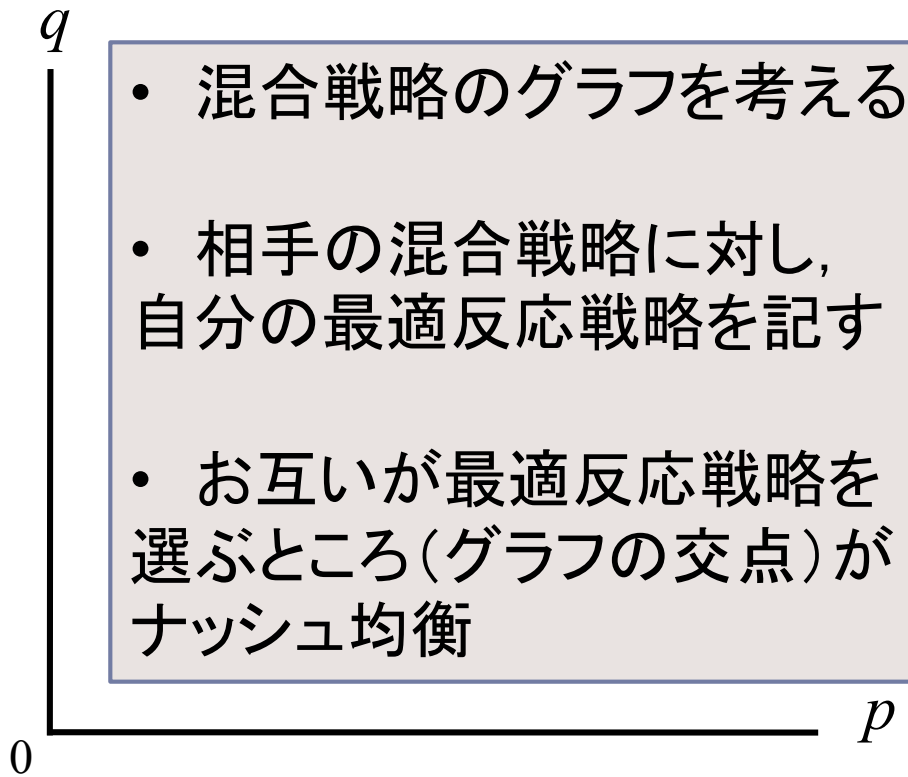
便乗工房の最適反応戦略

$p > \frac{1}{3}$ のとき　$q = 1$

$p < \frac{1}{3}$ のとき　$q = 0$

$p = \frac{1}{3}$ のとき　$0 \leqq q \leqq 1$ のすべての q

	便乗工房 / 精巧堂	人形A (q)	人形B ($1-q$)
p	人形A	(120, 120)	(216, 24)
$1-p$	人形B	(192, 48)	(96, 96)



