６．展開形ゲーム

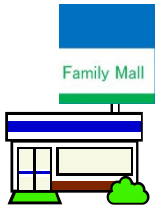
6.1　完全情報の展開形ゲーム

展開形ゲームと完全情報

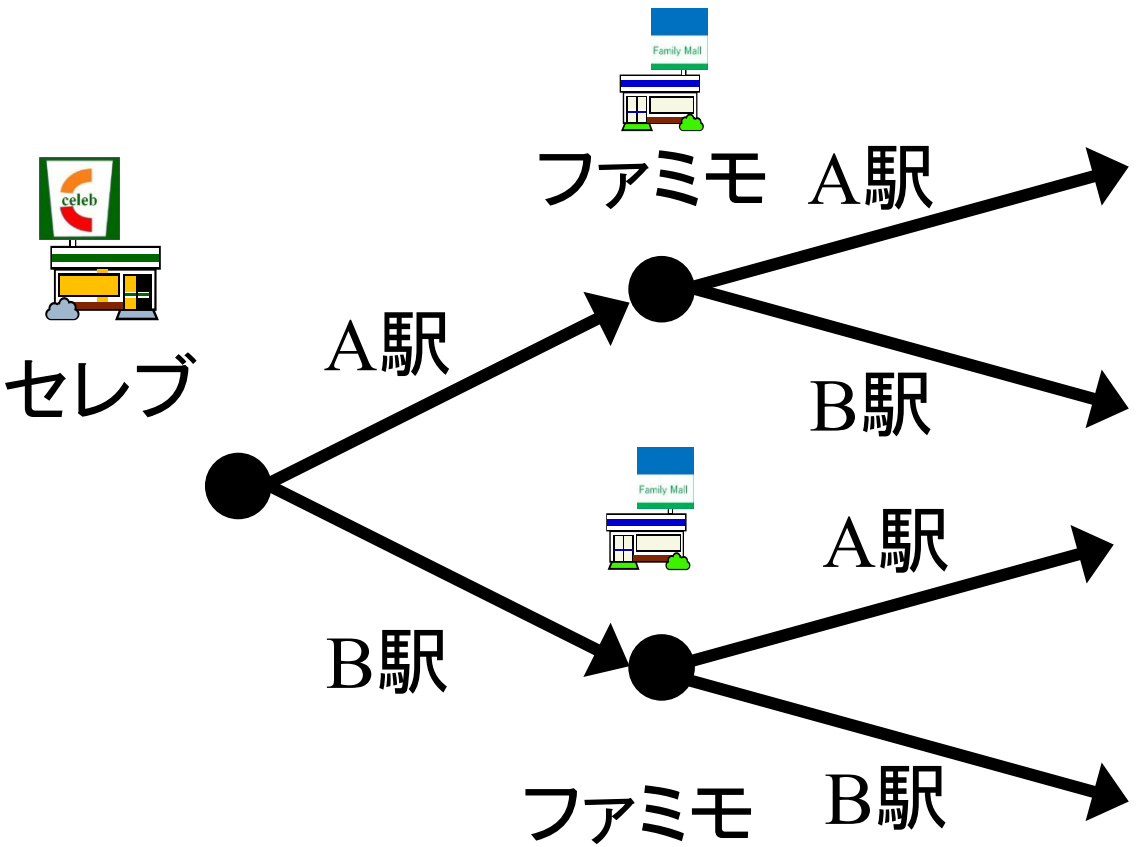
- ここまで学んだこと
  - 戦略形ゲーム－全プレイヤーが同時に行動するゲーム
  - 時間的な順序ではなく，前に行動した人の選択した結果が観察できる事が重要（隠れじゃんけんを思い出せ）
- 展開形ゲーム
  - それ以外（あるプレイヤーが、他のプレイヤーの行動した結果を分かってから行動するゲーム）も表現可能なゲーム
  - 完全情報の展開形ゲーム
  - 完全情報：全プレイヤーが，順番に行動し、自分より前に行動したプレイヤーの行動がすべて分かる

モデル　I市コンビニ戦争PART4

- セレブの出店が早い
- ファミモはセレブの出店場所を知ってから，自分の出店場所を選べる（セレブが先手，ファミモが後手）
- 「A駅」の利用客　600人
- 「B駅」の利用客　300人
- 違う場所なら利用客を独占
- 同じ場所なら，ファミモはセレブの2倍の客数を獲得できる
  - A駅：　セレブ 200人　　ファミモ 400人
  - B駅：　セレブ 100人　　ファミモ 200人



ゲームの木



セレブ	ファミモ
200	400
600	300
300	600
100	200

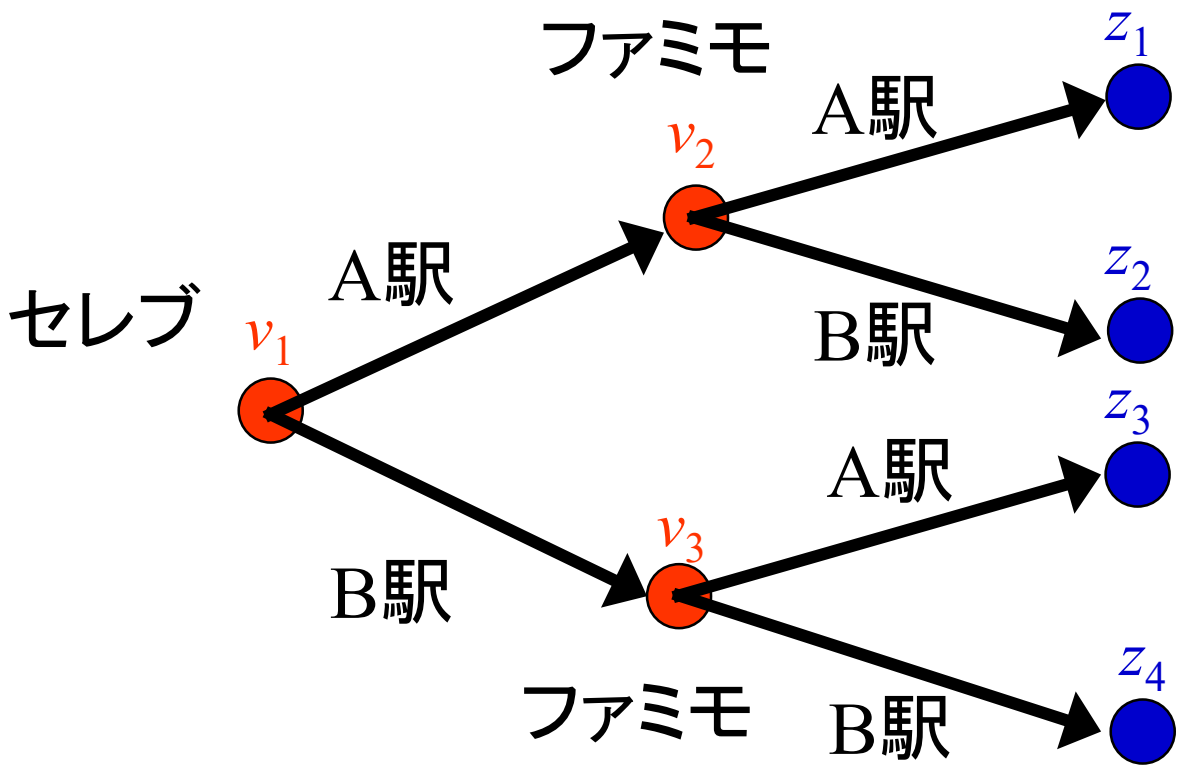
ゲームの木とは？

- ゲームの木・・・点と枝からなる
  - 点　プレイヤーの行動のタイミングと結果を示す
  - 枝　点と点を結び行動の順序を示す
- 2種類の点
  - 意思決定点　プレイヤーが行動する点
    - どのプレイヤーが行動するかを横に記す
  - 終点　プレイヤーが行動した結果を示す点
    - 利得を記す
- 行動（選択肢，代替案）
  - プレイヤーが意思決定点で選択するものを行動（または選択肢，代替案）と呼ぶ
  - 1つの行動は1つの枝に対応する

意思決定点と終点

意思決定点　$v_1\ v_2\ v_3$

終点　$z_1\ z_2\ z_3\ z_4$

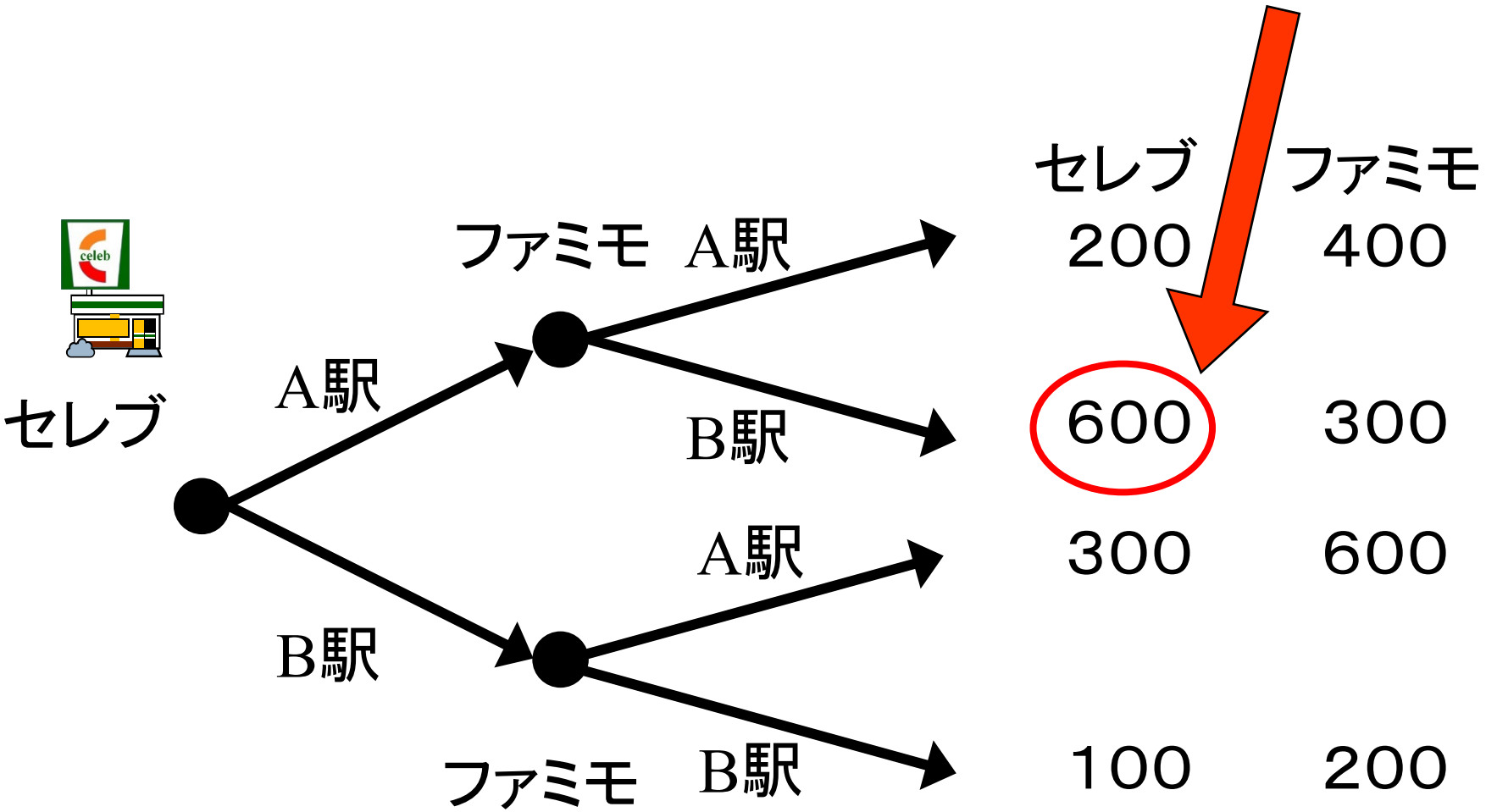


	セレブ	ファミモ
z_1	200	400
z_2	600	300
z_3	300	600
z_4	100	200

展開形ゲームの解は？

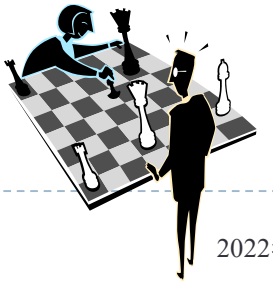
- 先手のセレブはどう考えるべきか？
- 大きな利得を狙ってA駅か？

高い利得を狙うなら
A駅に立地だが？



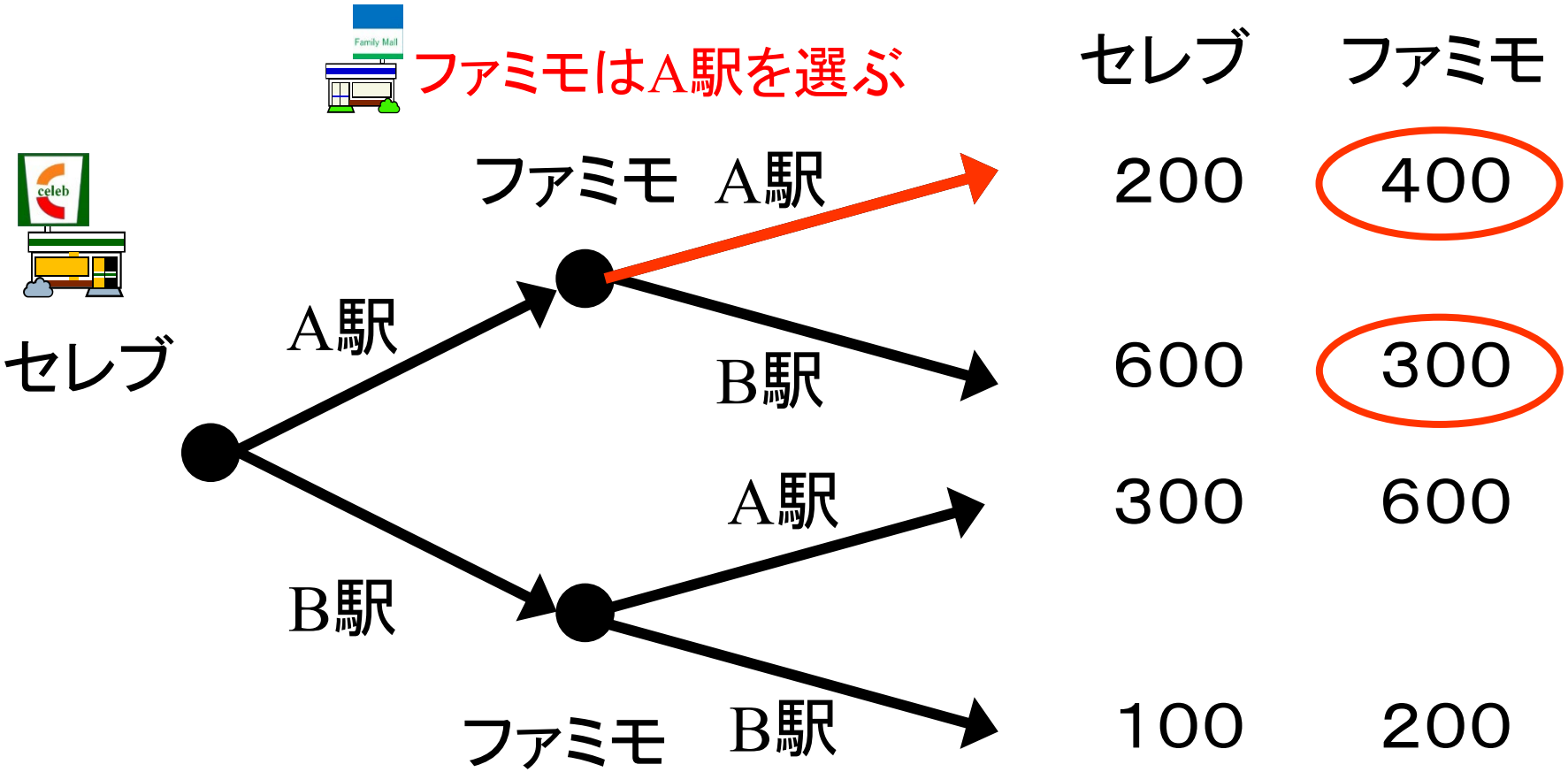
展開形ゲームの解は？

- セレブVSファミモ　先手のセレブはどう考えるべきか？
- ゲーム理論の考え方はどうだったろうか？
  - 相手の出方・行動を考える
  - 相手が自分に都合のいいように行動するとは考えない
- 「先読み」で考えよ
  - 自分が「A駅」なら，後手のファミモはどうするか？そのときの自分の利得は？
  - 自分が「B駅」なら，後手のファミモはどうするか？そのときの自分の利得は？