- 混合戦略のグラフを考える
- 相手の混合戦略に対し，自分の最適反応戦略を記す
- お互いが最適反応戦略を選ぶところ（グラフの交点）がナッシュ均衡

ナッシュ均衡の計算

精巧堂の最適反応戦略

$q < \frac{5}{8}$ のとき　$p = 1$

$q > \frac{5}{8}$ のとき　$p = 0$

$q = \frac{5}{8}$ のとき　$0 \leqq p \leqq 1$ のすべての p

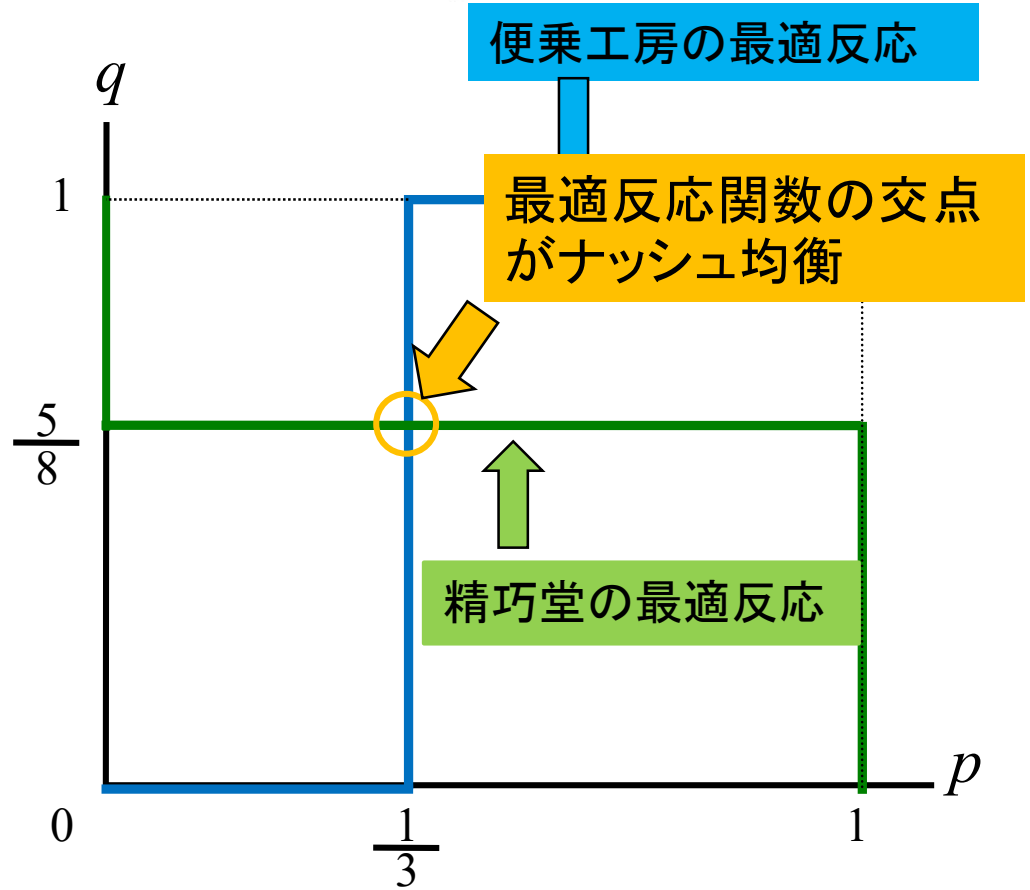
便乗工房の最適反応戦略

$p > \frac{1}{3}$ のとき　$q = 1$

$p < \frac{1}{3}$ のとき　$q = 0$

$p = \frac{1}{3}$ のとき　$0 \leqq q \leqq 1$ のすべての q

精巧堂 ＼ 便乗工房	人形A (q)	人形B ($1-q$)
p → 人形A	(120, 120)	(216, 24)
$1-p$ → 人形B	(192, 48)	(96, 96)



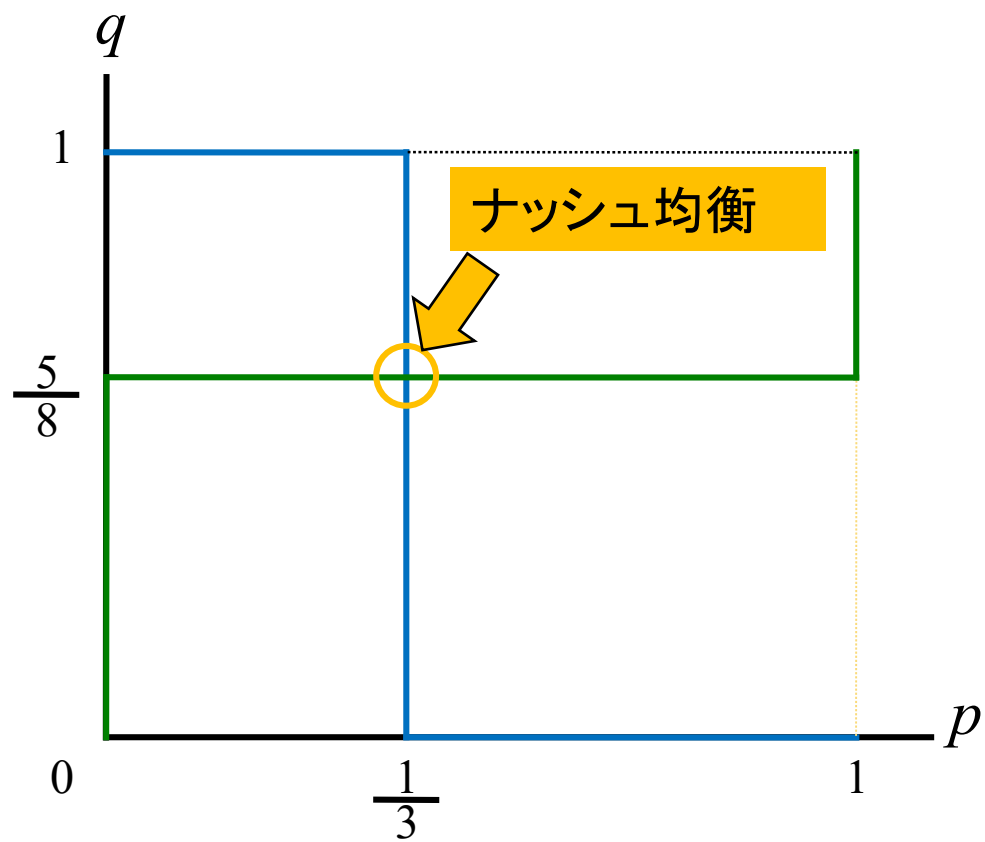
ナッシュ均衡

精巧堂＼便乗工房	人形A (q)	人形B ($1-q$)
人形A (p)	(120, 120)	(216, 24)
人形B ($1-p$)	(192, 48)	(96, 96)

ナッシュ均衡は

精巧堂の戦略
人形Aを 1/3
人形Bを 2/3
の確率で選ぶ

便乗工房の戦略
人形Aを 5/8
人形Bを 3/8
の確率で選ぶ



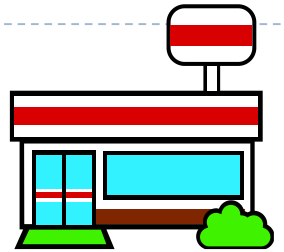
- ナッシュ均衡は戦略の組
- 答をp,qで書かないように
- 人形Aの選択確率をpやqとしたとき，人形Bの選択確率は$1-p$と$1-q$

まとめ　混合戦略ナッシュ均衡の求め方

- プレイヤー1の混合戦略をp，プレイヤー2の混合戦略をqとする
- プレイヤー1の立場に立つ
- プレイヤー2の混合戦略qに対し，自分の最適反応戦略を場合分けする
- プレイヤー2の立場に立つ
- プレイヤー1の混合戦略pに対し，自分の最適反応戦略を場合分けする
- 最適反応戦略のグラフを書く
- その交点がナッシュ均衡
- ナッシュ均衡を整理して記述する

4.3.3 続き

I市コンビニ戦争PART3のナッシュ均衡を混合戦略も含めて求める



セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(200, 400)	(600, 750)
B駅	(750, 600)	(250, 500)

I市コンビニ戦争PART3(1)

q　　$1-q$

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(200, 400)	(600, 750)
B駅	(750, 600)	(250, 500)

セレブの最適反応戦略を求める

ファミモが混合戦略
A駅を確率q，B駅を確率$1-q$
で選択

セレブの期待利得

★「A駅」を選んだ時　$q \times 200 + (1-q) \times 600 = -400q + 600$

★「B駅」を選んだ時　$q \times 750 + (1-q) \times 250 = 500q + 250$

A駅が最適反応戦略になる範囲

$$-400q + 600 > 500q + 250$$
$$-900q > -350$$

$$\boxed{q < \frac{7}{18}}$$

I市コンビニ戦争PART3(2)

セレブも混合戦略！
A駅を確率p
B駅を確率1-p
で選択，とする

	セレブ＼ファミモ	A駅 (q)	B駅 ($1-q$)
p	A駅	(200, 400)	(600, 750)
$1-p$	B駅	(750, 600)	(250, 500)

セレブの最適反応戦略を，混合戦略で表す

$q < \frac{7}{18}$　A駅を選択

$q > \frac{7}{18}$　B駅を選択

$q = \frac{7}{18}$　A駅もB駅も両方とも最適反応戦略

$q < \frac{7}{18}$ のとき　$p = 1$

$q > \frac{7}{18}$ のとき　$p = 0$

$q = \frac{7}{18}$ のとき　$0 \leqq p \leqq 1$ のすべての p

I市コンビニ戦争PART3(3)

ファミモの最適反応戦略を求める

	セレブ＼ファミモ	A駅 (q)	B駅 ($1-q$)
p	A駅	(200, 400)	(600, 750)
$1-p$	B駅	(750, 600)	(250, 500)