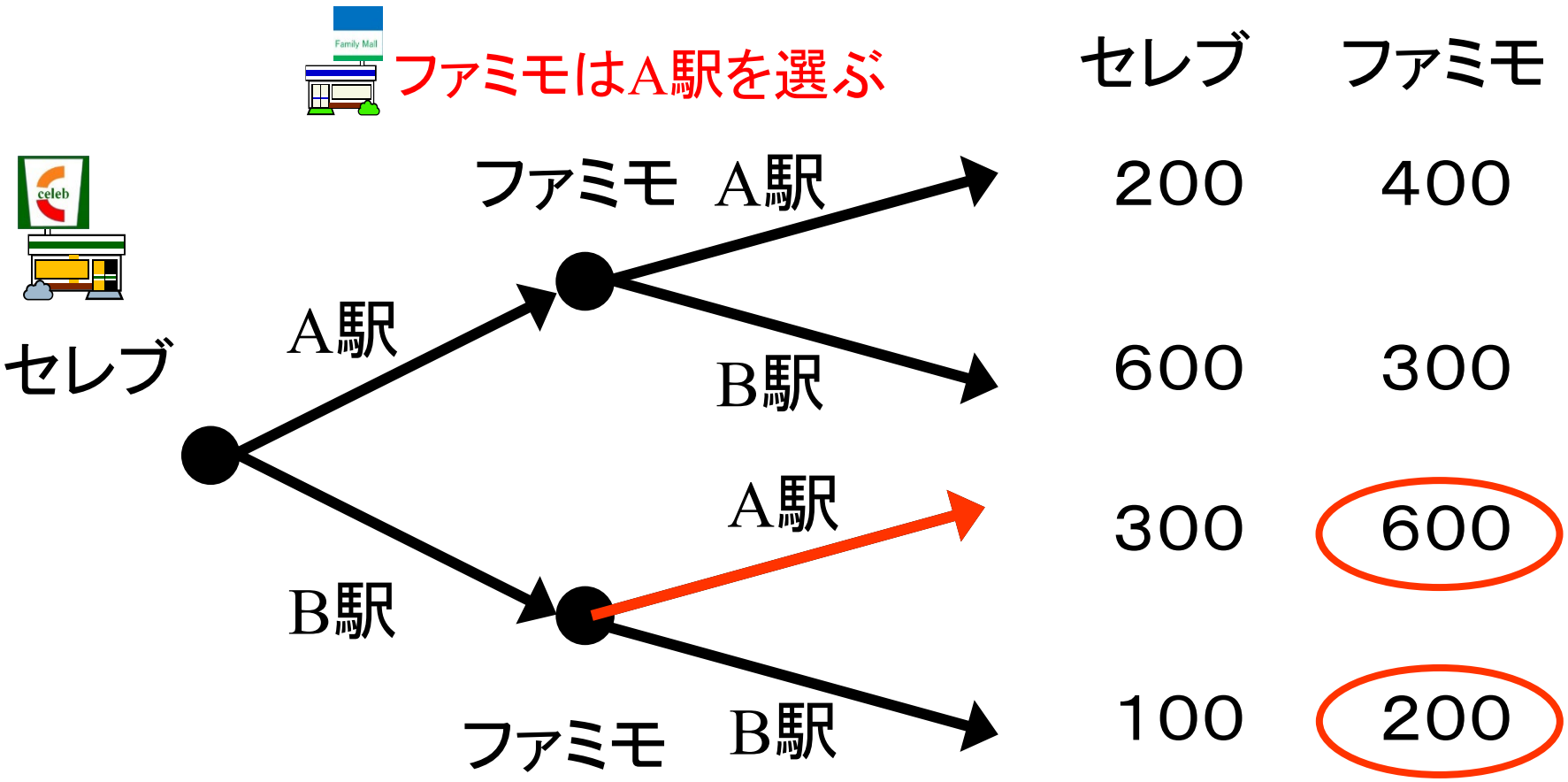
セレブは先読みで考えよ　#1

- セレブの立場で考える
- 自分（セレブ）がA駅に立地すると？

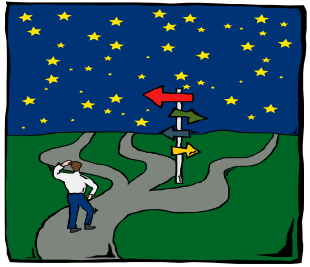


セレブは先読みで考えよ　#2

- 自分（セレブ）がB駅に立地すると？

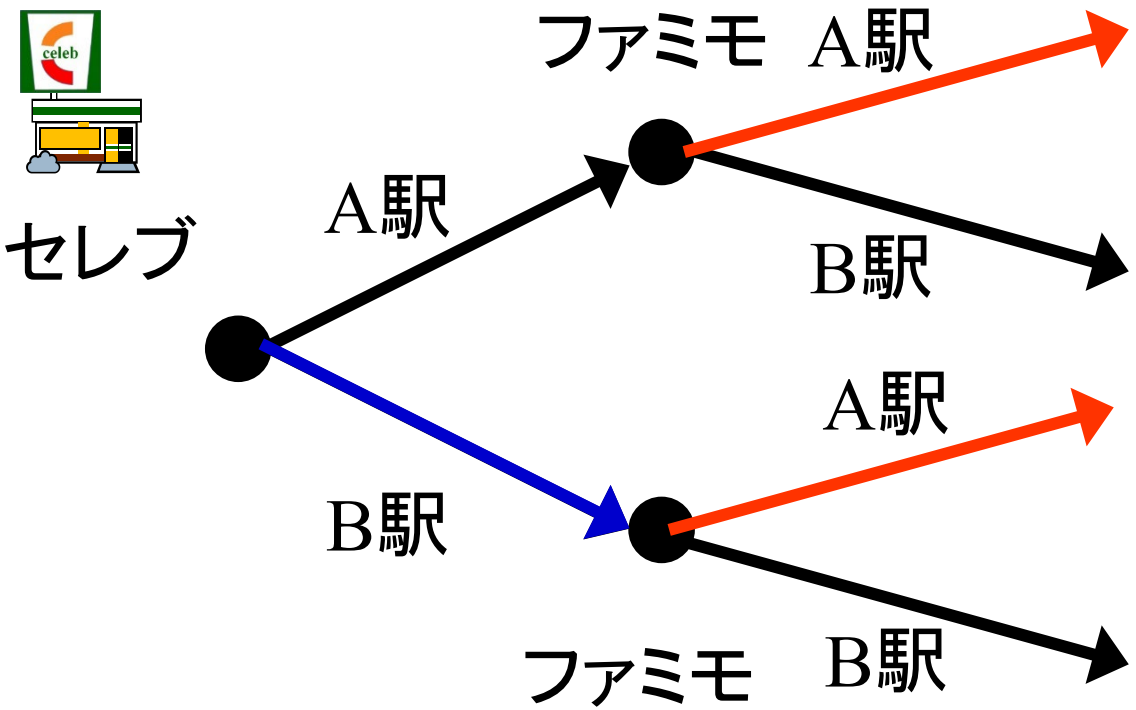


セレブは先読みで考えよ　#2



- セレブは先読みでどちらを選ぶか考える

セレブはB駅を選ぶべき！



セレブ	ファミモ
200	400
600	300
300	600
100	200

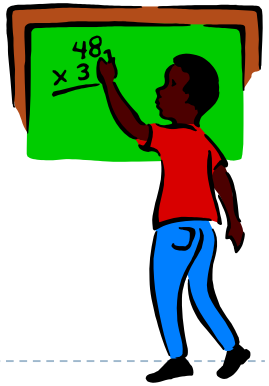
ポイント

ゲームの木は「先読み」で解く

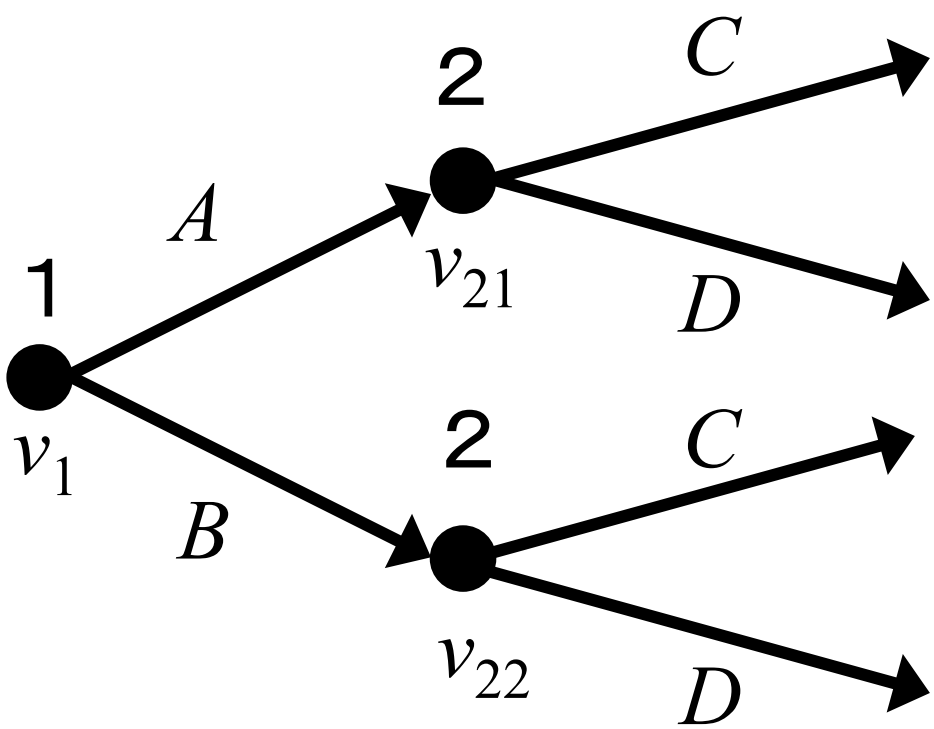
「先読み」の解法:バックワードインダクション

- 「先読み」をシステマティックに行う
- まず，終点の直前のプレイヤーがどのような意思決定を行うか解く
- そのプレイヤーの行動が決まったとして，その直前のプレイヤーの行動を解く
- そのプレイヤーの行動がすべて決まったとして，そのまた直前の･･･と続け最後まで解く

バックワードインダクション

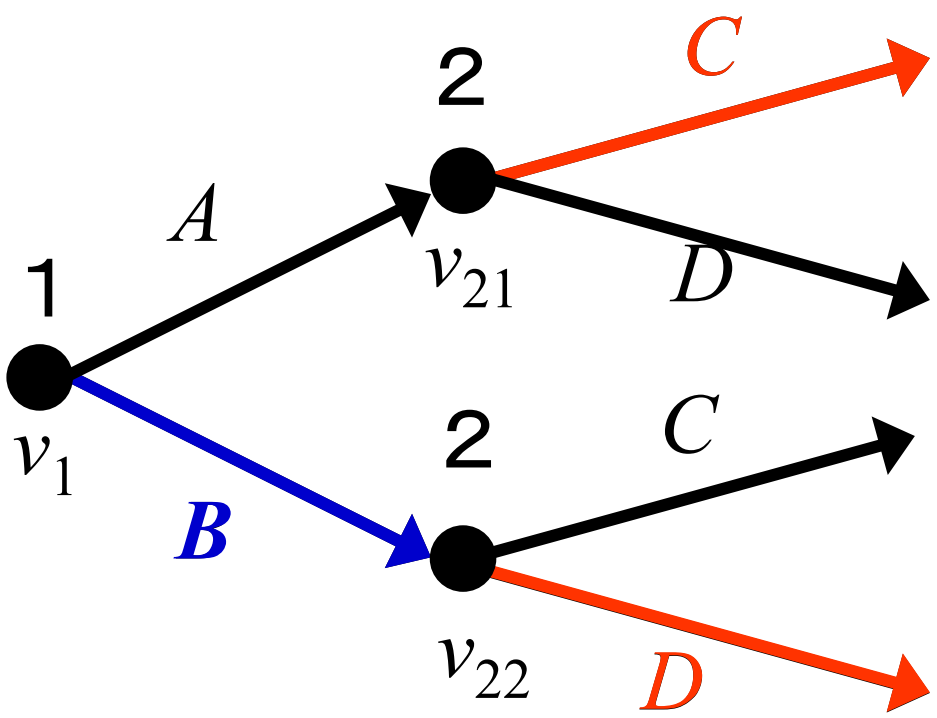


バックワードインダクション　＃１



	プレイヤー1	プレイヤー2
	2	4
	6	3
	1	2
	3	6

バックワードインダクション　＃２



	プレイヤー1	プレイヤー2
	2	4
	6	3
	1	2
	3	6

定義　ゲームの解，ゲームの結果，均衡経路

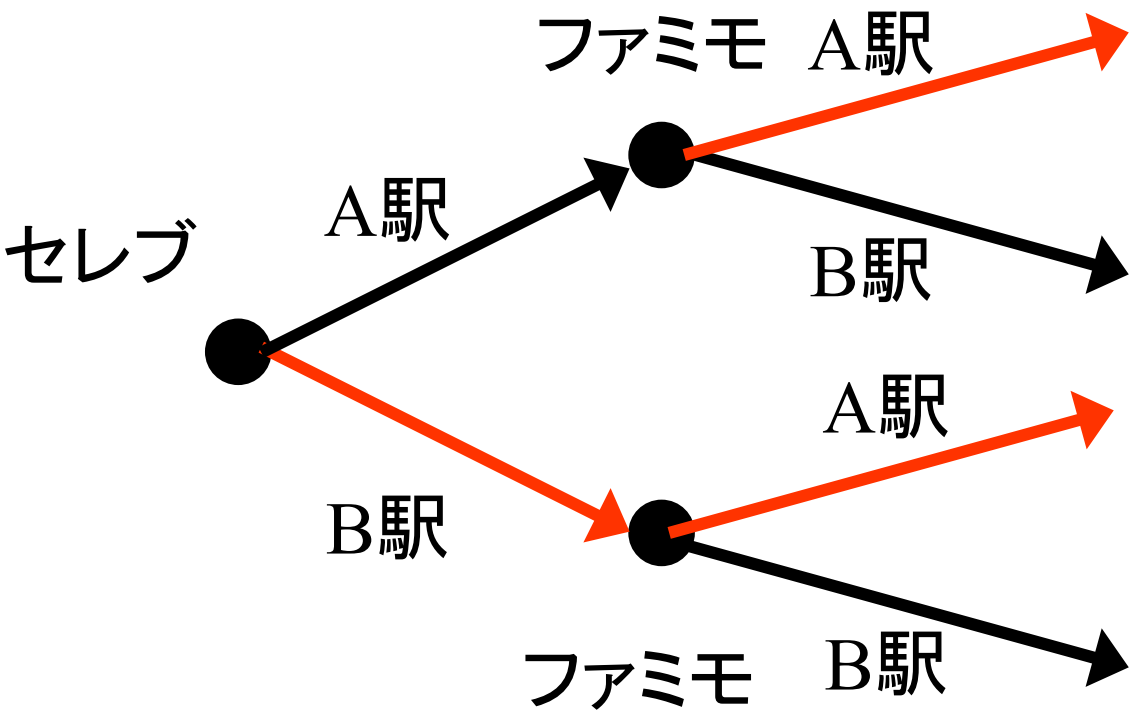
- ゲームの解：すべての意思決定点でどのような行動が選択されたか
- ゲームの結果：ゲームの解によって，実現した終点
- 均衡経路：ゲームの解により，初期点から終点まで，プレイヤーに選択された枝によってできる経路

- ゲームの解と均衡経路を区別する
- 経路，均衡経路という用語の定義は，戦略の概念を明確にした後に，明確になる（後で）

ゲームの解

- ゲームの解：すべての意思決定点で，どの選択が行われるかをすべて書いたもの

これがゲームの解

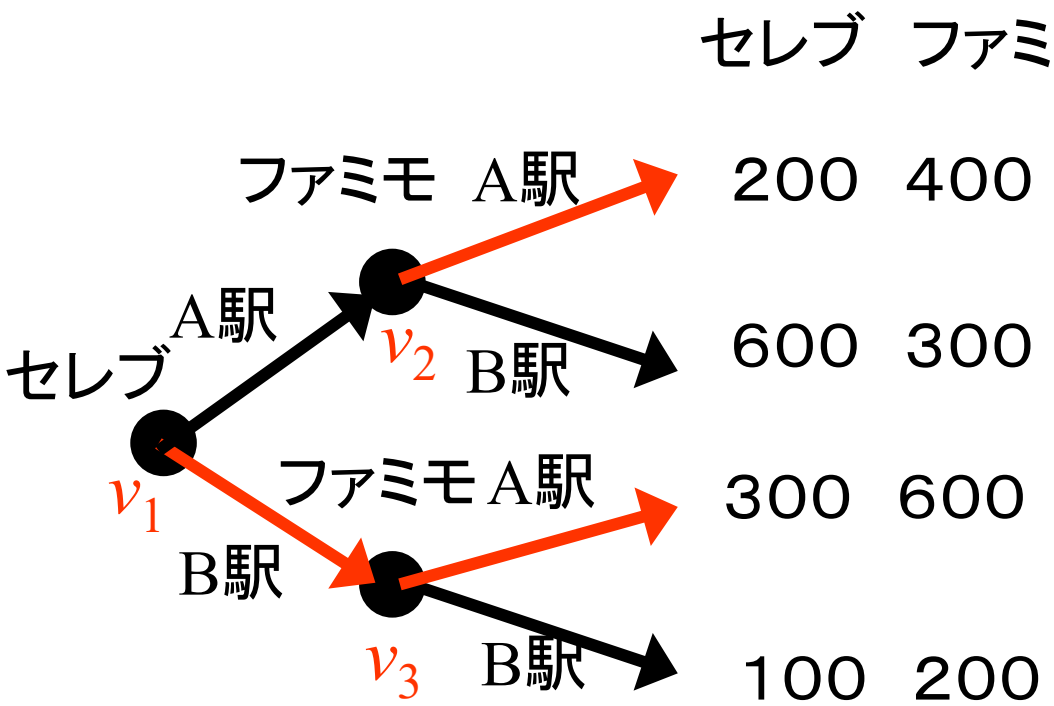


セレブ	ファミモ
200	400
600	300
300	600
100	200

ゲームの解の記述

ゲームの解を図に書き込めないとき

意思決定点のラベルに対応させ，どの意思決定点で何を選んだかを書く

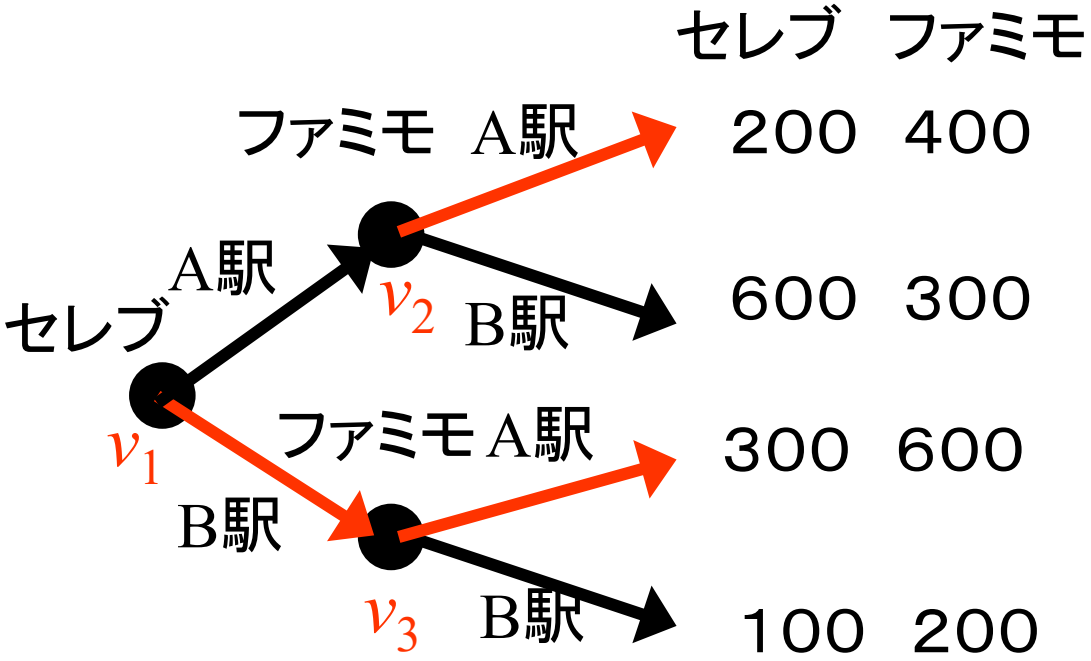


ゲームの解

セレブ	v_1	B駅
ファミモ	v_2	A駅
	v_3	A駅

均衡経路

- ゲームの解により，初期点から終点まで，プレイヤーに選択された枝によってできる経路



均衡経路

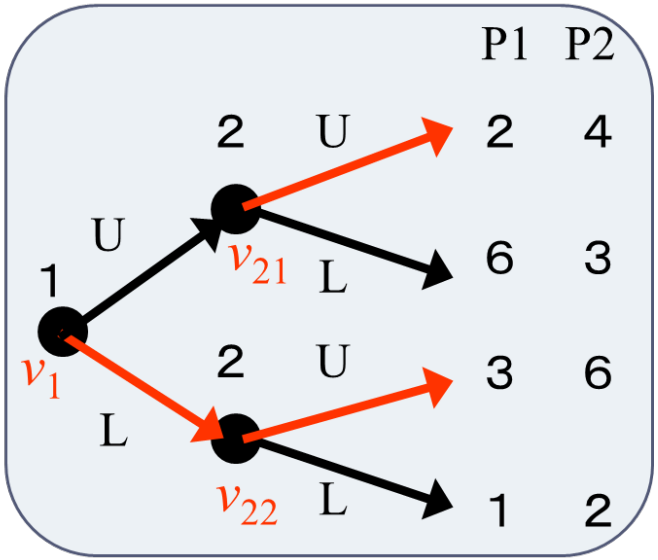
まずセレブはB駅を選び，次にファミモはA駅を選ぶ

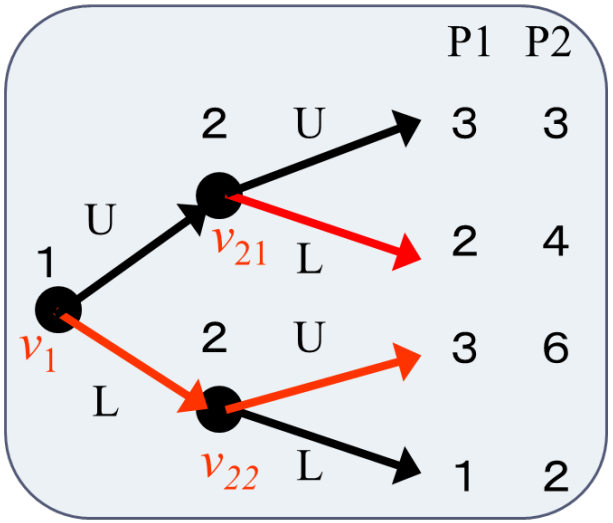
均衡経路はゲームの解によって実現した結果を表す

「セレブがA駅を選んだ時にファミモが何を選んだか」はゲームの解ではあるが，起きた結果に関係がない

均衡経路

- ゲームの解は異なっても，均衡経路は同じになることがある





プレイヤー1		プレイヤー2	
v_{11}	L	v_{21}	U
		v_{22}	U

プレイヤー1		プレイヤー2	
v_{11}	L	v_{21}	L
		v_{22}	U

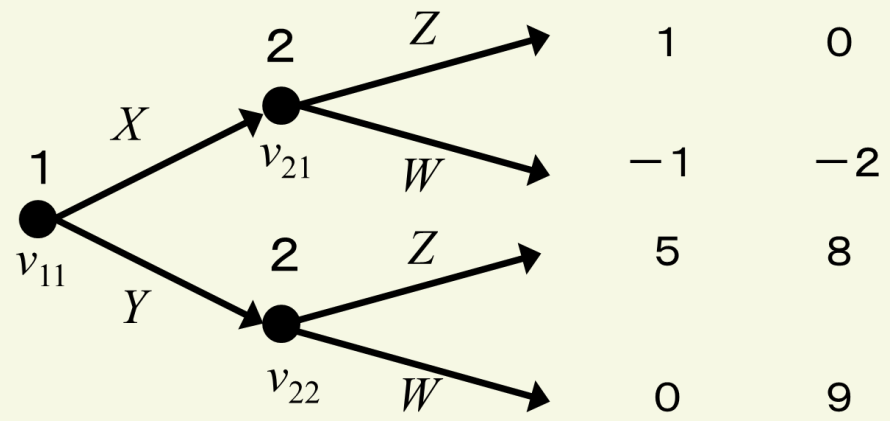
ゲームの解は異なるが，均衡経路＝起きた結果は同じ
プレイヤー1がLを選んで，プレイヤー2がUを選ぶ

演習★ バックワードインダクションで解を求めよ

- 利得は，左からプレイヤー1,2,3を表す
- v_{ij} はプレイヤーi の j 番目の意思決定点

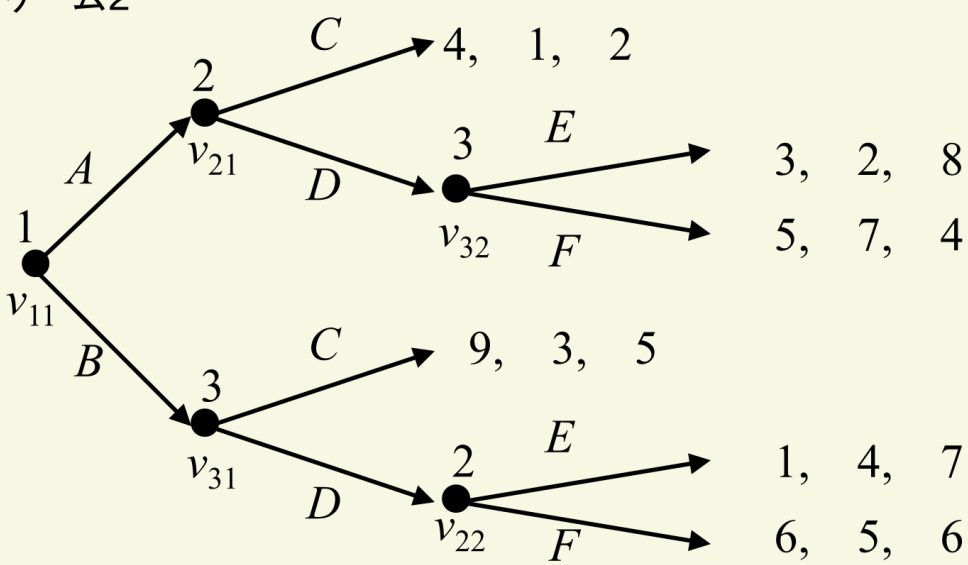
■ 演習3.1

ゲーム1



ゲーム2

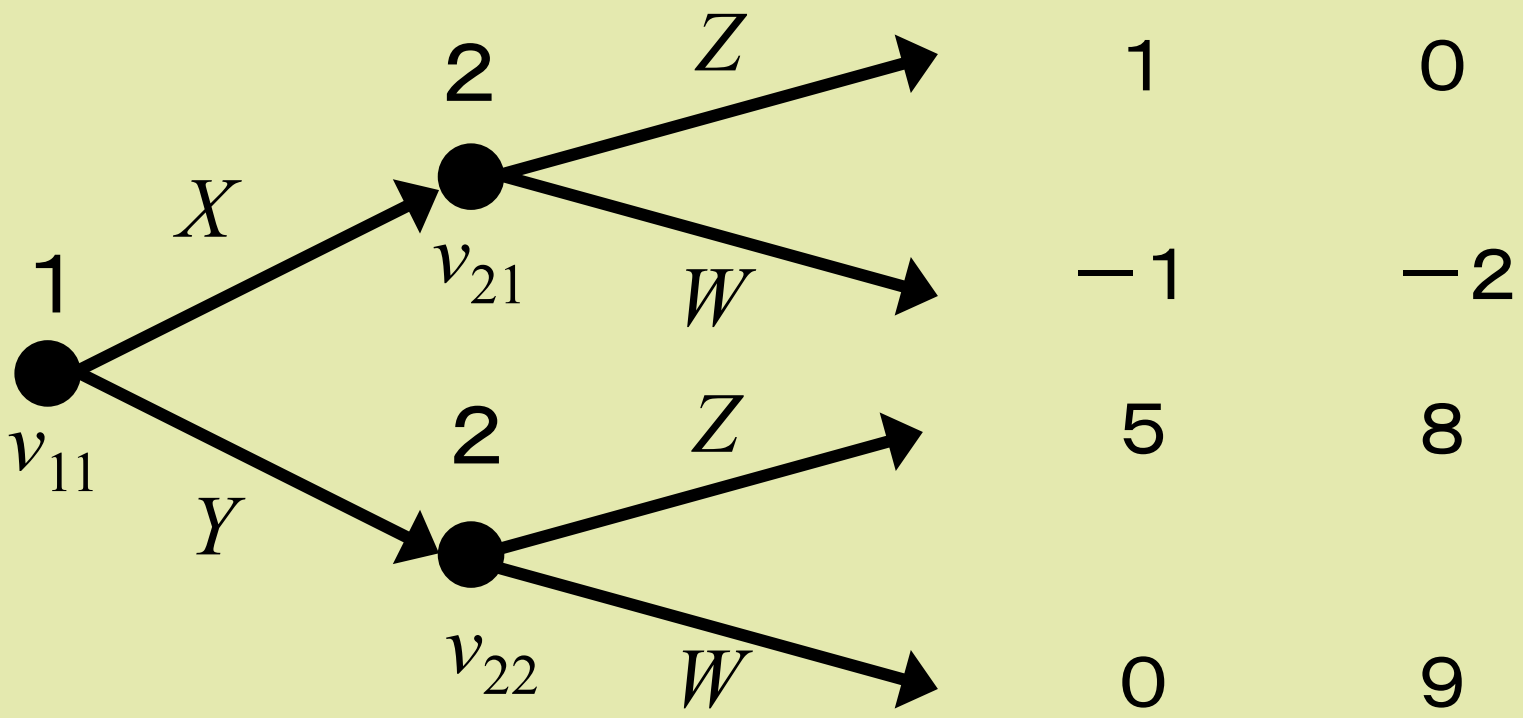
ゲーム2



演習　バックワードインダクションで解を求めよ

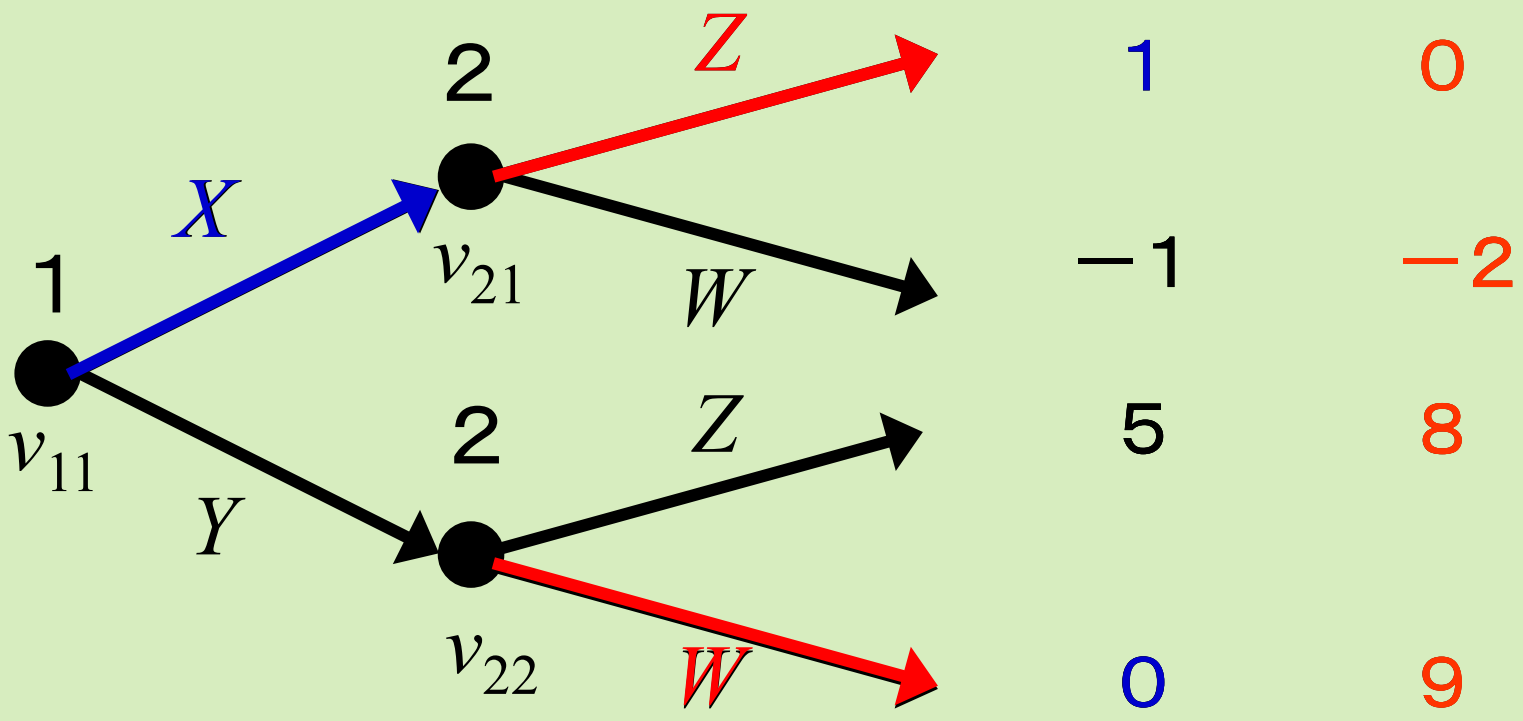
- 利得は，左からプレイヤー1,2を表す
- v_{ij} はプレイヤーi の j 番目の意思決定点

ゲーム1



解答　バックワードインダクションで解を求めよ

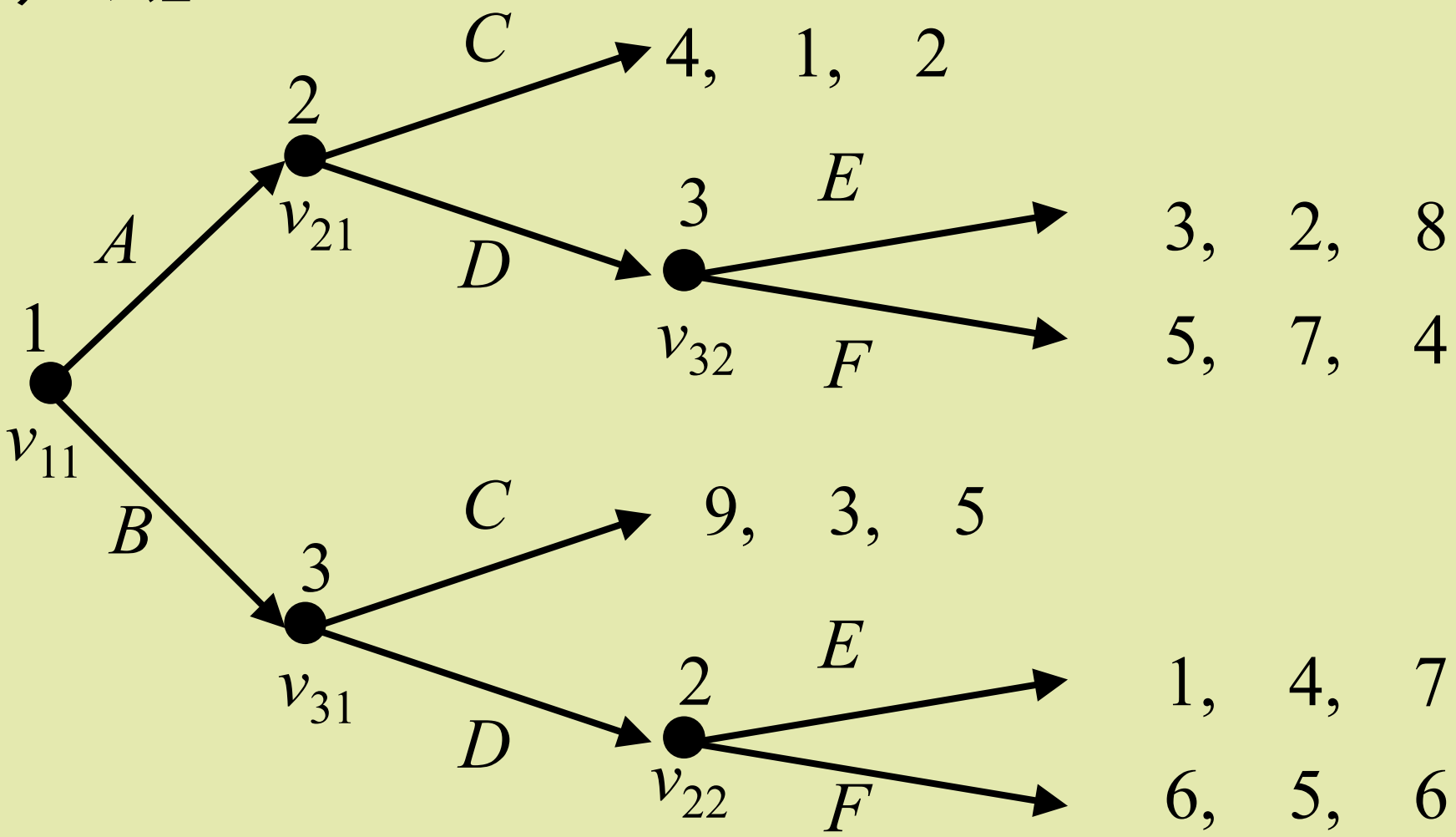
- 利得は，左からプレイヤー1,2を表す
- v_{ij} はプレイヤーi の j 番目の意思決定点



演習　バックワードインダクションで解を求めよ

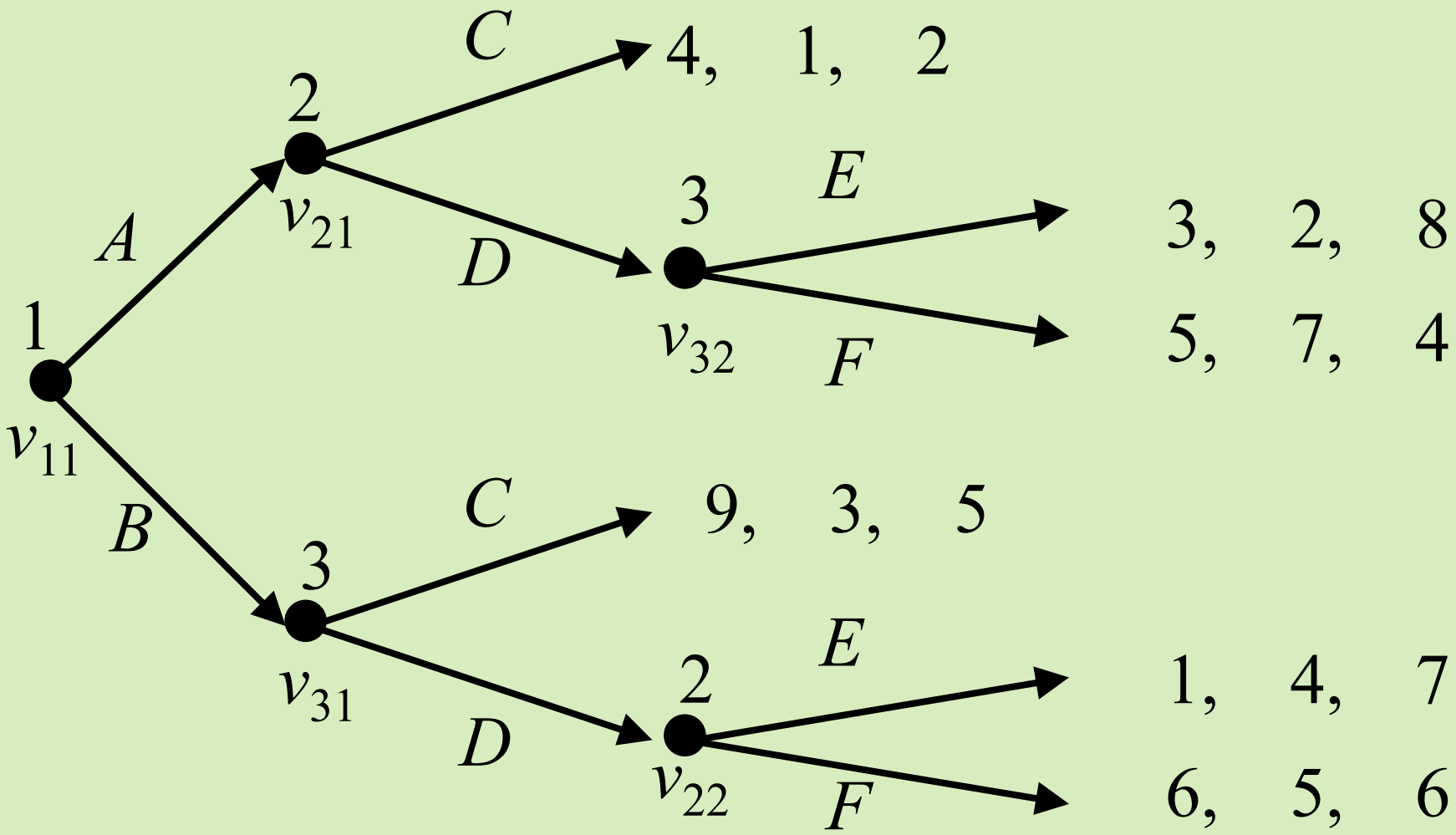
- 利得は，左からプレイヤー1,2,3を表す
- v_{ij} はプレイヤーi の j 番目の意思決定点