ファミモの期待利得

★「A駅」を選んだ時 $p \times 400 + (1-p) \times 600 = -200p + 600$

★「B駅」を選んだ時 $p \times 750 + (1-p) \times 500 = 250p + 500$

A駅が最適反応戦略になる範囲

$$-200p + 600 > 250p + 500$$

$$-450p > -100 \Rightarrow \boxed{p < \frac{2}{9}}$$

$p < \frac{2}{9}$ のとき $q = 1$

$p > \frac{2}{9}$ のとき $q = 0$

$p = \frac{2}{9}$ のとき $0 \leqq q \leqq 1$ のすべての q

ナッシュ均衡の計算

セレブの最適反応戦略

$q < \frac{7}{18}$ のとき　$p = 1$

$q > \frac{7}{18}$ のとき　$p = 0$

$q = \frac{7}{18}$ のとき　$0 \leqq p \leqq 1$ のすべての p

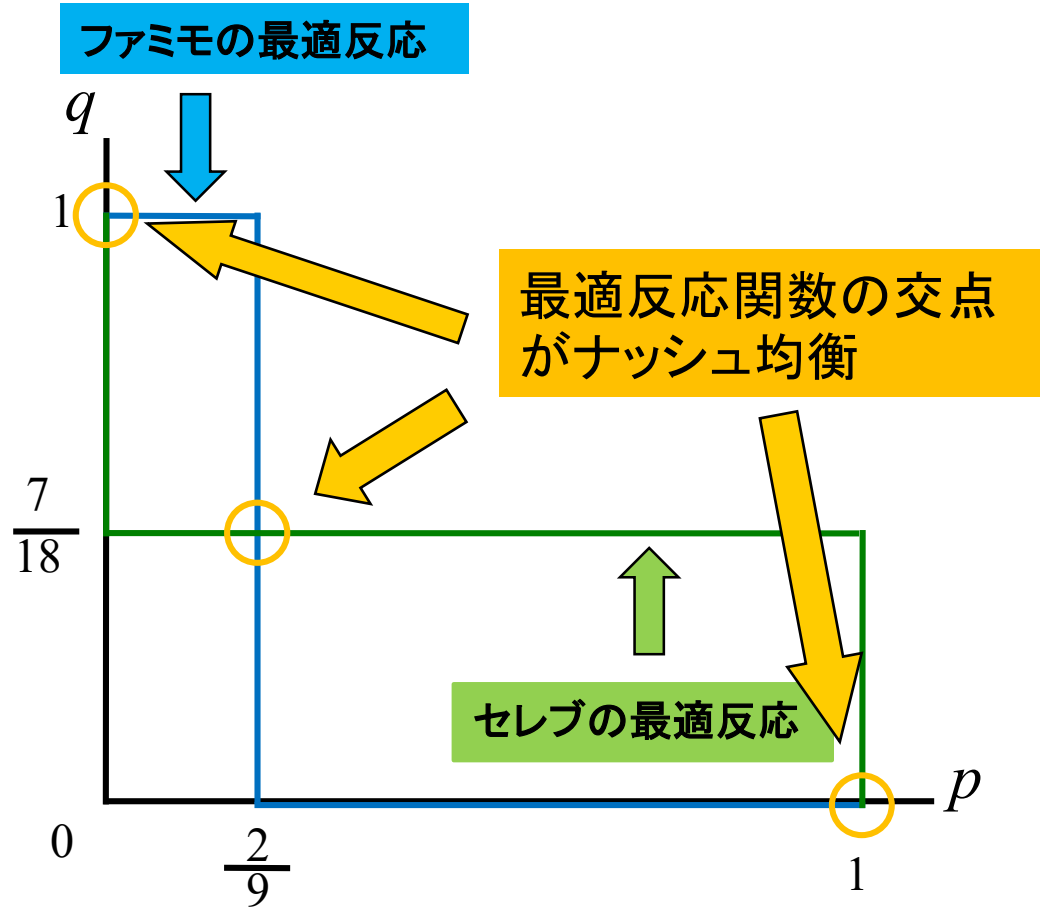
ファミモの最適反応戦略

$p < \frac{2}{9}$ のとき　$q = 1$

$p > \frac{2}{9}$ のとき　$q = 0$

$p = \frac{2}{9}$ のとき　$0 \leqq q \leqq 1$ のすべての q

セレブ \ ファミモ	q A駅	$1-q$ B駅
p → A駅	(200, 400)	(600, 750)
$1-p$ → B駅	(750, 600)	(250, 500)



ナッシュ均衡は3つある

セレブ＼ファミモ	q A駅	$1-q$ B駅
p A駅	(200, 400)	(600, 750)
$1-p$ B駅	(750, 600)	(250, 500)