ゲーム2



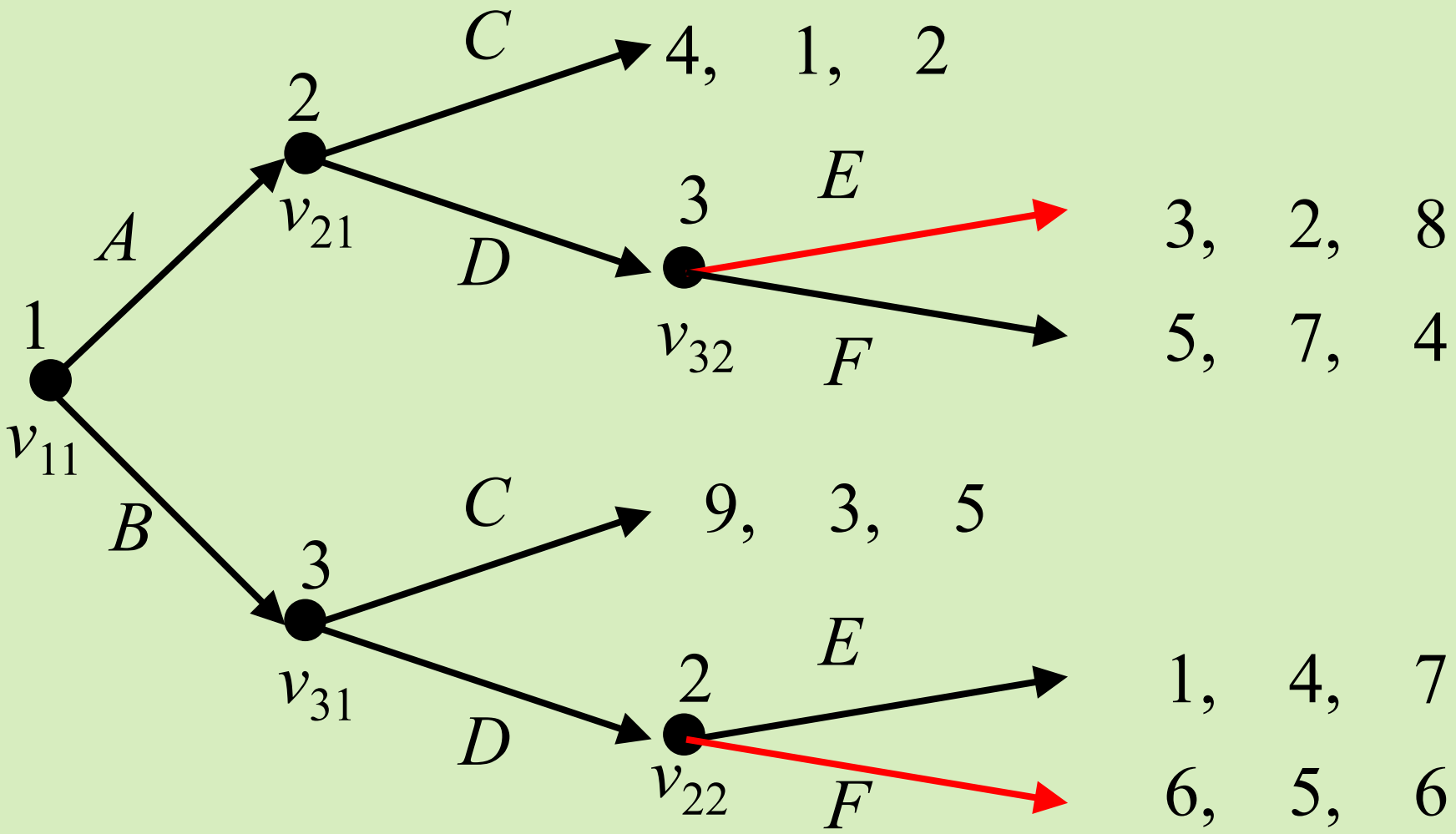
解答　バックワードインダクションで解を求めよ

- 利得は，左からプレイヤー1,2,3を表す
- v_{ij} はプレイヤーi の j 番目の意思決定点



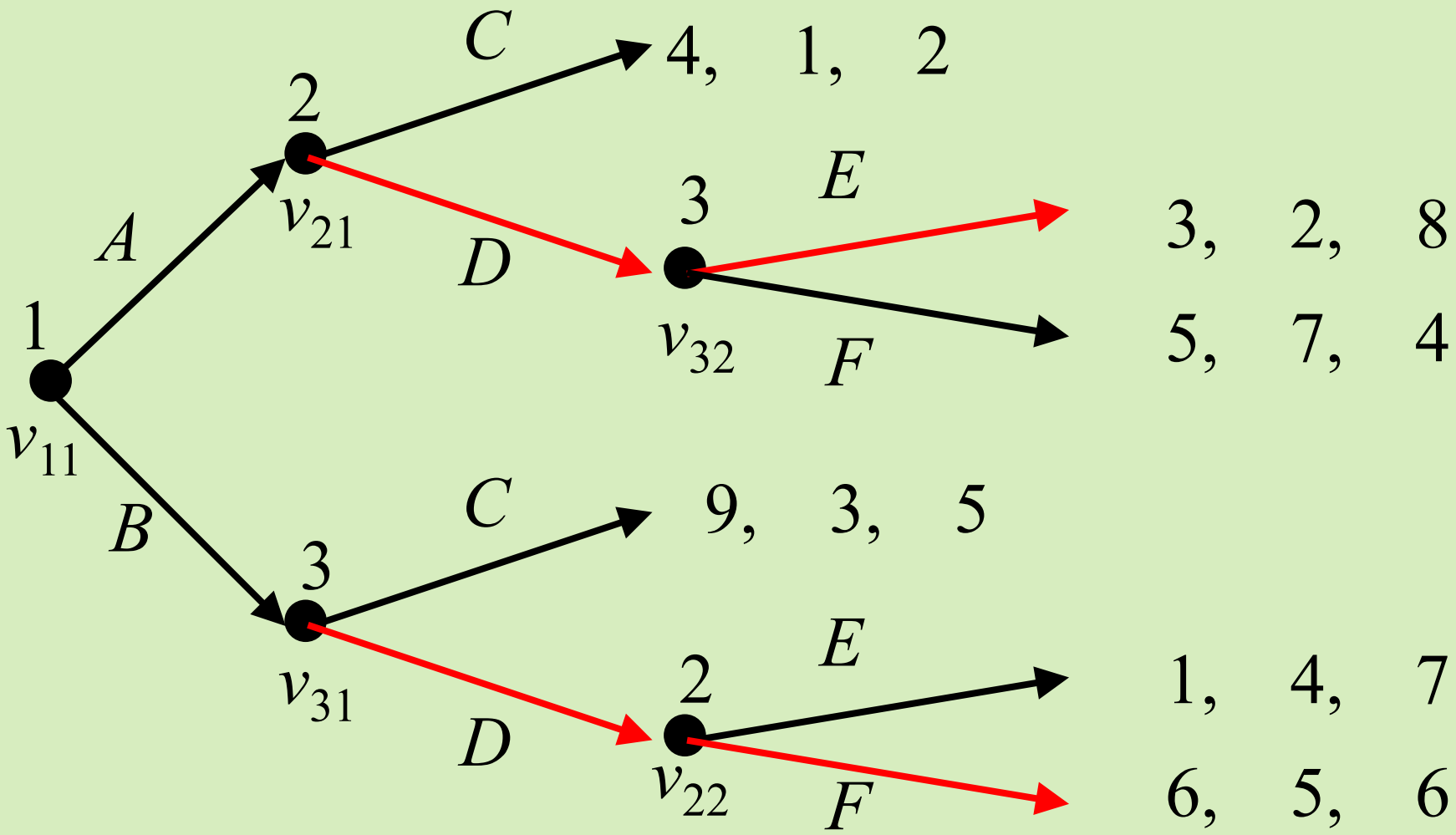
解答　バックワードインダクションで解を求めよ

- 利得は，左からプレイヤー1,2,3を表す
- v_{ij} はプレイヤーi の j 番目の意思決定点

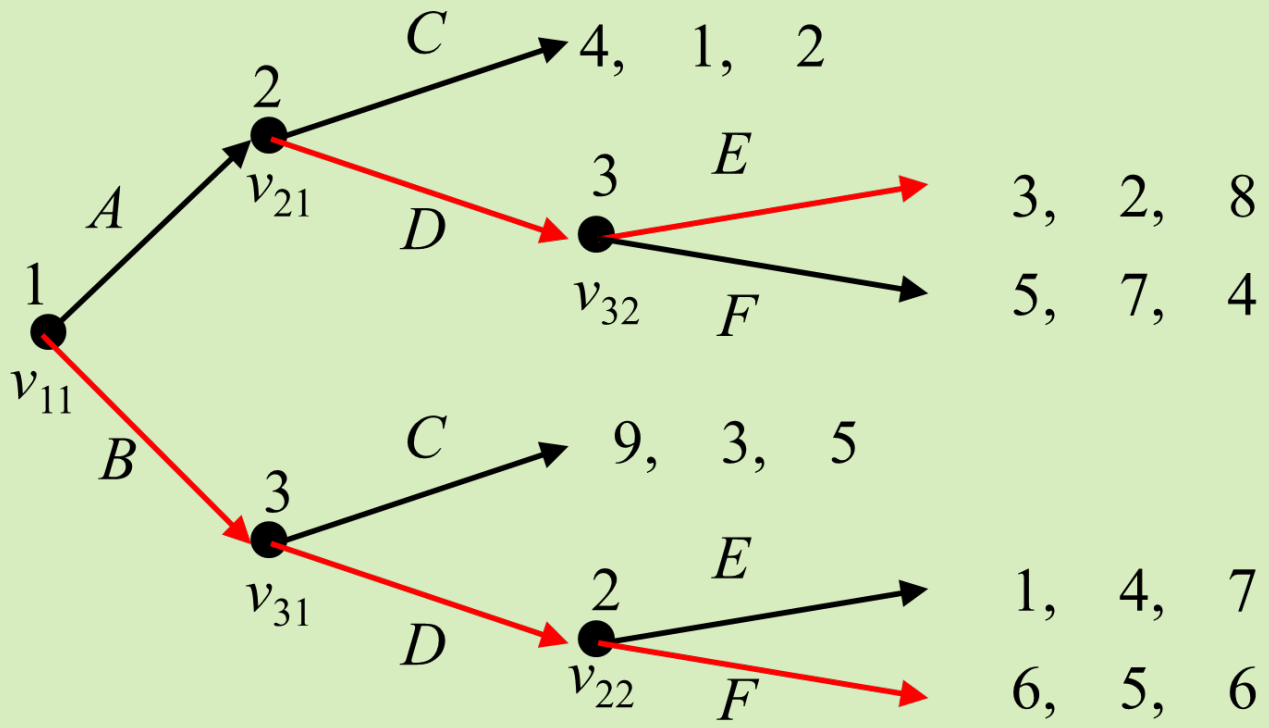


解答　バックワードインダクションで解を求めよ

- 利得は，左からプレイヤー1,2,3を表す
- v_{ij} はプレイヤーi の j 番目の意思決定点



解答　バックワードインダクションで解を求めよ



ゲームの解：各プレイヤーが，各意思決定点で，
何を選んだかを答える

プレイヤー1		プレイヤー2		プレイヤー3	
v_{11}	B	v_{21}	D	v_{31}	D
		v_{22}	F	v_{32}	E

均衡経路：
プレイヤー1がBを選び，
プレイヤー3がDを選び，
プレイヤー2がFを選ぶ

まとめ　完全情報の展開形ゲーム

- プレイヤーが交互に行動し，自分より前のプレイヤーが何を選んだかが完全にわかるゲームは完全情報の展開形ゲームと呼ばれる
- 完全情報の展開形ゲームは，ゲームの木で表現する
- 完全情報の展開形ゲームは，バックワードインダクションで解く
- ゲームの解と均衡経路を区別することが大切

6.2 一般の展開形ゲーム

一般の展開形ゲームの表現

不完全情報の展開形ゲーム

- これまで習った展開形ゲーム
  - どのプレイヤーも，自分より前に行動したすべてのプレイヤーのすべての行動が観察できる

→ **完全情報ゲーム**

- 一般には
  - あるプレイヤーは，自分より前に行動したあるプレイヤーのある行動が観察できない

→ **不完全情報ゲーム**

不完全情報ゲームの例は「同時ゲーム」である！

- 戦略形ゲームは不完全情報ゲーム
  - 2人が同時に行動する戦略形ゲーム
  - 2人が交互に行動するが，先手の行動が後手には分からない展開形ゲーム

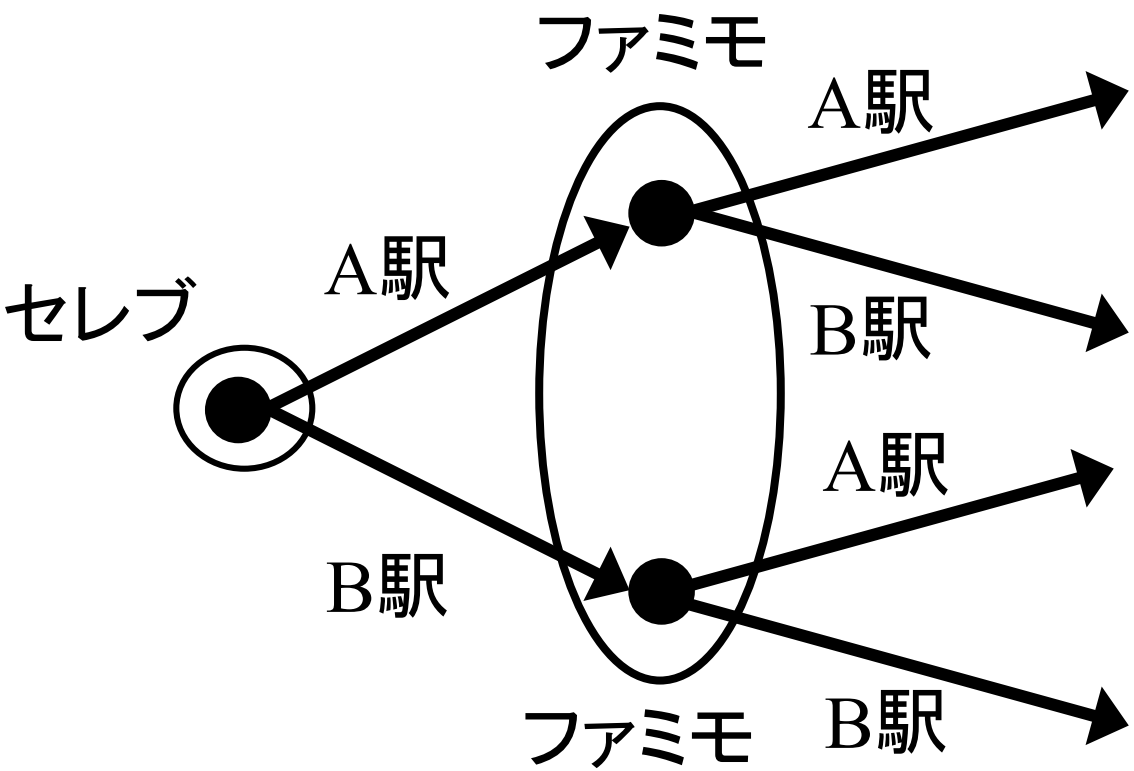
- 2つは同じゲームと考えることができる
  - 例)「面倒なじゃんけん」
  - 先手がグー，チョキ，パーを紙に書いて，後手がそれを見ずにじゃんけん

I市コンビニ戦争PART2を展開形ゲームで表してみよう

モデル24　I市コンビニ戦争PART5

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(300,300)	(600,400)
B駅	(400,600)	(200,200)

展開形ゲームで表現する



セレブ	ファミモ
300	300
600	400
400	600
200	200

意思決定点がグループ化され
線で囲まれている

→ **情報集合**

定義　情報集合（information set）

- プレイヤーの情報集合とは，そのプレイヤーがどの意思決定点でプレイするかを識別できないような，意思決定点の集合である．
- すべてのプレイヤーのすべての意思決定点の集合は，情報集合に分割される（交わりのない集合に分けられる）．

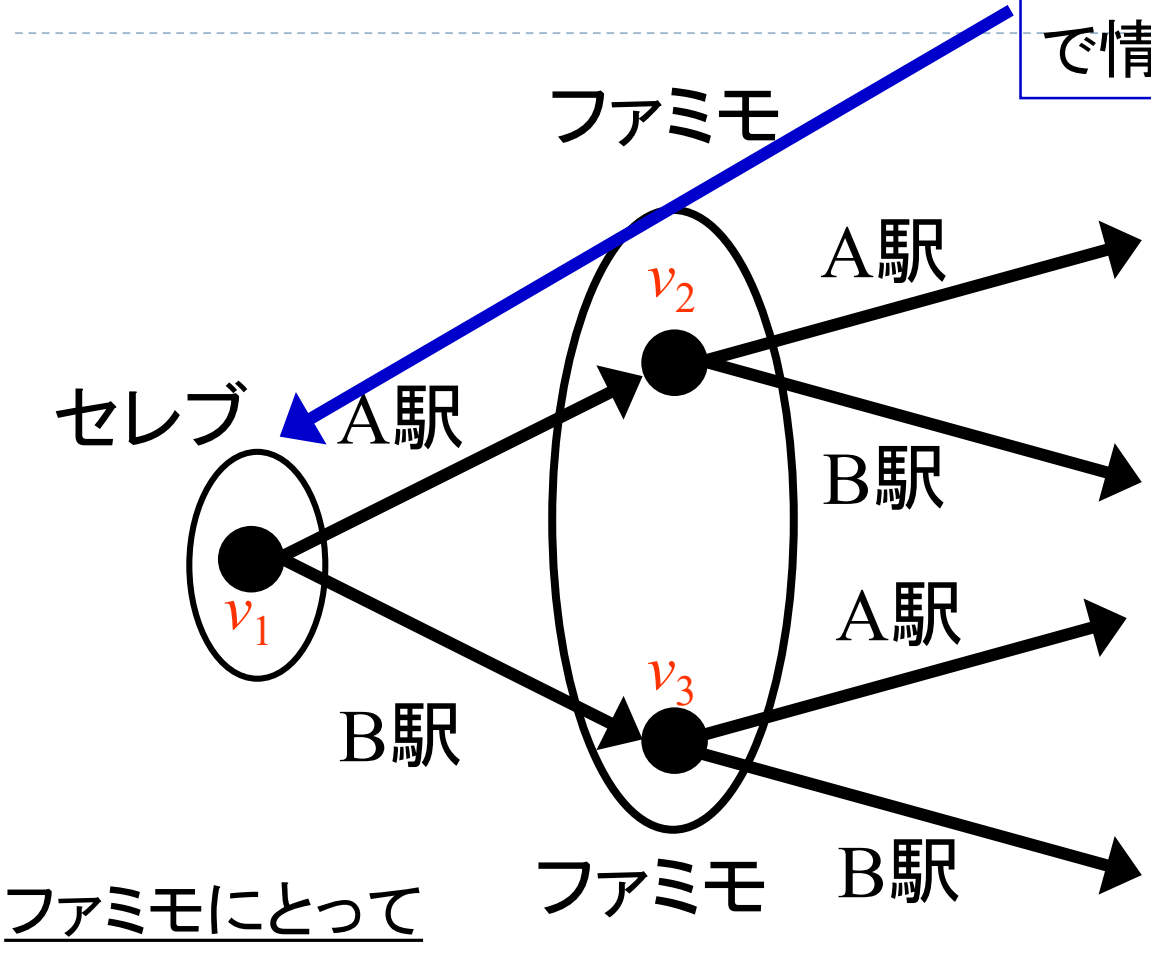
- 相手の行動が観察できない

＝自分がどの意思決定点にいるか識別できないと考える

- 識別できない点をグループ化して1つの集合と考える
- これを情報集合と呼ぶ

情報集合による表現

$v1$と識別できない点はないので情報集合に点は1つ



セレブ	ファミモ
300	300
600	400
400	600
200	200

ファミモにとって

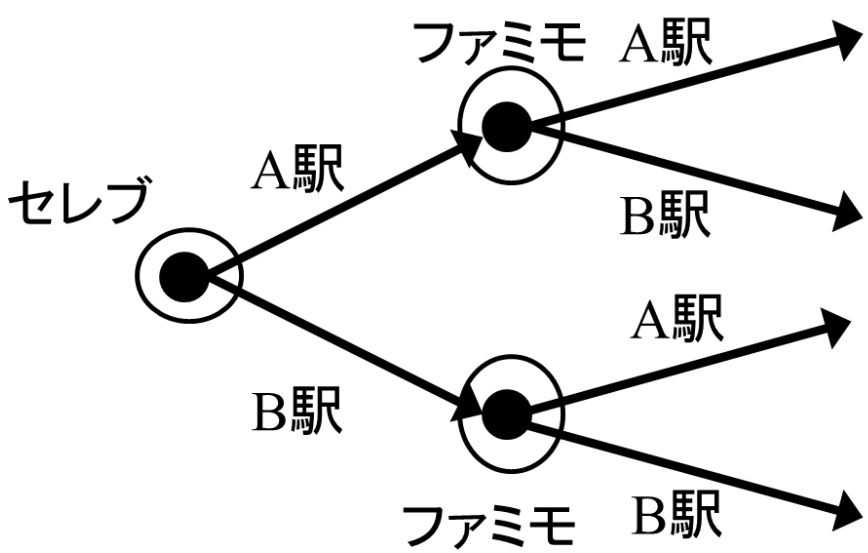
セレブがA駅を選んだのか，B駅を選んだのか観察できない

自分がv_2にいるのか，v_3にいるのか識別できない

完全情報の展開形ゲームと情報集合

完全情報ゲーム⇒すべての情報集合が1つの点からなる

情報集合に点が1つしかない



	セレブ	ファミモ
	300	300
	600	400
	400	600
	200	200

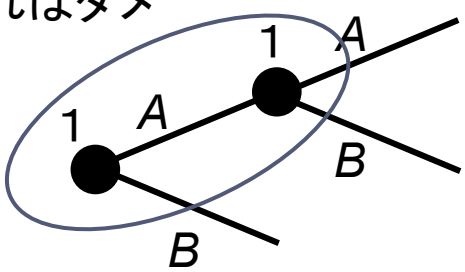
それ以前のプレイヤーの行動は全て観察できている

1つの点からなる情報集合は，書くと煩雑になるので，点と情報集合を同じとみなして省略することがある（これまでと同じ）

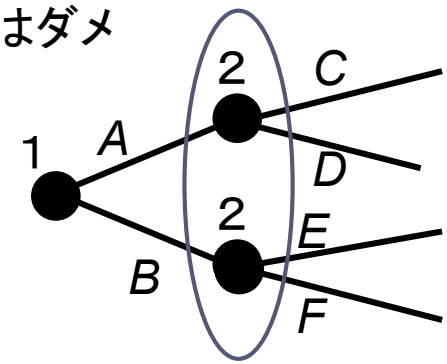
情報集合のルール

- 同じプレイヤーの意思決定点をグループ化したものでなければいけない
- 同じ情報集合の点に前後の関係があってはいけない
- 同じ情報集合の意思決定点から出る枝の行動は，全て同じでなければならない（当然，枝の数は同じでなければならない）

これはダメ



これはダメ

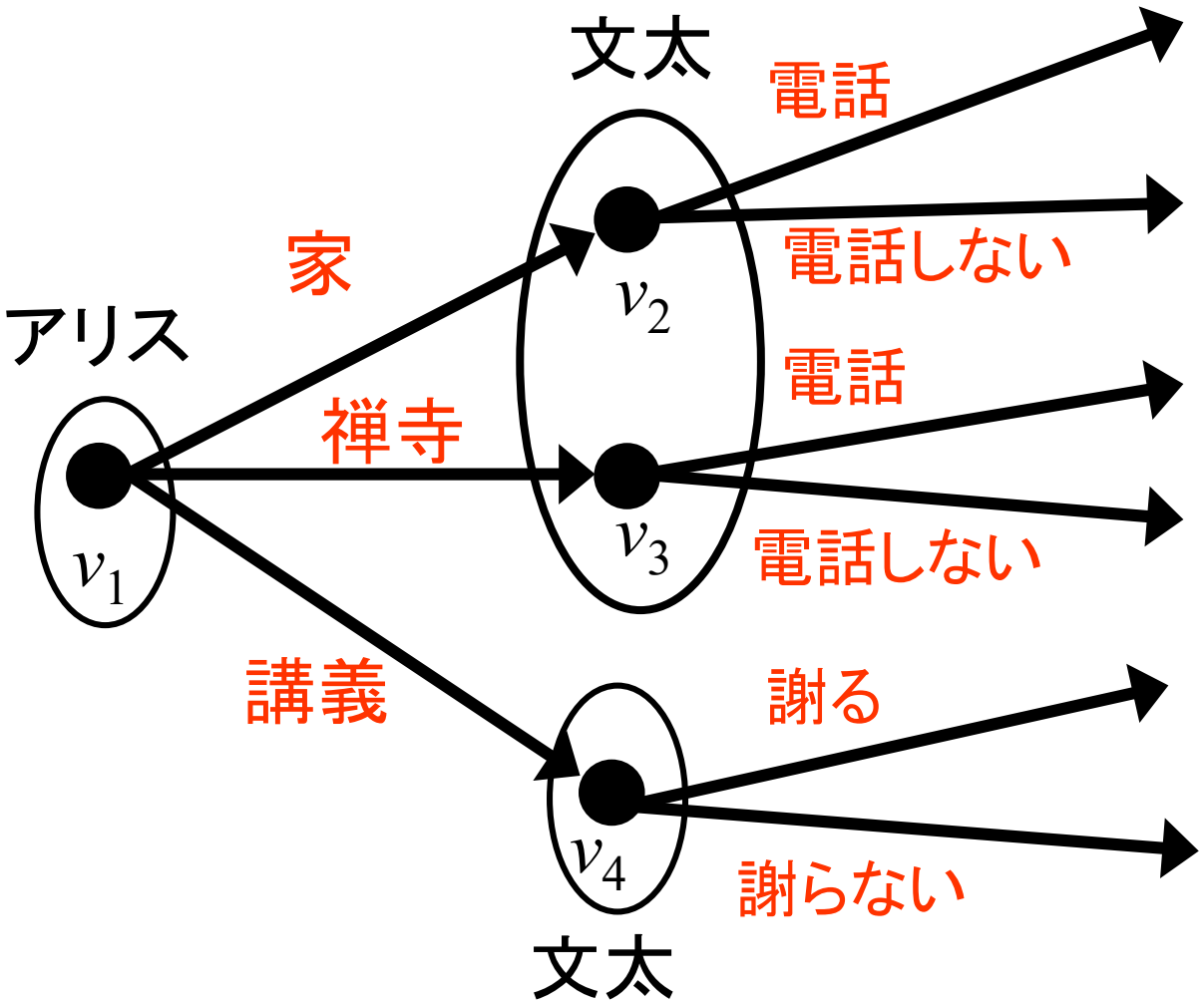


- この授業では情報集合としてH_1，H_2，H_{11}，H_{12}などの記号が用いられる
- H_{ij} でプレイヤーiのj番目の情報集合を表す
- そのプレイヤーの情報集合が1つだけのときはH_iと書くことも

同時とも交互とも言えないゲーム

- アリスと文太は，恋人同士
- 昨日喧嘩をした2人。文太は講義に出て彼を待つ
- 文太はアリスが講義に来たならば、彼女に謝るか、謝らないかを決めようと思っている
- 一方、アリスは講義に出て文太に会うか、1人で家にいるか、禅寺で自分を見つめ直すかを迷っている
- 講義に来なかった場合、文太はアリスに電話をするか、しないか決める
- そのとき、アリスが家にいれば良いのだが、禅寺にいたときに電話が鳴ると、アリスも文太も和尚にひどく叱られる。
- どちらにいるかは重要な問題だが、文太はそれを知らない！

同時と交互とも言えないゲーム



情報集合を用いれば,

同時とも交互とも言えないような,様々なゲームを表現することができる

まとめ　一般の展開形ゲーム表現

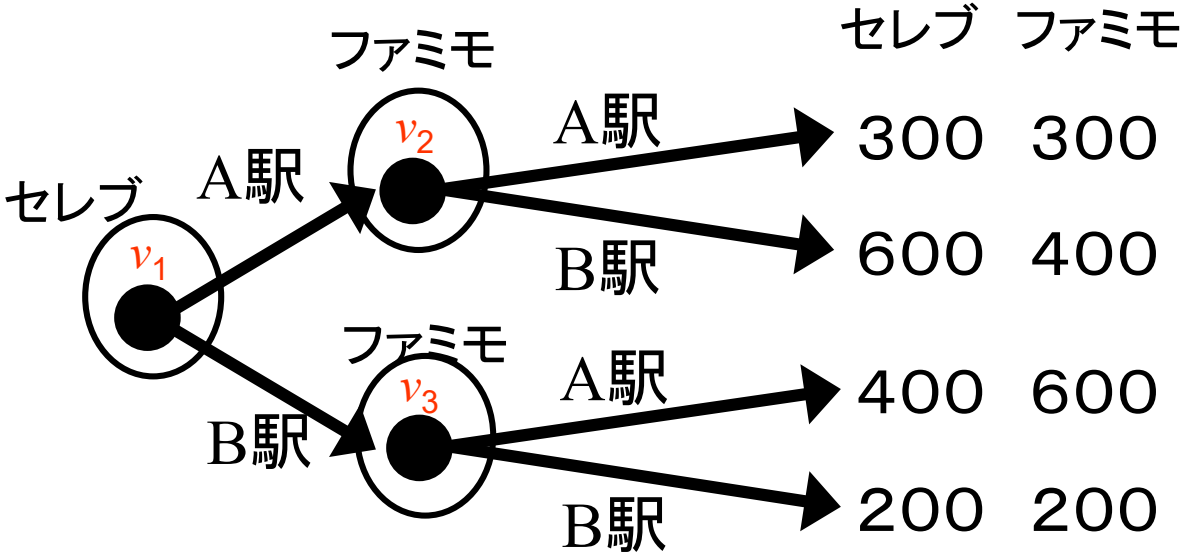
- 自分が行動する以前に行動したプレイヤーの行動が，すべて分かるゲームを完全情報ゲーム，そうでないゲームを不完全情報ゲームと呼ぶ.
- プレイヤーが同時に行動する戦略形ゲームは，自分より前に行動したプレイヤーの行動が何であるか分からない展開形ゲームと考えられ，不完全情報ゲームの1つである.
- 不完全情報ゲームでは，各プレイヤーが識別できない意思決定点の集合を情報集合としてグループ化して表す．情報集合によって，そのプレイヤーが観察できない他のプレイヤーの行動が何であるかを表すことができる.
- すべてのゲームは情報集合を用いて展開形ゲームで表現することができる.

6.3 戦略形ゲームへの変換

展開形ゲームを戦略形ゲームに変換する

- すべての戦略形ゲームは展開形ゲームで表現できることがわかった
- 一方で，すべての展開形ゲームは戦略形ゲームに変換できる
- どうやって？
  - 各プレイヤーは，相手の行動を見てから行動を決めるのではなく，「相手がどのような行動をしたら，どのような行動をするのか，すべての場合に，あらかじめ（ゲーム前に）決めておく」と考える
  - 賢い，合理的なプレイヤーならば，そうするはず

完全情報展開形ゲーム



完全情報ゲーム

ファミモはセレブの行動を知ってから，自分の行動を決定できる．

セレブ：v_1でどう行動するかを決める

ファミモは，セレブが行動したのを見なくても，v_2とv_3で，それぞれどういう行動を選択をするのかを（ゲームが始まる前に）考えておくことが賢い行動！

展開形ゲームの戦略（完全情報ゲーム）

- 完全情報展開形ゲームでは，すべてのプレイヤーは「どの意思決定点でどの行動を選ぶか」をすべて決めておくと考える．
- これを完全情報展開形ゲームの戦略と呼ぶ
- セレブの戦略　：　A駅，　B駅　の2つ
- ファミモの戦略：　カッコの左と右にv_2とv_3で，それぞれ何を選ぶかを（カッコに並べて）書くことにする．
- 以下の4つ

（A駅, A駅）　v_2　でA駅を選び　v_3でもA駅を選ぶ

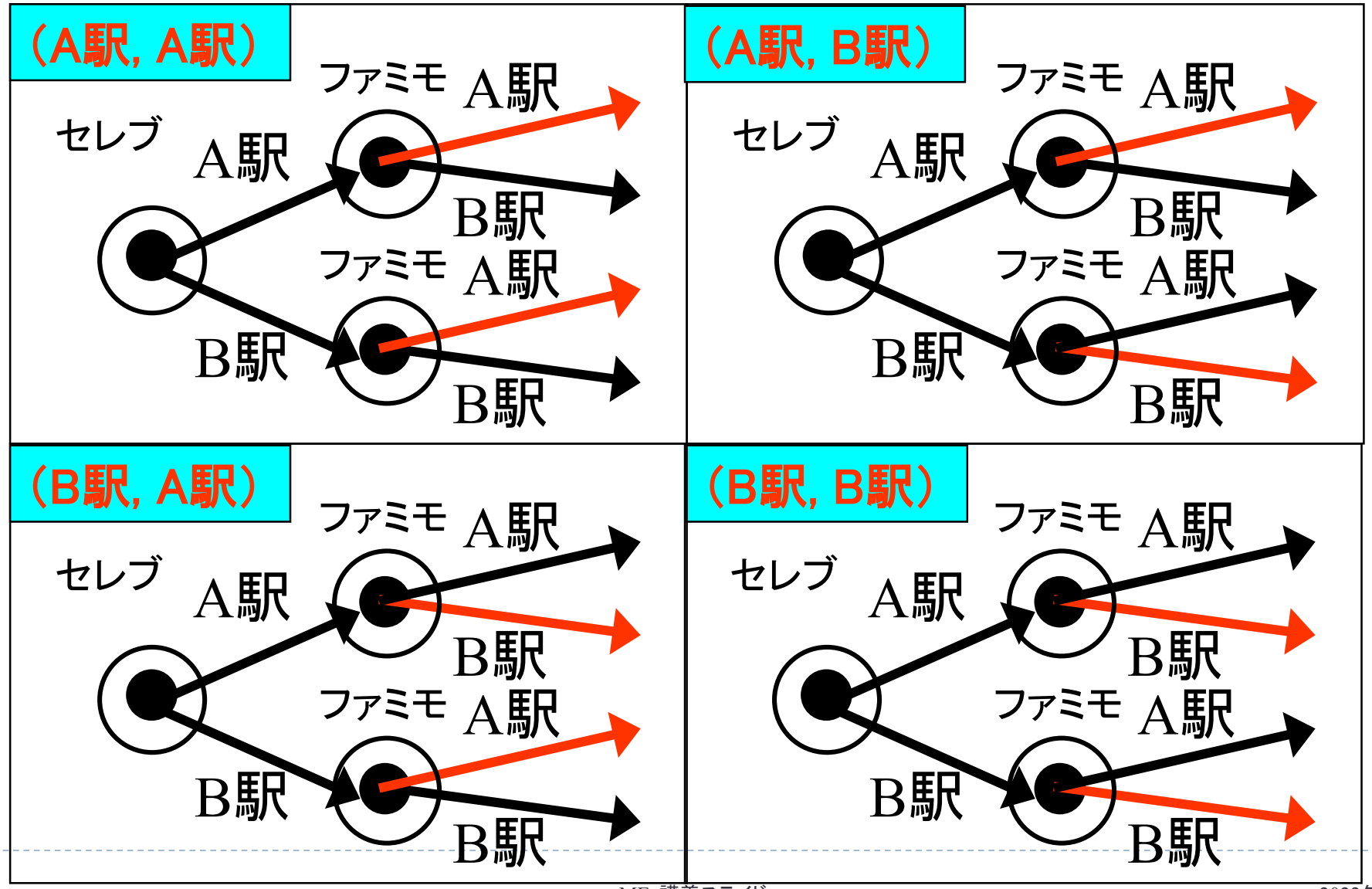
（A駅, B駅）　v_2　でA駅を選び　v_3でB駅を選ぶ

（B駅, A駅）　v_2　でB駅を選び　v_3でA駅を選ぶ

（B駅, B駅）　v_2　でB駅を選び　v_3でもB駅を選ぶ

テキストでは行動戦略と呼んでいるが，講義では単に戦略と呼ぶ

ファミモの4つの戦略

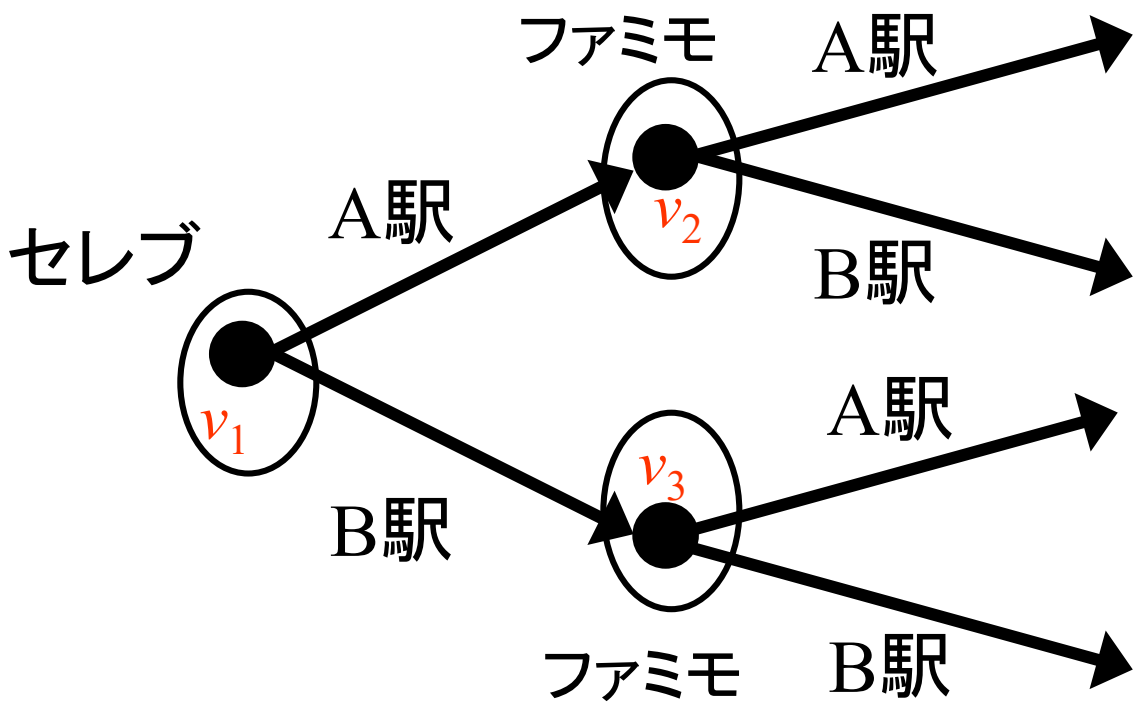

（A駅, A駅）
セレブ
A駅
ファミモ
A駅
B駅
ファミモ
A駅
B駅
B駅
（A駅, B駅）
セレブ
A駅
ファミモ
A駅
B駅
ファミモ
A駅
B駅
B駅
（B駅, A駅）
セレブ
A駅
ファミモ
A駅
B駅
ファミモ
A駅
B駅
B駅
（B駅, B駅）
セレブ
A駅
ファミモ
A駅
B駅
ファミモ
A駅
B駅
B駅

展開形ゲームの戦略（完全情報ゲーム）

- 完全情報展開形ゲームでは，すべてのプレイヤーはゲームが始まる前に「どの意思決定点でどの行動を選ぶか」をすべて決めておくと考える.
- これを戦略と呼ぶことにする
- 完全情報展開形ゲームは，すべてのプレイヤーが，「どの意思決定点でどの行動を選ぶか」という戦略を，ゲームが始まる前に同時に考えて，ゲームが始まるとその戦略のとおりに行動を実行する戦略形ゲームと考えることができる！

このように考えると完全情報展開形ゲームは，
戦略形ゲームに変換できる！

完全情報展開形ゲーム⇒戦略形ゲーム：例



セレブ	ファミモ
300	300
600	400
400	600
200	200

この完全情報の展開形ゲームを戦略形ゲームに変換してみよう

利得行列の作成#1　利得行列の枠を作成

戦略形ゲームへの変換:
STEP．１　利得行列のプレイヤーと戦略を並べて枠を作る！

ここで戦略とは？
各プレイヤーがすべての意思決定点で何を選ぶかを，列挙したもの

ファミモ セレブ	(A駅,A駅)	(A駅,B駅)	(B駅,A駅)	(B駅,B駅)
A駅				
B駅				

利得行列の作成 #2　利得の書き入れ1

ファミモ / セレブ	(A駅,A駅)	(A駅,B駅)	(B駅,A駅)	(B駅,B駅)
A駅	(300,300)			
B駅				

利得行列に利得を書き入れる

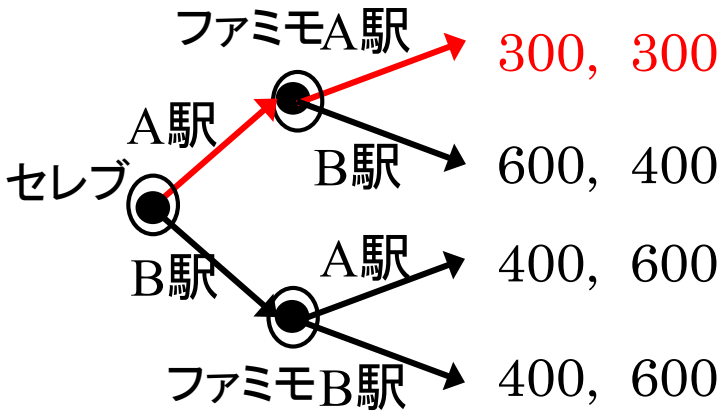
セレブがA駅　ファミモが(A駅,A駅)　を選んだとき

考え方1

セレブがA駅

ファミモが(A駅, A駅)
⇒カッコの左側が，セレブがA駅を選んだときのファミモの行動

セレブがB駅，ファミモがA駅を選ぶ結果になる⇒(300,300)



利得行列の作成#3　利得の書き入れ2

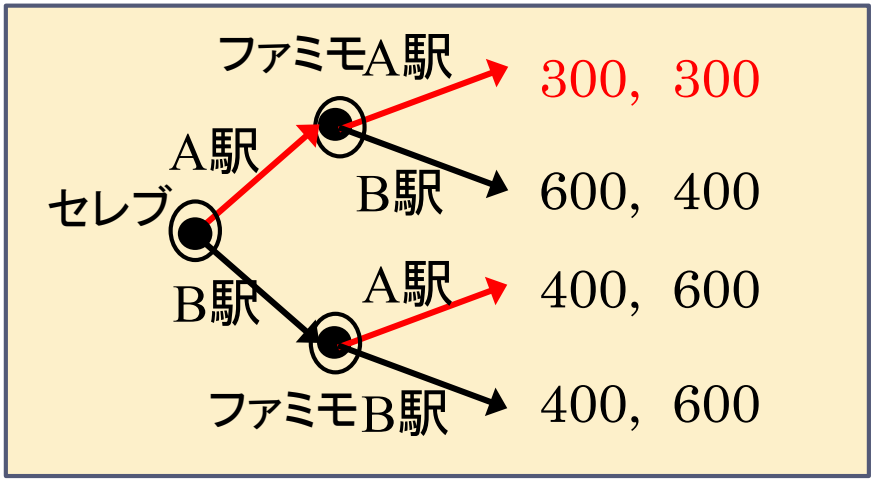
ファミモ / セレブ	(A駅,A駅)	(A駅,B駅)	(B駅,A駅)	(B駅,B駅)
A駅	(300,300)			
B駅				

セレブがA駅　ファミモが(A駅,A駅)　を選んだとき

考え方2

セレブとファミモの戦略を書き込む

ファミモが(A駅,A駅)
⇒ v_2でA駅，v_3で駅を選ぶのを書き込む



- すべてのプレイヤーの戦略を書き込むと，初期点から終点までの1本の道ができる(経路と呼ばれる:後述)
- これが起きる結果に対応する.（終点に対応する利得の組を利得行列に書き入れる）

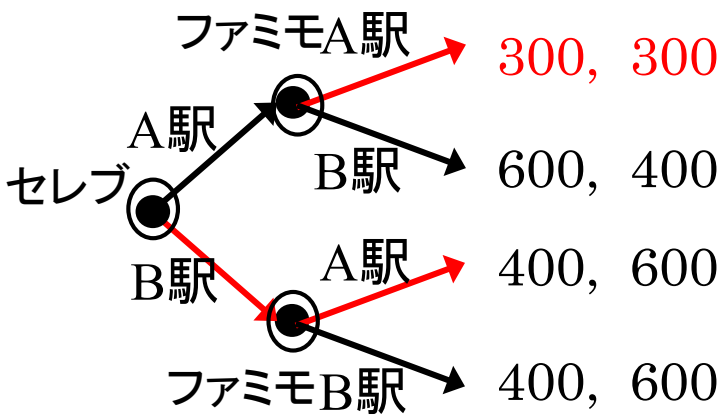
利得行列の作成#4　利得の書き入れ3

ファミモ / セレブ	(A駅,A駅)	(A駅,B駅)	(B駅,A駅)	(B駅,B駅)
A駅	(300,300)			
B駅	(400,600)			

セレブがB駅　ファミモが(A駅,A駅)　を選んだとき

考え方1
ファミモが(A駅, A駅)
⇒カッコの右側が，セレブがB駅を選んだときのファミモの行動

セレブがB駅，ファミモがA駅を選ぶ結果になる⇒(400,600)



考え方2
セレブとファミモの戦略を書き込む
■ すべてのプレイヤーの戦略を書き込むと，初期点から終点までの1本の道ができる．これが起きる結果に対応する．

利得行列の作成　もういっちょうやるか？

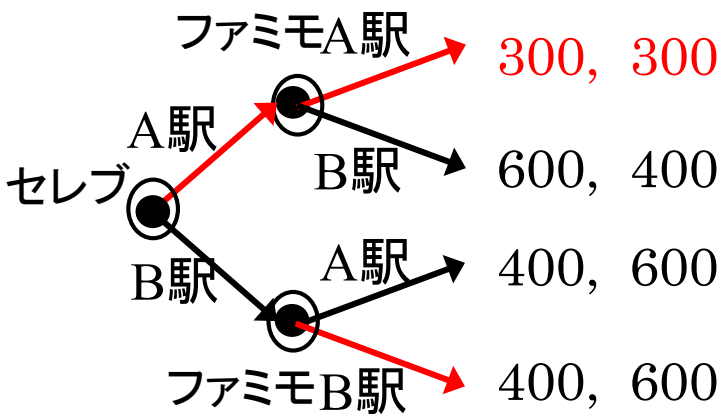
ファミモ / セレブ	(A駅,A駅)	(A駅,B駅)	(B駅,A駅)	(B駅,
A駅	(300,300)	(300,300)		
B駅	(400,600)			

セレブがA駅　ファミモが(A駅,B駅)を選んだとき

セレブがA駅を選ぶとき，ファミモの（A駅，A駅）と（A駅，B駅）は同じ結果になる

考え方1
ファミモが(A駅, B駅)
⇒カッコの左側が，セレブがA駅を選んだときのファミモの行動

セレブがA駅，ファミモがA駅を選ぶ結果になる⇒(300,300)



考え方2
セレブとファミモの戦略を書き込む
■ すべてのプレイヤーの戦略を書き込むと，初期点から終点までの1本の道ができる．これが起きる結果に対応する．

完全情報展開形ゲーム⇒戦略形ゲーム　例

ファミモ セレブ	(A駅,A駅)	(A駅,B駅)	(B駅,A駅)	(B駅,B駅)
A駅	(300,300)	(300,300)	(600,400)	(600,400)
B駅	(400,600)	(200,200)	(400,600)	(200,200)

利得行列の見方

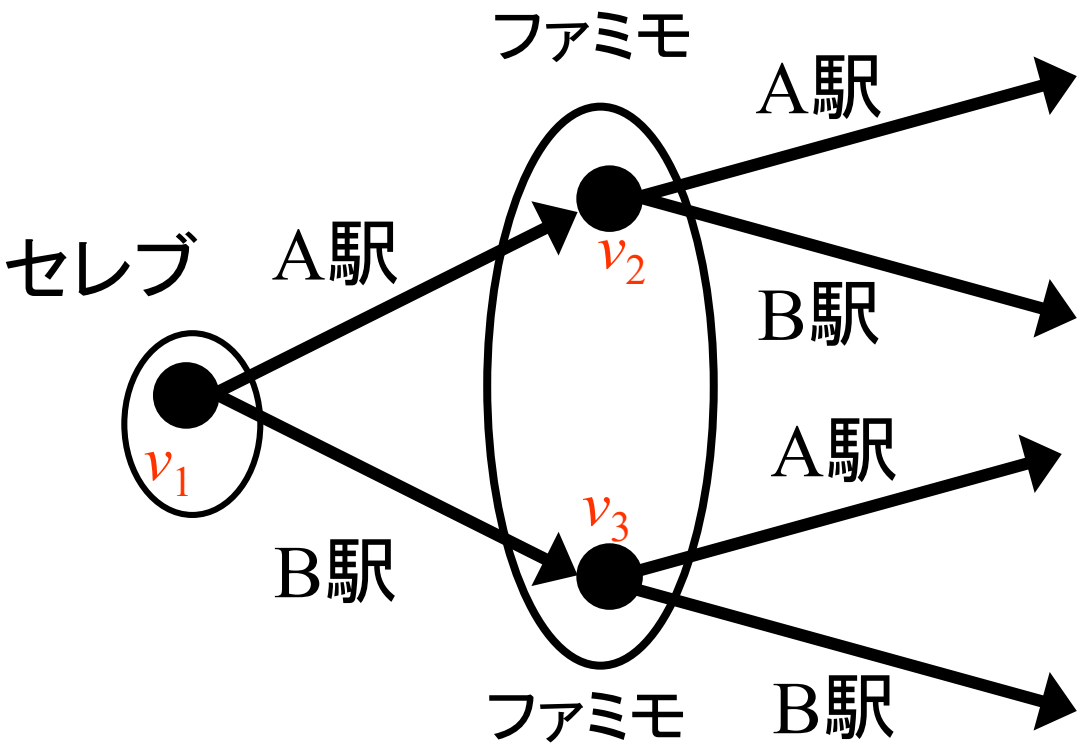
セレブがA駅，ファミモが (A駅,B駅)を選んだとき

(A駅,B駅) →　ファミモはセレブがA駅を選んだならA駅を，セレブがB駅を選んだらB駅を選ぶ

結果はセレブがA駅，ファミモもA駅を選ぶ　→利得は(300,300)