ナッシュ均衡 1

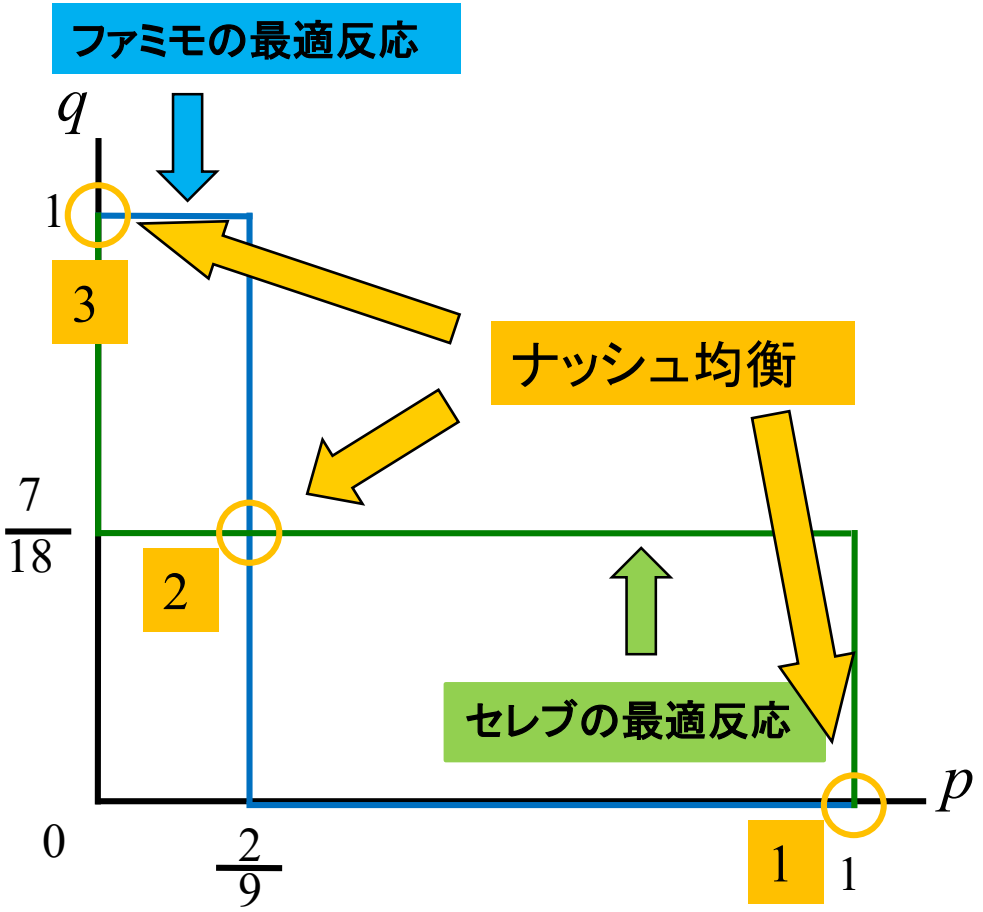
セレブの戦略($p = 1$)
A駅を 確率1　B駅を確率0で選ぶ
ファミモの戦略($q = 0$)
A駅を 確率0　B駅を確率1で選ぶ

ナッシュ均衡 2

セレブの戦略($p = 2/9$)
A駅を 2/9　B駅を7/9で選ぶ
ファミモの戦略($q = 7/18$)
A駅を 7/18　B駅を11/18で選ぶ

ナッシュ均衡 3

セレブの戦略($p = 0$)
A駅を 確率0　B駅を確率1で選ぶ
ファミモの戦略($q = 1$)
A駅を 確率1　B駅を確率0で選ぶ



純粋戦略のナッシュ均衡との対応

純粋戦略のナッシュ均衡を求めてみると？

ナッシュ均衡 1

セレブの戦略 $(p = 1)$
A駅を 確率1　B駅を確率0で選ぶ
ファミモの戦略 $(q = 0)$
A駅を 確率1　B駅を確率0で選ぶ

ナッシュ均衡 2

セレブの戦略 $(p = 2/9)$
A駅を 2/9　B駅を7/9で選ぶ
ファミモの戦略 $(q = 7/18)$
A駅を 7/18　B駅を11/18で選ぶ

ナッシュ均衡 3

セレブの戦略 $(p = 0)$
A駅を 確率0　B駅を確率1で選ぶ
ファミモの戦略 $(q = 1)$
A駅を 確率0　B駅を確率1で選ぶ

ナッシュ均衡1

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(200, 400)	(600, 750)
B駅	(750, 600)	(250, 500)