(A駅,B駅)の左側しか影響しないことに注意

不完全情報の展開形ゲームでは？



セレブ	ファミモ
300	300
600	400
400	600
200	200

ファミモは$v2$と $v3$のどちらにいるか区別できない

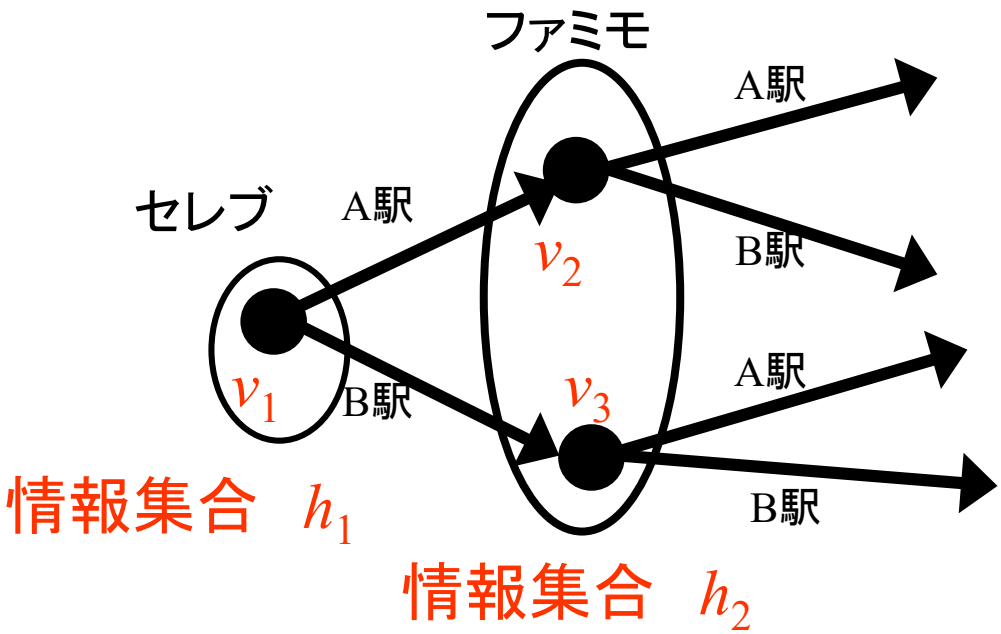
ファミモは$v2$と $v3$で，異なる行動を選ぶのはおかしい！

一般の展開形ゲームの戦略とは？

- 完全情報ではない一般の展開形ゲームでは，意思決定点ごとに行動を選べない⇒情報集合ごとに選ぶ
- 一般の展開形ゲームにおける各プレイヤーの戦略は，どの情報集合で，どの行動を選ぶか，をすべて示したものと考えられる
- セレブの戦略・・・情報集合h1で「A駅」「B駅」のどちらを選ぶかの2つ
- ファミモの戦略・・・情報集合h2で「A駅」「B駅」のどちらを選ぶかの2つ

戦略（一般の展開形ゲーム）

- 各プレイヤーが，「どの情報集合で，どの行動を選ぶか」を示したものを，そのプレイヤーの戦略と呼ぶ
- セレブの戦略・・・情報集合h1で「A駅」「B駅」のどちらを選ぶかの2つ
- ファミモの戦略・・・情報集合h2で「A駅」「B駅」のどちらを選ぶかの2つ



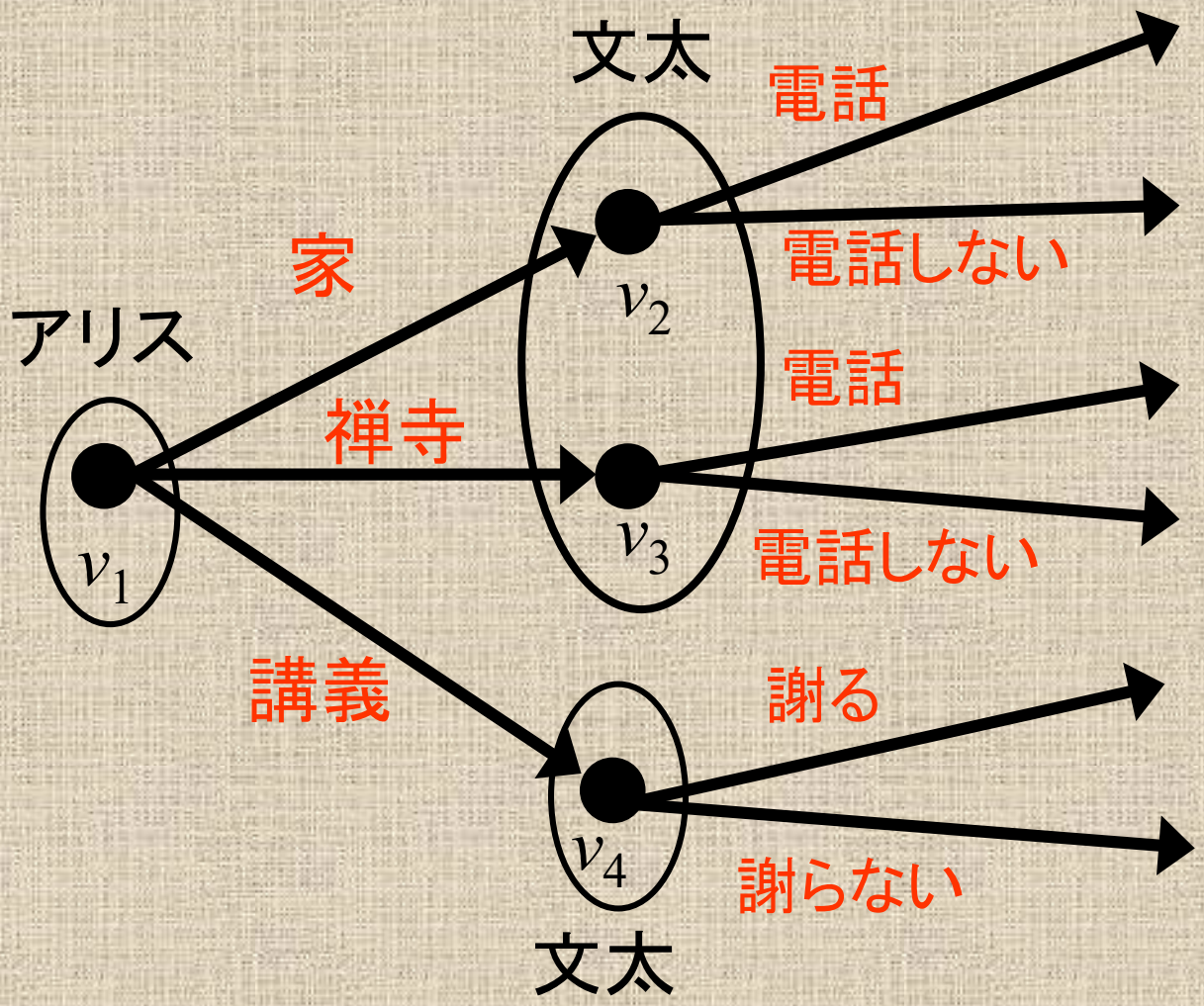
各情報集合でどの行動を選ぶかがプレイヤーの戦略

最重要！

定義　展開形ゲームの戦略

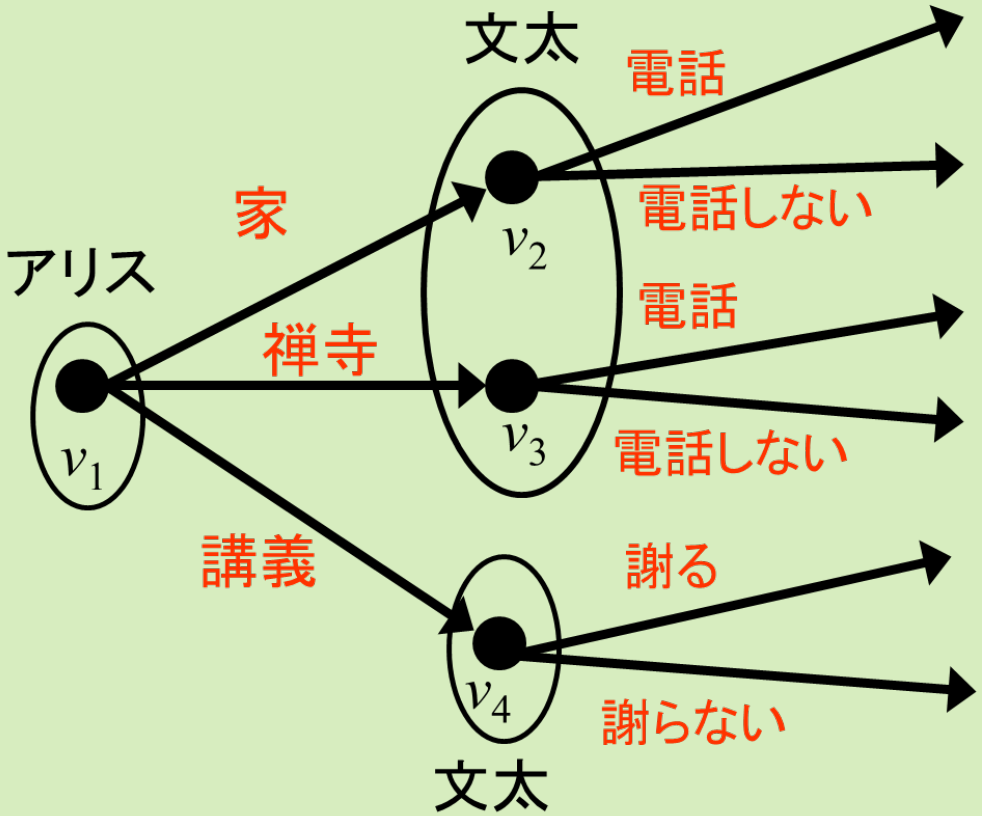
- 展開形ゲームの戦略とは，すべての情報集合でどの行動を選ぶかをすべて定めたもの

各プレイヤーの戦略



- 各プレイヤーの戦略を記せ
- 各プレイヤーの戦略は，何個あるか

解答　各プレイヤーの戦略



各プレイヤーの戦略

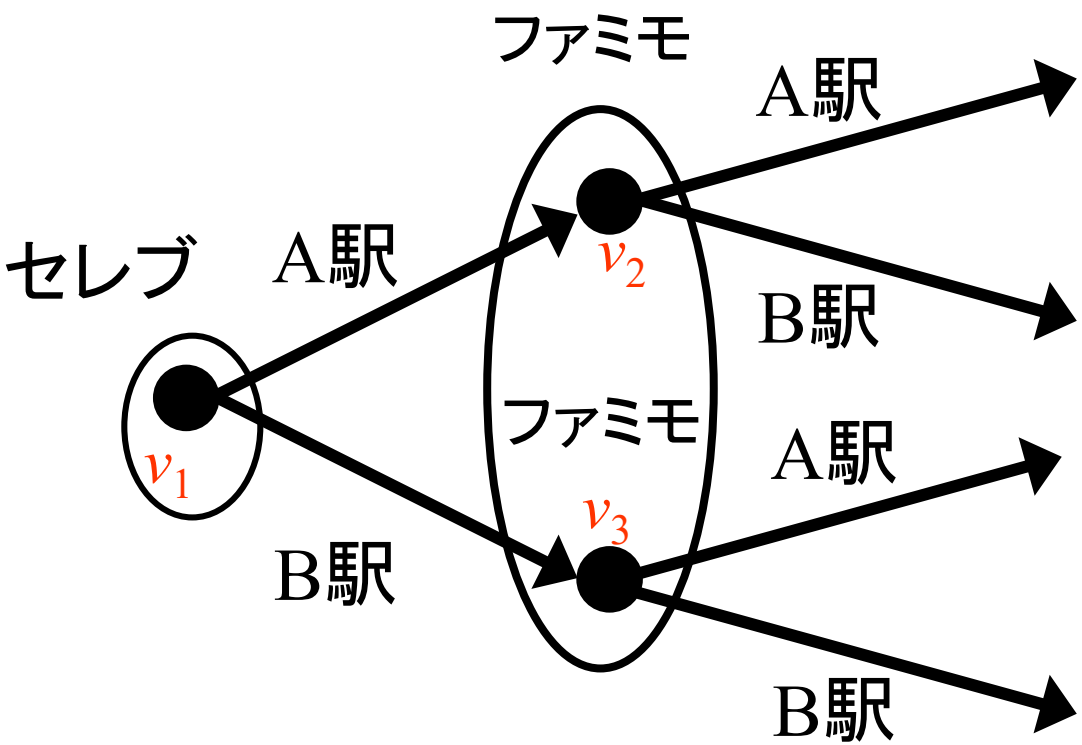
アリス：
家、禅寺、講義
3個

B君：
（電話，謝る），
（電話，謝らない）
（電話なし，謝る），
（電話しない，謝らない）
4個

展開形ゲームを戦略形ゲームに変換する

- STEP.1
  各プレイヤーに対し，すべての情報集合において，どの行動を選ぶかを列挙したものを戦略と考える．利得行列の枠を作る．
- STEP.2
  すべてのプレイヤーの戦略を1つ決めると，実現する終点が1つ決まる．その終点に対応する利得が，その戦略の組に対応する利得となる．
- STEP.3
  それをすべての戦略の組に対して考える．

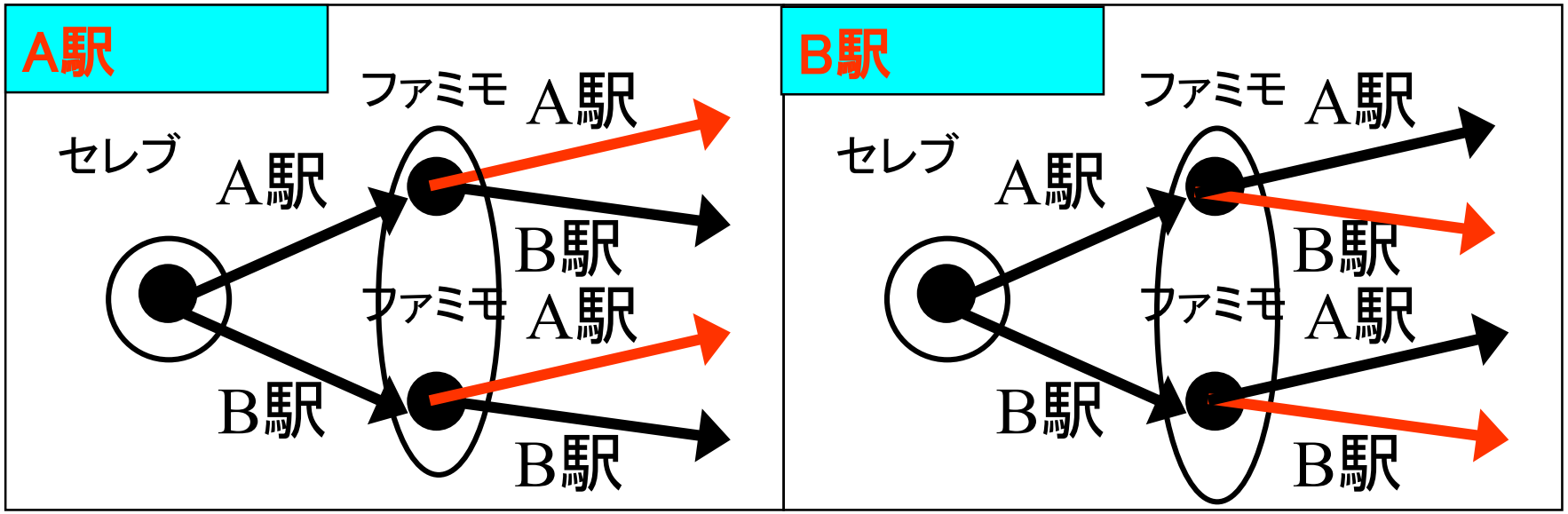
展開形ゲーム⇒戦略形ゲーム：例2



	セレブ	ファミモ
	300	300
	600	400
	400	600
	200	200

今度はこの不完全情報の展開形ゲームを戦略形ゲームに変換してみよう

ファミモの戦略を確認：例2



今度は，戦略は2つ

展開形ゲーム⇒戦略形ゲーム：例2

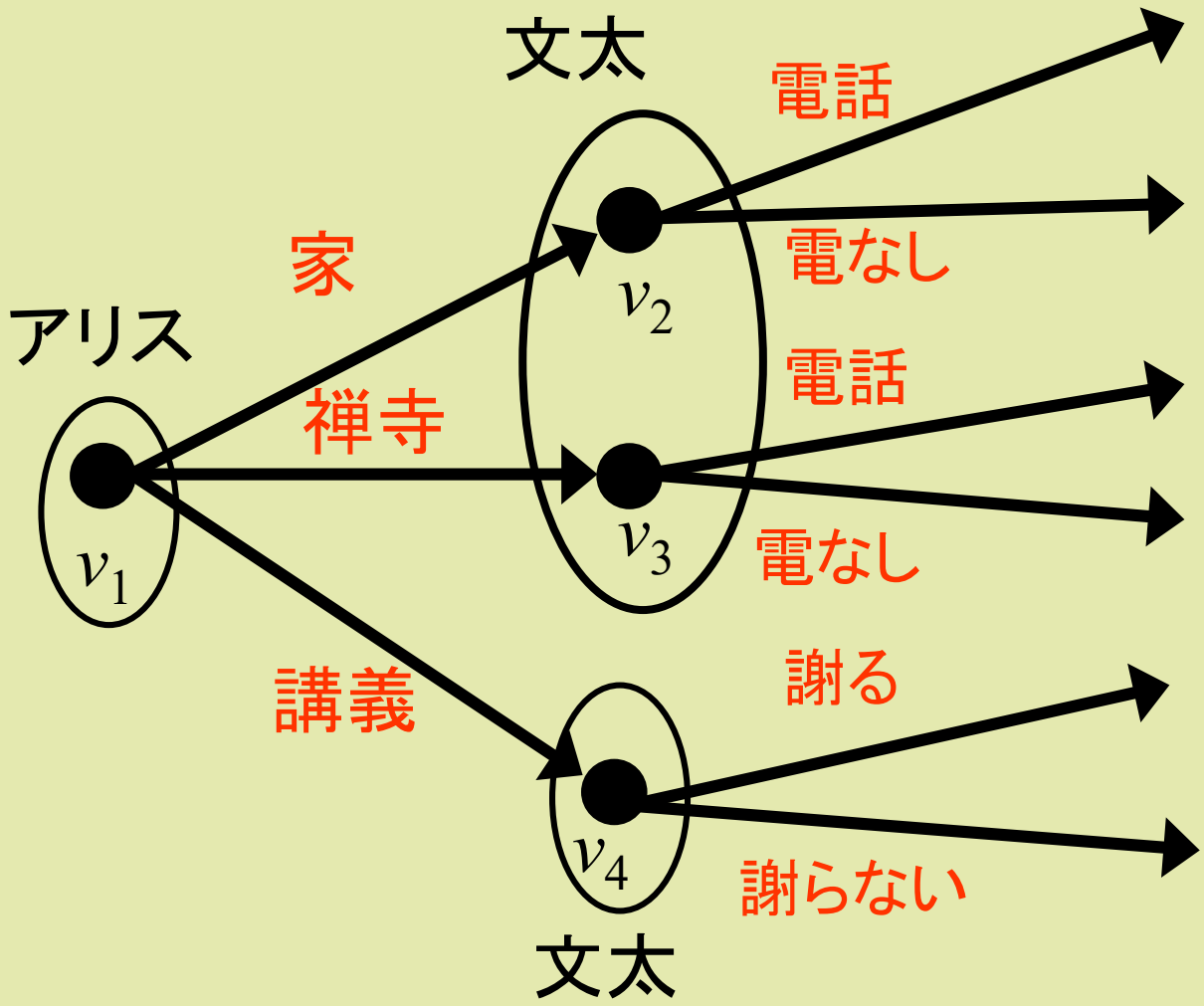
ファミモ ＼ セレブ	A駅	B駅
A駅	(300,300)	(600,400)
B駅	(400,600)	(200,200)

もともとの戦略形ゲームである！

まとめ　一般の展開形ゲームと戦略形ゲームへの変換

- 一般の展開形ゲーム
  - 自分より前に行動したプレイヤーの行動が分からないときは，自分の意思決定点が識別できないとし，情報集合で表現する
  - 1つの情報集合の中の点は，プレイヤーはどの点でプレイしているか分からない
- 戦略形ゲームへの変換
  - 展開形ゲームは戦略形ゲームに変換できる
  - 1つの情報集合で1つの行動を選ぶ
  - すべての情報集合で，どの行動を選ぶかを列挙したものを戦略と考える