ナッシュ均衡3

混合戦略のナッシュ均衡を求めると，
その中に純粋戦略のナッシュ均衡は
含まれている

まとめ ２×２の混合戦略のナッシュ均衡

- 各プレイヤーの立場で，最適反応戦略を求める
  - 相手の混合戦略に対する最適反応戦略を，場合分けして求める
- プレイヤー１，２で求められたら，グラフを書いて交点を求める
  - グラフの形によって，ナッシュ均衡が1つの場合と3つの場合があるので注意最適反応戦略のグラフを書く
- ナッシュ均衡を整理して記述する
  - 「誰が，どの戦略を，どの確率で選ぶか」を書く
  - 自分が置いた変数p , q で書かない
- 混合戦略のナッシュ均衡が求められれば，純粋戦略のナッシュ均衡は含まれているはず

戦略が3つ以上や，3人以上の混合戦略のナッシュ均衡を求めるのは，一般的には難しい

演習　一発大儲けの「拳合せ」

- A君とB君が同時にグーかパーを出す.
- 同じ拳ならA君の勝ち，違う拳ならB君の勝ち.
- 両方がパーならば，A君はB君から100万円もらう.
- それ以外は勝った方が負けた方から1万円もらう.

A君にとって絶対的に有利なゲームであることに注意

問題：混合戦略のナッシュ均衡を求め，*A* 君がパーを出す確率，*B* 君がパーを出す確率をそれぞれ求めよ.

パーとグーの拳合わせ：
利得行列（単位：万円）

A君＼B君	パー	グー
パー	（100，−100）	（−1，1）
グー	（−1，1）	（1，−1）

5.4 簡便な計算

混合戦略のナッシュ均衡：簡便に求める

	精巧堂＼便乗工房	人形A (q)	人形B ($1-q$)
p	人形A	(120, 120)	(216, 24)
$1-p$	人形B	(192, 48)	(96, 96)

プレイヤー1：Aを確率p，Bを確率$1-p$
プレイヤー2：Aを確率q，Bを確率$1-q$
で選ぶとする．

プレイヤー2についても同様

プレイヤー1の期待利得

★Aを選んだ時　$q \times 120 + (1-q) \times 216 = -96q + 216$

★Bを選んだ時　$q \times 192 + (1-q) \times 96 = 96q + 96$

もしどちらかが大きいと，混合戦略がナッシュ均衡にならない．（最適反応戦略が$p = 0$か$p = 1$となるが，純粋戦略のナッシュ均衡がないことに矛盾）

したがって，AとBの期待利得は等しくなければならない

$$-96q + 216 = 96q + 96 \Rightarrow \quad q = 5/8$$

プレイヤー1の期待利得を計算することで，プレイヤー2のナッシュ均衡戦略が決まることに注意

プレイヤー2の期待利得

A:　$p \times 120 + (1-p) \times 48 = 72p + 48$

B:　$p \times 24 + (1-p) \times 96 = -72p + 96$

$$72p + 48 = -72p + 96$$
$$\Rightarrow \quad p = 1/3$$

$$\boxed{p = \frac{1}{3},\ q = \frac{5}{8}}$$

プレイヤー1：
Aを1/3，Bを2/3で選ぶ
プレイヤー2：
Aを5/8，Bを3/8で選ぶ

混合戦略ナッシュ均衡＃1：どうやってプレイ？

精巧堂＼便乗工房	人形Ａ	人形Ｂ
人形Ａ	(120, 120)	(216, 24)
人形Ｂ	(192, 48)	(96, 96)

ナッシュ均衡の計算方法は分かった．
⇒しかし，それが何を意味するかを理解することは難しい

ナッシュ均衡：
精巧堂の戦略：人形Aを 1/3，人形Bを 2/3の確率で選ぶ
便乗工房の戦略：人形Aを 5/8，人形Bを 3/8の確率で選ぶ

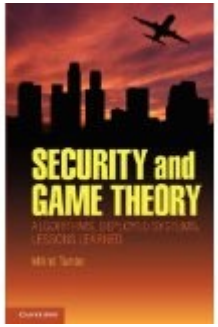
コンピュータの乱数，ルーレット，サイコロ，コインなどを使って「ランダム」を作り出すことが必要
⇒ランダムデバイスと呼ばれる
皆さんなら，1/3や5/8をどう作り出しますか？

（例）

- 精巧堂はサイコロを取り出す．出た目が2以下ならば人形Aを作る．
- 便乗工房はコインを3枚取り出した．表が1枚だけ出たら人形Bを作り，それ以外なら人形Aを作る．（3枚のコインを投げて1枚だけ表が出る確率は3/8）

混合戦略の応用:警備・セキュリティと混合戦略

- 従来，意思決定において，乱数を使うという発想は，理論上は興味があっても，現実への応用は難しいと考えられていた.
- しかし近年は警備やセキュリティに混合戦略を応用しようとする試みが注目されている.



- Milind Tambe (2011), Security and Game Theory: Algorithms, Deployed Systems, Lessons Learned, Cambridge University Press.
- 岩崎敦，東藤大樹(2013)，ゲーム理論・メカニズムデザインに関する研究動向，人工知能学会誌，Vol.28，No.3.

P1 \ P2	*A*	*B*
A	(+1, -1)	(-2,+2)
B	(-5,+5)	(+1, -1)

- P1:警備「Aを警備，Bを警備」
- P2:テロリスト「Aを攻撃，Bを攻撃」
- Aの方が重要施設

混合戦略ナッシュ均衡＃2：確率分布を理解

ナッシュ均衡：
精巧堂の戦略：人形Aを 1/3，人形Bを 2/3の確率で選ぶ
便乗工房の戦略：人形Aを 5/8，人形Bを 3/8の確率で選ぶ

精巧堂＼便乗工房		5/8 人形Ａ	3/8 人形Ｂ
1/3	人形Ａ	(120, 120)	(216, 24)
2/3	人形Ｂ	(192, 48)	(96, 96)

確率分布

精巧堂＼便乗工房	人形A	人形B
人形A	5/24	3/24
人形B	10/24	6/24

事象（戦略の組合せ）の起きる確率

- 精巧堂も便乗工房も人形Aを選ぶ確率： $\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{24}$
- 精巧堂が人形A，便乗工房が人形Bを選ぶ確率： $\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{24}$
- 精巧堂が人形B，便乗工房が人形Aを選ぶ確率： $\frac{2}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{10}{24}$
- 精巧堂も便乗工房も人形Bを選ぶ確率： $\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}=\frac{6}{24}$

混合戦略ナッシュ均衡＃3：期待利得は？

ナッシュ均衡：
精巧堂の戦略：人形Aを 1/3，人形Bを 2/3の確率で選ぶ
便乗工房の戦略：人形Aを 5/8，人形Bを 3/8の確率で選ぶ

精巧堂＼便乗工房		5/8 人形A	3/8 人形B
1/3	人形A	(120, 120)	(216, 24)
2/3	人形B	(192, 48)	(96, 96)

確率分布

精巧堂＼便乗工房	人形A	人形B
人形A	5/24	3/24
人形B	10/24	6/24

精巧堂の期待利得：

$$\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}\times 120+\frac{1}{3}\times\frac{3}{8}\times 216+\frac{2}{3}\times\frac{5}{8}\times 192+\frac{2}{3}\times\frac{3}{8}\times 96$$
$$=\frac{5}{24}\times 120+\frac{3}{24}\times 216+\frac{10}{24}\times 192+\frac{6}{24}\times 96=156$$

【重要】期待利得の簡単な計算方法

ナッシュ均衡：
精巧堂の戦略：人形Aを 1/3，人形Bを 2/3の確率で選ぶ
便乗工房の戦略：人形Aを 5/8，人形Bを 3/8の確率で選ぶ

精巧堂＼便乗工房	5/8 人形A	3/8 人形B
1/3 人形A	(120, 120)	(216, 24)
2/3 人形B	(192, 48)	(96, 96)

確率分布

精巧堂＼便乗工房	人形A	人形B
人形A	1/12	3/12
人形B	2/12	6/12

ナッシュ均衡では，この2つの期待利得は等しくなっている！

①「人形A」を選んだ時の期待利得 $\frac{5}{8}\times 120+\frac{3}{8}\times 216=156$

②「人形B」を選んだ時の期待利得 $\frac{5}{8}\times 192+\frac{3}{8}\times 96=156$

③混合戦略における期待利得 $=\frac{1}{3}\times$ ①「人形A」を選んだ時の期待利得 $+\frac{2}{3}\times$ ②「人形B」を選んだ時の期待利得