演習　アリスと文太のゲーム



アリス	文太
3	3
0	0
−3	−3
2	0
4	1
−2	−2

戦略形ゲームに変換せよ

STEP.1

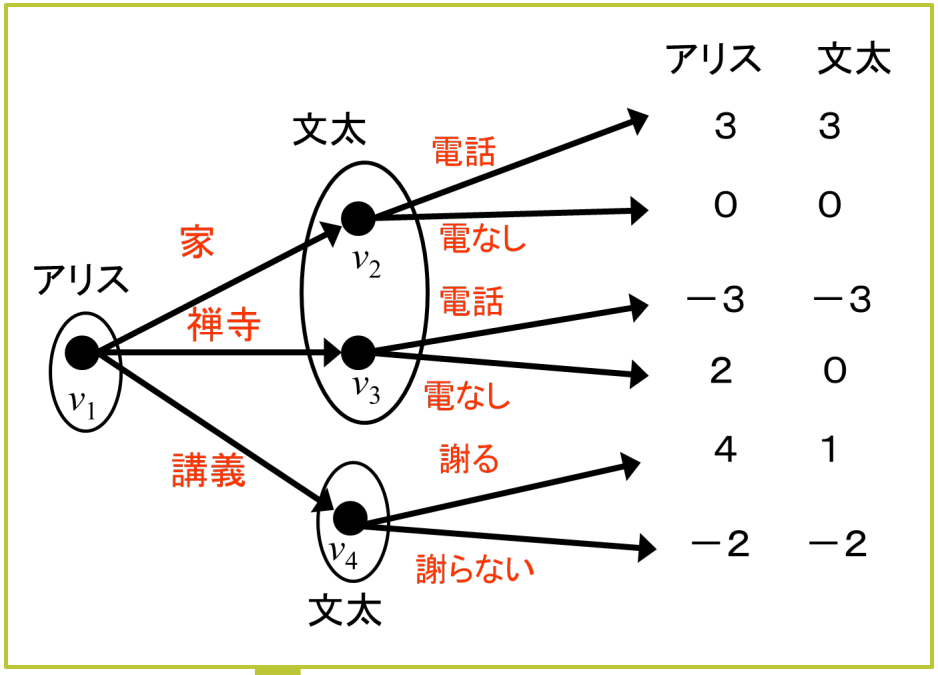
- 「すべての情報集合で，どの行動を選ぶかを列挙したもの」を戦略と考える．

⇒ この考え方に従い，利得行列の「枠」を作る

文太の戦略は，

「アリスが講義に来ない時」（家か禅寺を選んだとき）をカッコの左に，

「アリスが講義に来た時」をカッコの右に書くことにする．



文太 / アリス	（電話,謝る）	（電話,非謝）	（非電,謝る）	（非電,非謝）
家				
禅寺				
講義				

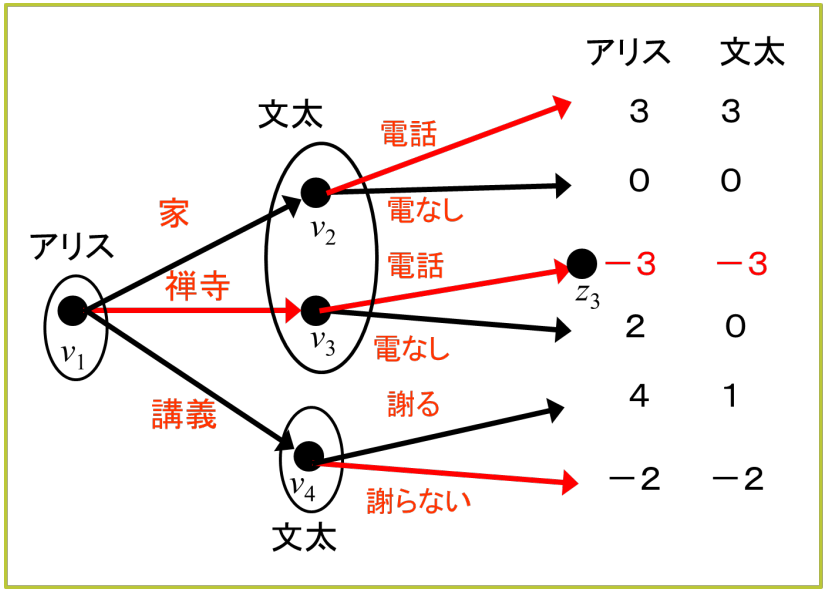
利得行列の枠が完成

文太 アリス	（電話,謝る）	（電話,非謝）	（非電,謝る）	（非電,非謝）
家 禅寺 講義				

STEP.2

- すべてのプレイヤーの戦略を1つ決めると，実現する終点が1つ決まる．その終点に対応する利得が，その戦略の組に対応する利得となる．

（例）
アリス：禅寺
文太：（電話，非謝）
を選んだ場合



文太 / アリス	（電話,謝る）	（電話,非謝）	（非電,謝る）	（非電,非謝）
家				
禅寺		(-3 ,-3)		
講義				

z_3 の利得が対応する

解答　アリスと文太のゲーム

文太 アリス	(電話,謝る)	(電話,非謝)	(非電,謝る)	(非電,非謝)
家	(３，３)	(３，３)		
禅寺	(-3, -3)			
講義	(４，１)			

- B子の戦略は,「A君が講義に来ない時」(家か，元彼女を選んだとき)をカッコの左に,「A君が講義に来た時」をカッコの右に書く.

解答　アリスと文太のゲーム

文太 / アリス	(電話,謝る)	(電話,非謝)	(非電,謝る)	(非電,非謝)
家	(3, 3)	(a, b)	(c, d)	(0, 0)
禅寺	(-3, -3)	(-3, -3)	(e, f)	(2, 0)
講義	(4, 1)	(g, h)	(4, 1)	(-2, -2)

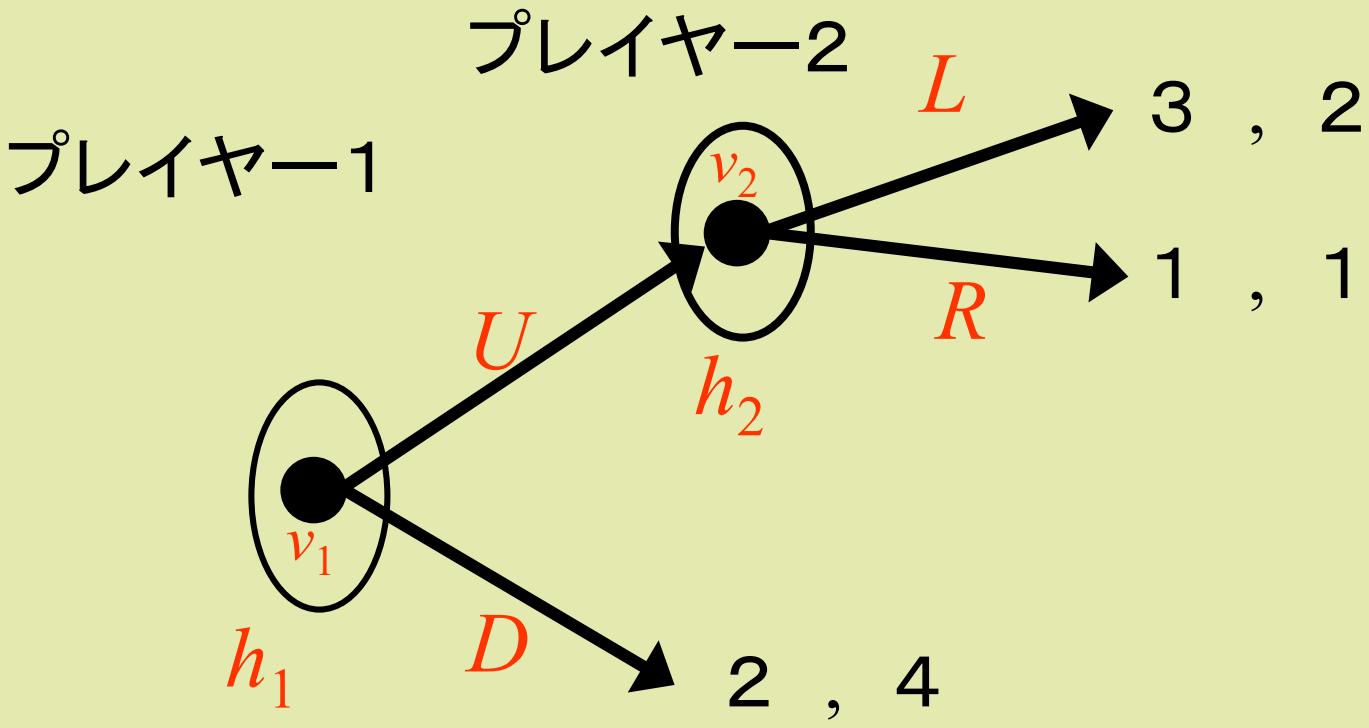
- B子の戦略は,「A君が講義に来ない時」(家か, 元彼女を選んだとき)をカッコの左に,「A君が講義に来た時」をカッコの右に書くものとする.

解答　アリスと文太のゲーム

文太 アリス	(電話,謝る)	(電話,非謝)	(非電,謝る)	(非電,非謝)
家	(3, 3)	(3, 3)	(0, 0)	(0, 0)
文太	(-3, -3)	(-3, -3)	(2, 0)	(2, 0)
講義	(4, 1)	(-2, -2)	(4, 1)	(-2, -2)

早く解きたい！

演習　戦略形ゲームへの変換2



戦略形ゲームに直せ

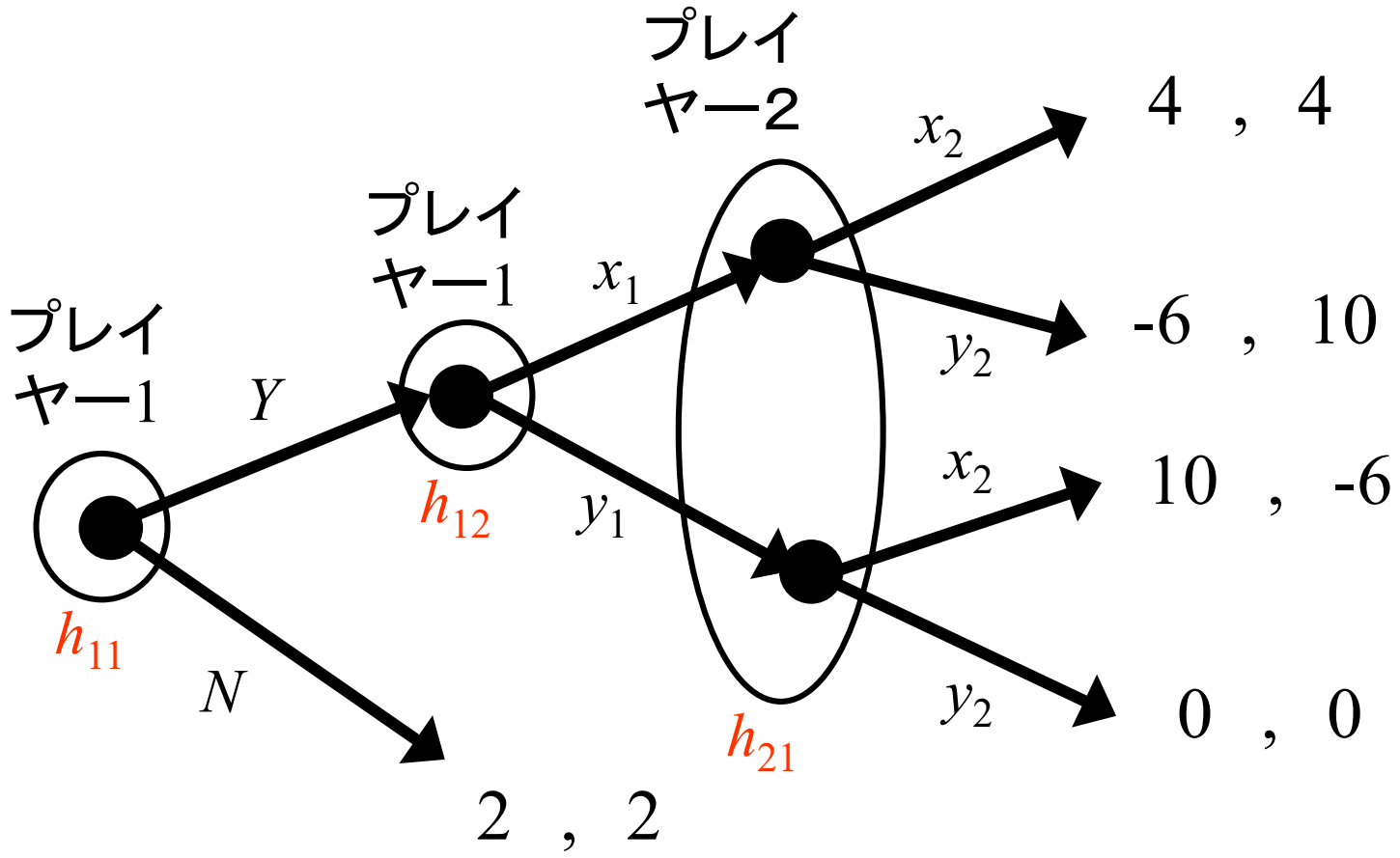
NABENAVI .net

解答　演習2:戦略形ゲームへの変換２

プレイヤー２ / プレイヤー１	L	R
U	（３，２）	（１，１）
D	（２，４）	（２，４）

もともとの戦略形ゲームである！

宿題　ゲーム1：戦略形ゲームへの変換



- プレイヤー1は，H_{11}とH_{12}で選ぶ戦略をカッコに並べて書くものとする．
- 例えば，H_{11}でY，H_{12}でx_1を選ぶ戦略は(Y, x_1)

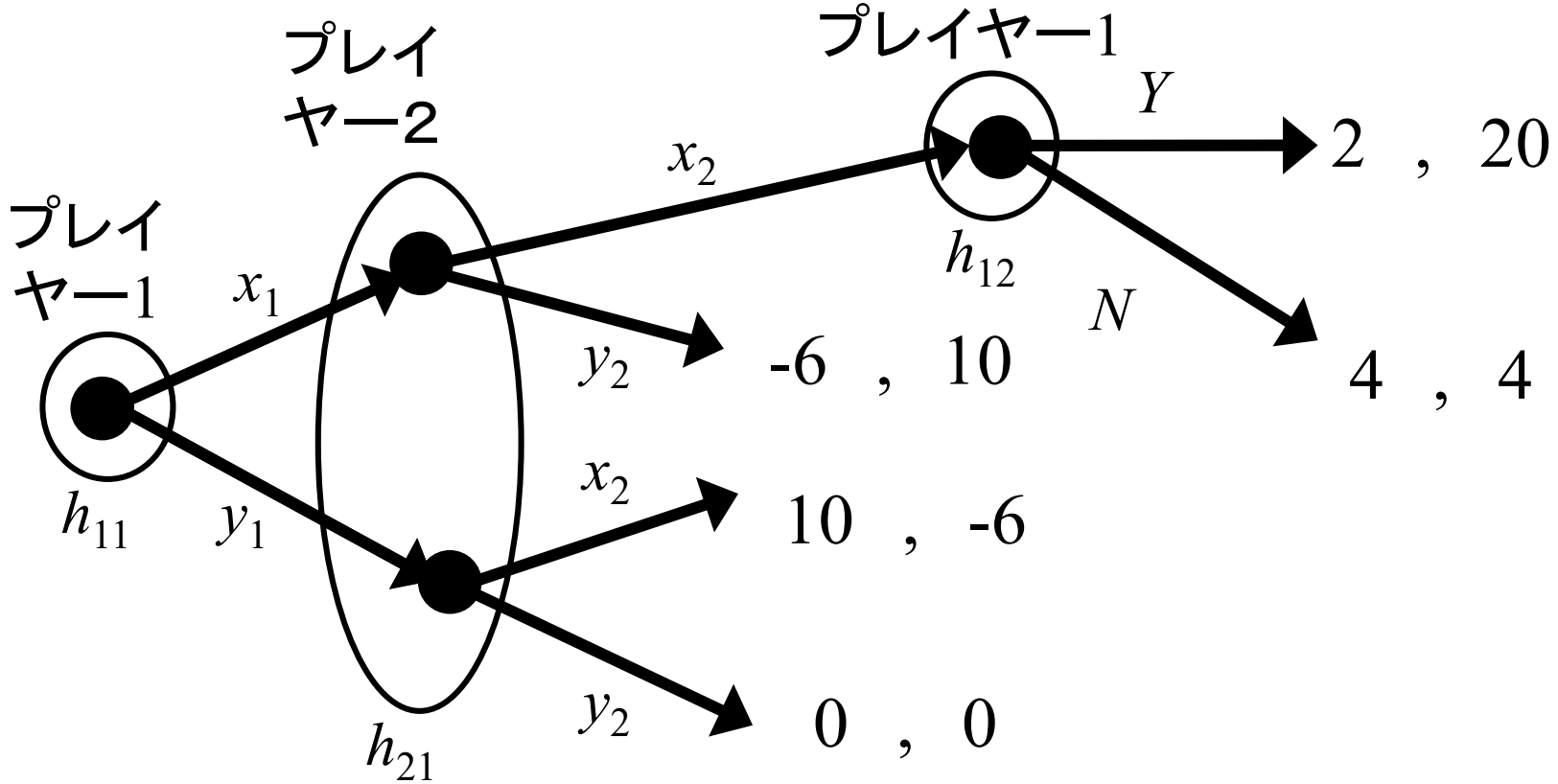
宿題　ゲーム1：戦略形ゲームへの変換

1 \ 2	x_2	y_2
(Y, x_1)	(a , b)	(c , d)
(Y, y_1)	(10 , -6)	(e , f)
(N, x_1)	(g , h)	(2 , 2)
(N, y_1)	(2 , 2)	(2 , 2)

宿題　ゲーム1：戦略形ゲームへの変換

1 \ 2	x_2	y_2
(Y, x_1)	(4 , 4)	(-6 , 10)
(Y, y_1)	(10 , -6)	(0 , 0)
(N, x_1)	(2 , 2)	(2 , 2)
(N, y_1)	(2 , 2)	(2 , 2)

宿題　ゲーム2:戦略形ゲームへの変換



- プレイヤー1は，H_{11}とH_{12}で選ぶ戦略をカッコに並べて書くものとする.
- 例えば，H_{11}でx_1，H_{12}で Y を選ぶ戦略は(x_1, Y)

宿題　ゲーム2:戦略形ゲームへの変換

1 \ 2	x_2	y_2
(x_1, Y)	(2 , 20)	(-6 , 10)
(x_1, N)	(a , b)	(c , d)
(y_1, Y)	(e , f)	(g , h)
(y_1, N)	(10 , -6)	(0 , 0)

宿題　ゲーム2:戦略形ゲームへの変換

1 \ 2	x_2	y_2
(x_1, Y)	(2 , 20)	(-6 , 10)
(x_1, N)	(4 , 4)	(-6 , 10)
(y_1, Y)	(10 , -6)	(0 , 0)
(y_1, N)	(10 , -6)	(0 , 0)

6.4 部分ゲーム完全均衡

すべてのゲームの解はナッシュ均衡？

ここまで:

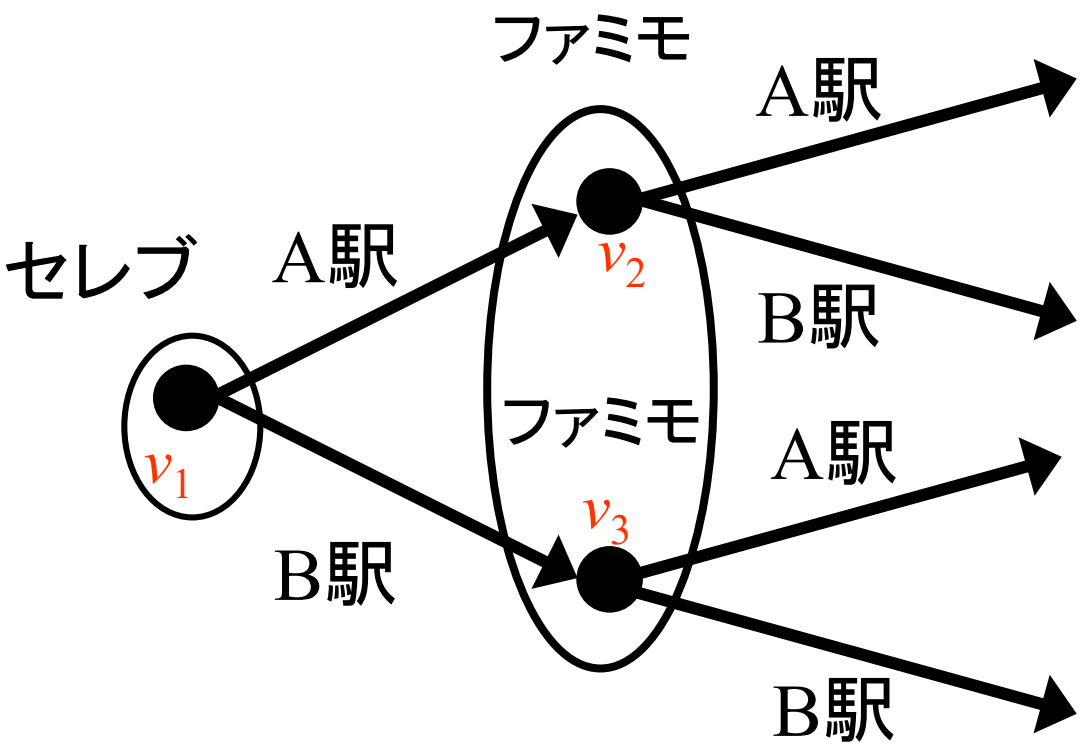
すべての展開形ゲームは戦略形ゲームに変換できる

ことが分かった

- ゲームの解はナッシュ均衡になるはず！
- 戦略形ゲームも展開形ゲームも，すべて統一した原理「ナッシュ均衡」で解くことができる！

はず？？

展開形ゲームの解を求める：例2



セレブ	ファミモ
300	300
600	400
400	600
200	200

このゲームの解は？

例2の解

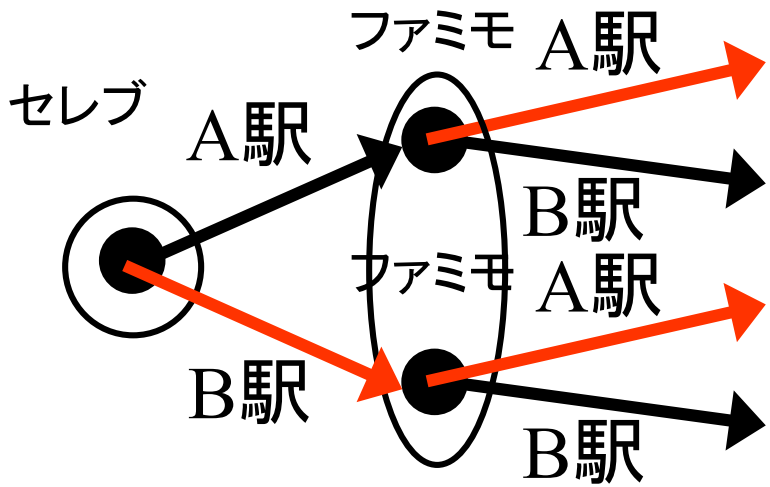
セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(300,300)	(600,400)
B駅	(400,600)	(200,200)