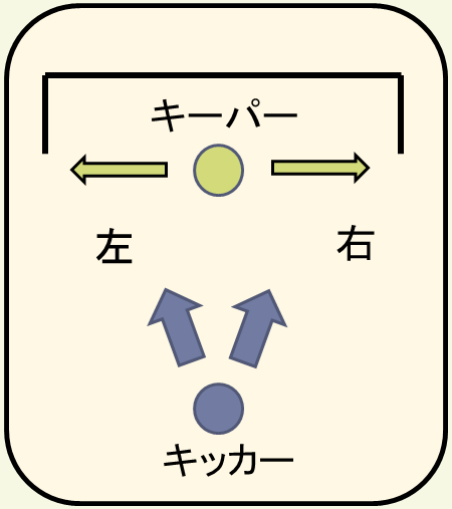
$=\frac{5}{8}\times 156+\frac{3}{8}\times 156=156$

③は①と②に等しくなるので，③の代わりに①か②を計算したほうが簡単！

演習★ サッカーのPK戦の例

- 演習2.2
- 混合戦略のナッシュ均衡を求め、キッカーの期待利得とキーパーの期待利得を求めよ
- キッカーの期待利得は、PKの成功率になっている

キッカー＼キーパー	右	左
右	(0.5,0.5)	(0.9,0.1)
左	(0.6,0.4)	(0.3,0.7)



- キッカーの成功率をキッカーの利得，失敗率をキーパーの利得とし，その利得行列は上記のように与えられたとしよう．
- キッカーとキーパーが違う方向を選んだ方が，キッカーは有利．
- キッカーは，右に蹴るほうが得意で，右に蹴るほうが利得が高い．

解答　サッカーのPK戦の例--混合戦略のナッシュ均衡：簡便に求める

キッカー＼キーパー	右	左
右	(0.5,0.5)	(0.9,0.1)
左	(0.6,0.4)	(0.3,0.7)

キッカー：右を確率p，左を確率$1-p$
キーパー：右を確率q，左を確率$1-q$
で選ぶとする.

キッカーの期待利得

★右を選んだ時 $q \times 0.5 + (1-q) \times 0.9 = -0.4q + 0.9$

★左を選んだ時 $q \times 0.6 + (1-q) \times 0.3 = 0.3q + 0.3$

もしどちらかが大きいと，混合戦略がナッシュ均衡にならない.（最適反応戦略が$p = 0$か$p = 1$となるが，純粋戦略のナッシュ均衡がないことに矛盾）

したがって右と左の期待利得は等しくなければならない

$$-0.4q + 0.9 = 0.3q + 0.3 \Rightarrow \quad q = 6/7$$

プレイヤー1の期待利得を計算することで，プレイヤー2のナッシュ均衡戦略が決まることに注意

キーパーについても同様

キーパーの期待利得

右：$p \times 0.5 + (1-p) \times 0.4 = 0.1p + 0.4$

左：$p \times 0.1 + (1-p) \times 0.7 = -0.6p + 0.7$

$$0.1p + 0.4 = -0.6p + 0.7$$
$$\Rightarrow \quad p = \frac{3}{7}$$

$$\boxed{p = \frac{3}{7},\ q = \frac{6}{7}}$$

キッカー：
右を3/7，左を4/7で選ぶ
キーパー：
右を6/7，左を1/7で選ぶ

解答　サッカーのPK戦の例–期待利得の計算

ナッシュ均衡：　キッカー：右を3/7，左を4/7で選ぶ
キーパー：右を6/7，左を1/7で選ぶ

キッカー＼キーパー		6/7 右	1/7 左
3/7	右	(0.5,0.5)	(0.9,0.1)
4/7	左	(0.6,0.4)	(0.3,0.7)

キッカーの期待利得

①右を選んだ時の期待利得 $\frac{6}{7}\times 0.5+\frac{1}{7}\times 0.9=\frac{39}{70}\simeq 0.57$

②左を選んだ時の期待利得 $\frac{6}{7}\times 0.6+\frac{1}{7}\times 0.3=\frac{39}{70}\simeq 0.57$

③混合戦略における期待利得 $=\frac{3}{7}\times\boxed{①}+\frac{4}{7}\times\boxed{②}=\frac{39}{70}$

③は①と②に等しくなる

キッカーの期待利得：$\frac{39}{70}\simeq 0.57$

キーパーの期待利得は同様に計算すると

$$\frac{3}{7}\times 0.5+\frac{4}{7}\times 0.4=\frac{31}{70}\simeq 0.43$$

注意：
- プレイヤー1と2の利得の和が定数のゲームは期待利得の和も同じになる
- このゲームは，プレイヤー1と2の利得の和が常に1となので期待利得も和は1
- よって，1-0.57=0.43 でも計算できる