ナッシュ均衡は2つ

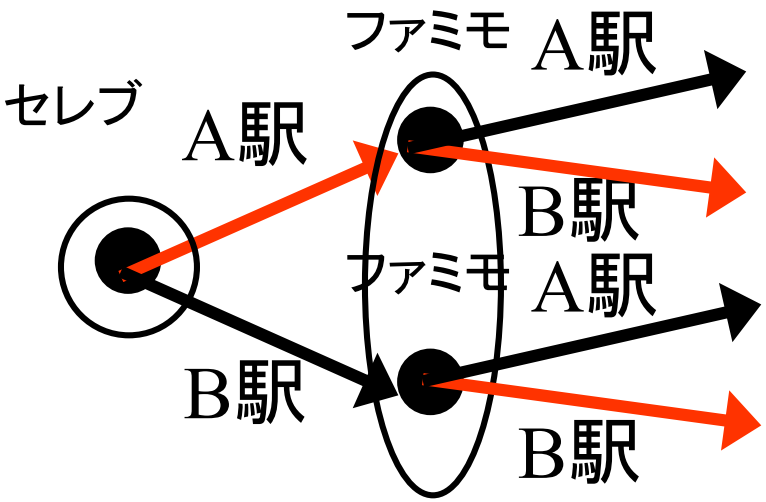
もともと上記の戦略形ゲームを展開形ゲームにしたものなので，これは当然

展開形ゲームの解を求める：例2

ナッシュ均衡1



ナッシュ均衡2



２つのナッシュ均衡を表現

展開形ゲームの解を求める：例1の場合

ファミモ セレブ	(A駅,A駅)	(A駅,B駅)	(B駅,A駅)	(B駅,B駅)
A駅	(300,300)	(300,300)	(600,400)	(600,400)
B駅	(400,600)	(200,200)	(400,600)	(200,200)

ナッシュ均衡は3つ

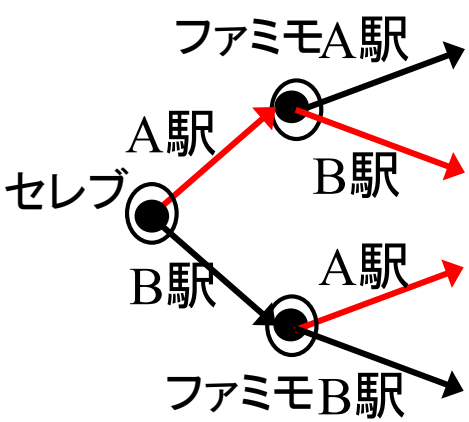
均衡と均衡経路

ファミモ / セレブ	(A駅,A駅)	(A駅,B駅)	(B駅,A駅)	(B駅,B駅)
A駅	(300,300)	(300,300)	(600,400)	(600,400)
B駅	(400,600)	(200,200)	(400,600)	(200,200)

均衡1と2は同じ結果を導いている！

ナッシュ均衡1

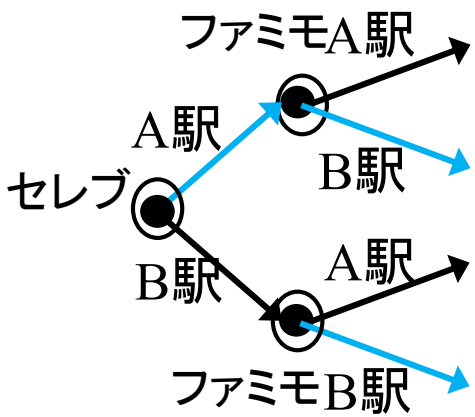
セレブ：A駅
ファミモ：(B駅,A駅)



セレブがA駅，ファミモがB駅を選ぶ

ナッシュ均衡2

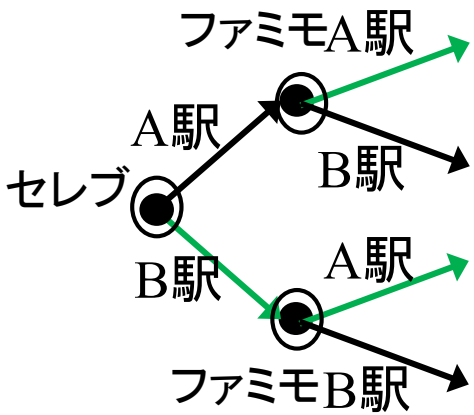
セレブ：A駅
ファミモ：(B駅,B駅)



セレブがA駅，ファミモがB駅を選ぶ

ナッシュ均衡3

セレブ：B駅
ファミモ：(A駅,A駅)



セレブがB駅，ファミモがA駅を選ぶ

均衡と均衡経路

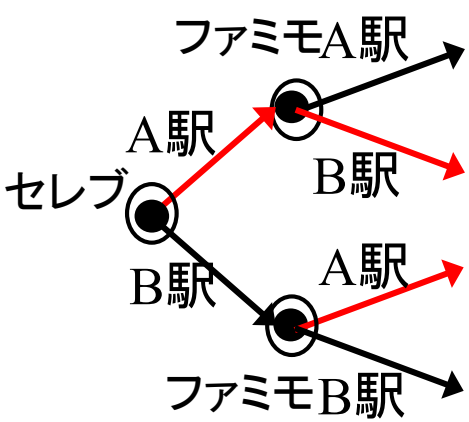
ファミモ / セレブ	(A駅,A駅)	(A駅,B駅)	(B駅,A駅)	(B駅,B駅)
A駅	(300,300)	(300,300)	(600,400)	(600,400)
B駅	(400,600)	(200,200)	(400,600)	(200,200)

異なるナッシュ均衡でも同じ結果（＝初期点から終点までの経路）になることがある

均衡は戦略の組であるが，これは実際には起こらないようなすべての情報集合の行動を定める

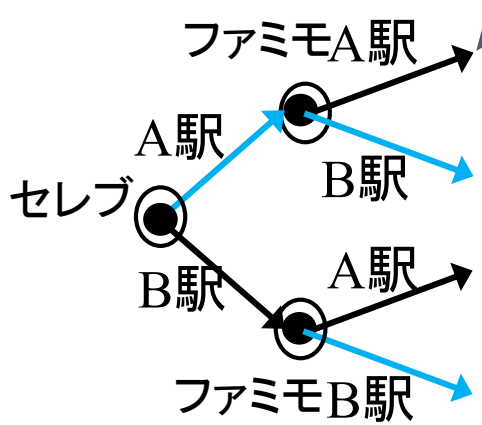
均衡によって実現する結果を均衡経路と呼ぶ．
均衡経路と均衡を区別することが大切

セレブ：A駅
ファミモ：(B駅,A駅)



セレブがA駅，
ファミモがB駅を選ぶ

セレブ：A駅
ファミモ：(B駅,B駅)



セレブがA駅，
ファミモがB駅を選ぶ

均衡（戦略の組）

均衡経路
（初期点から終点までの選択）

定義　経路・均衡経路

- 展開型ゲームにおいて，戦略の組が定まると，これに対して初期点から終点まで選ばれる行動の列が定まる．これを経路と呼ぶ．
- ナッシュ均衡が定める経路を（そのナッシュ均衡の）均衡経路と呼ぶ

- 戦略の組と経路，均衡と均衡経路を区別する．
- 経路は戦略の組によるゲームの結果である．
- 異なるナッシュ均衡も，同じ均衡経路を定めることがある．

展開形ゲームの解ー再検討：例1の場合

ファミモ セレブ	(A駅,A駅)	(A駅,B駅)	(B駅,A駅)	(B駅,B駅)
A駅	(300,300)	(300,300)	(600,400)	(600,400)
B駅	(400,600)	(200,200)	(400,600)	(200,200)

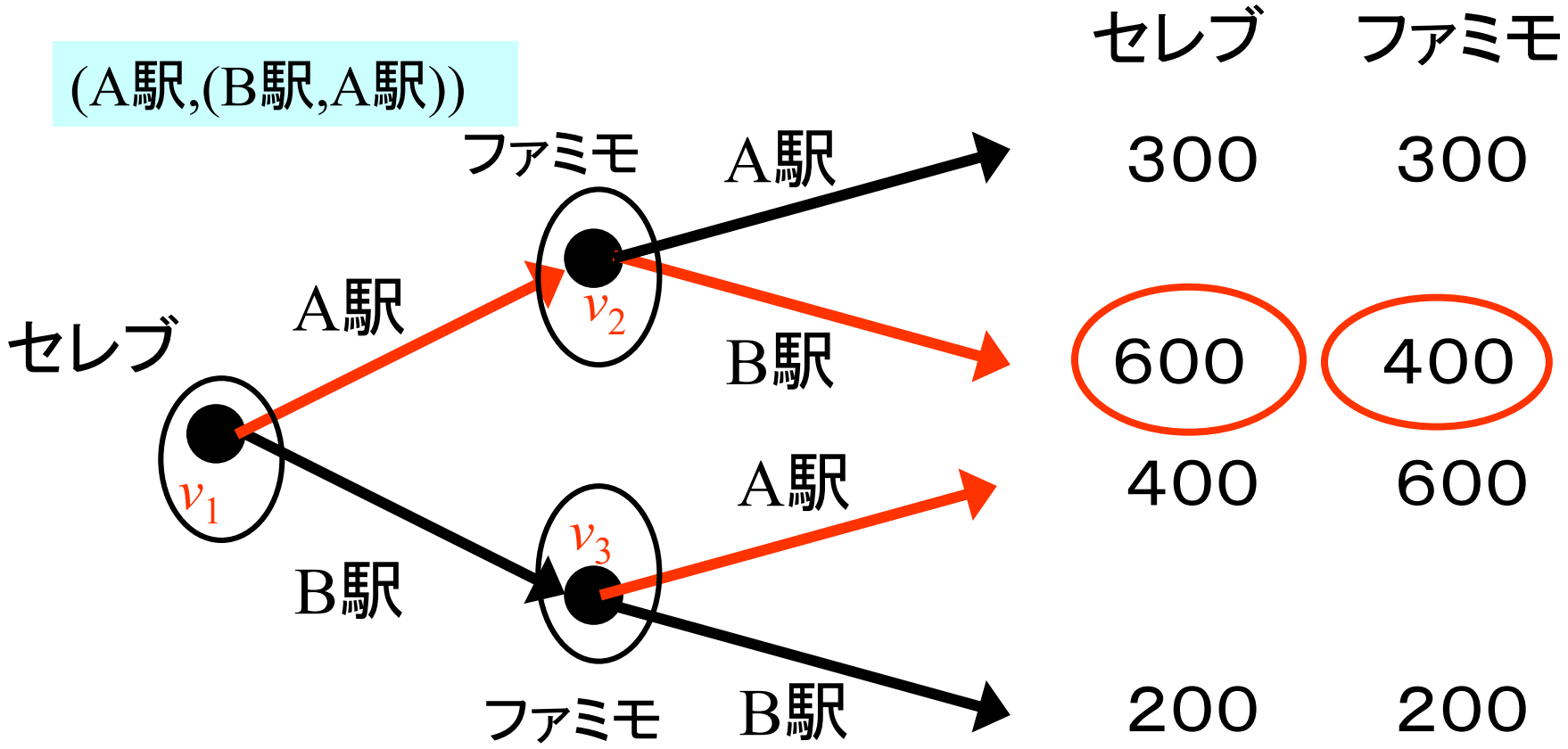
ナッシュ均衡は3つ

この3つはすべて「ゲームの解」として良いだろうか？

先読み解（バックワードインダクション）の解ではないものも含まれているが？

先読み（バックワードインダクション）の解はナッシュ均衡の1つ

(A駅,(B駅,A駅))

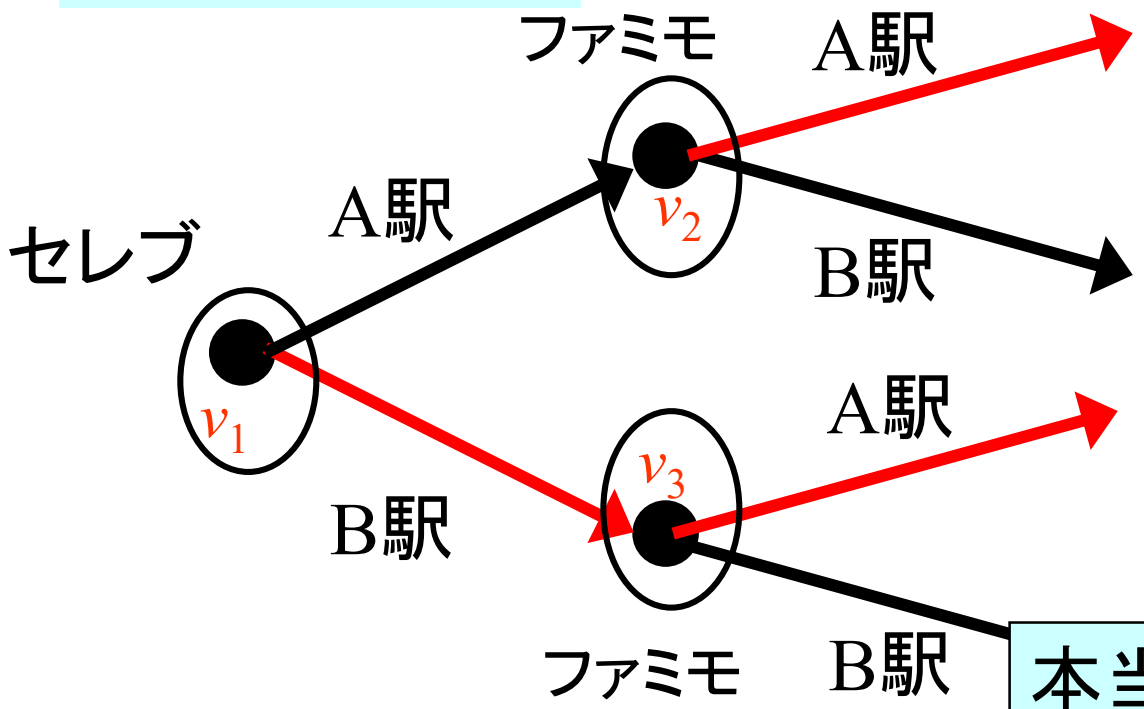


セレブはB駅に戦略を変えても利得は高くならない

ファミモは(A駅,B駅) (A駅,A駅) (B駅,B駅)に変えても利得は高くならない

バックワードインダクション以外にもナッシュ均衡がある

(B駅,(A駅,A駅))



セレブ	ファミモ
300	300
600	400
400	600

本当？

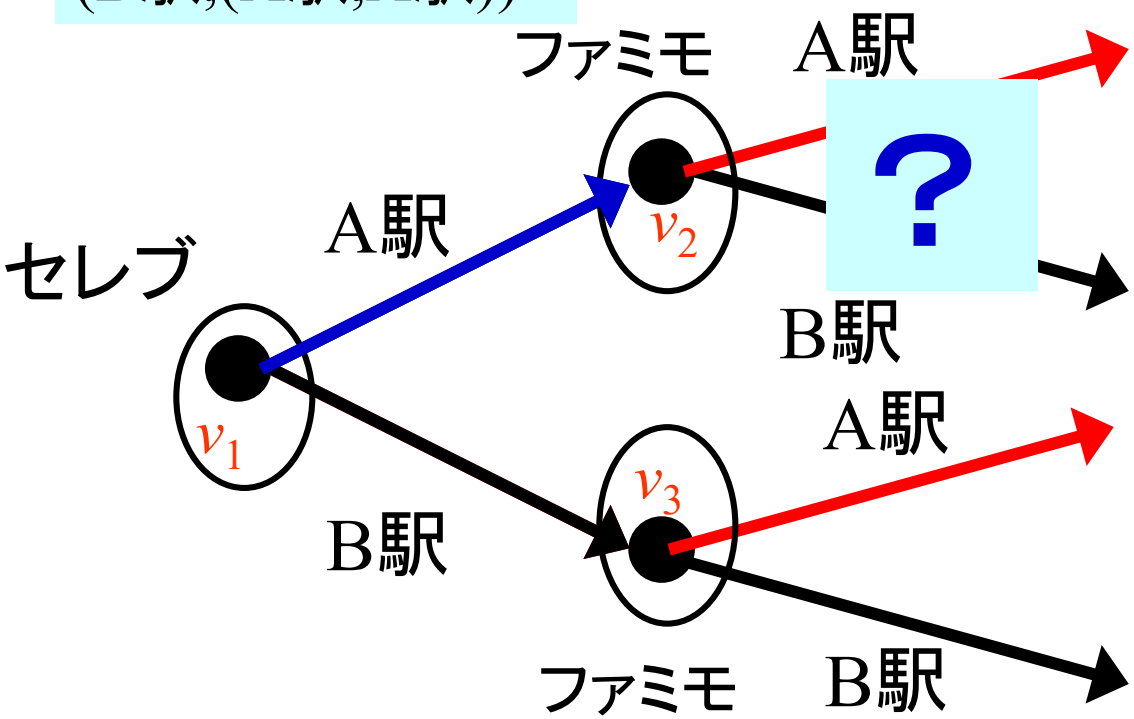
先読み解ではない！？

セレブはA駅に戦略を変えても利得

ファミモは(A駅,B駅) (B駅,A駅) (B駅,B駅)に変えても利得は高くならない　**確かにナッシュ均衡**

もしもセレブがB駅に戦略を変えれば？

(B駅,(A駅,A駅))



セレブ	ファミモ
300	300
600	400
400	600
200	200

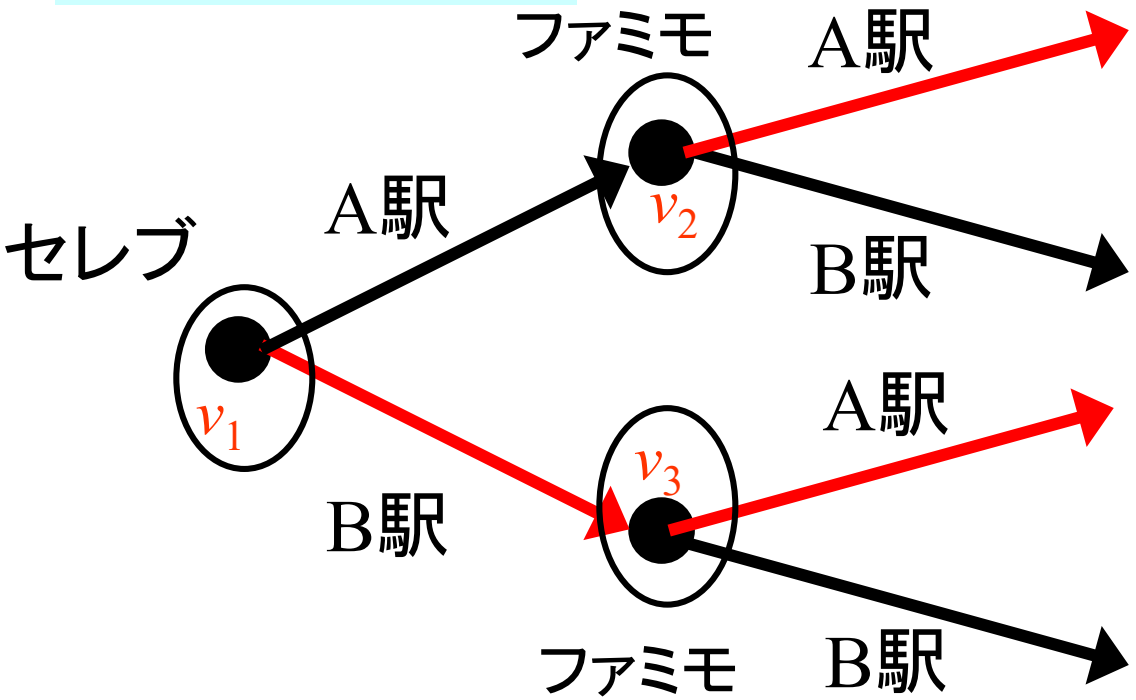
セレブはA駅に戦略を変えても利得は高くならない　本当？

もし，セレブがA駅に戦略を変えれば，それを観察したファミモは？

もはやA駅を選択しないはず

信憑性のない脅し

(B駅,(A駅,A駅))



セレブ	ファミモ
300	300
600	400
400	600
200	200

(A駅,A駅)という戦略は，「信憑性のない脅し」「拘束力のない口約束」と同じ構造を持っている・・・もし本当にv_2で意思決定する機会が来れば，ファミモはA駅を選ばない

展開形ゲームの解を求める：例1の場合

ファミモ セレブ	(A駅,A駅)	(A駅,B駅)	(B駅,A駅)	(B駅,B駅)
A駅	(300,300)	(300,300)	(600,400)	(600,400)
B駅	(400,600)	(200,200)	(400,600)	(200,200)

ナッシュ均衡3つの中には，良いナッシュ均衡と悪いナッシュ均衡がある

先読み解を選んでナッシュ均衡を精緻化する！

ナッシュ均衡とバックワードインダクション

- 完全情報ゲームにおけるバックワードインダクションによる解はナッシュ均衡である
  - これは常に成り立つ（本当は証明が必要だが省略．．．）
- しかし，それ以外のナッシュ均衡も存在する（ことがある）
- このようなナッシュ均衡は，解として不適切
  - 例１：セレブがA駅を選択することになっていれば，ファミモのB駅の選択はファミモには関係ないので，何を選んでも良い
  - しかし，その選択はセレブには影響する
  - 望ましくないナッシュ均衡を導く可能性
- 「先読み」「バックワードインダクション」で，展開形ゲームのナッシュ均衡を精緻化する必要がある

それならもう習った？

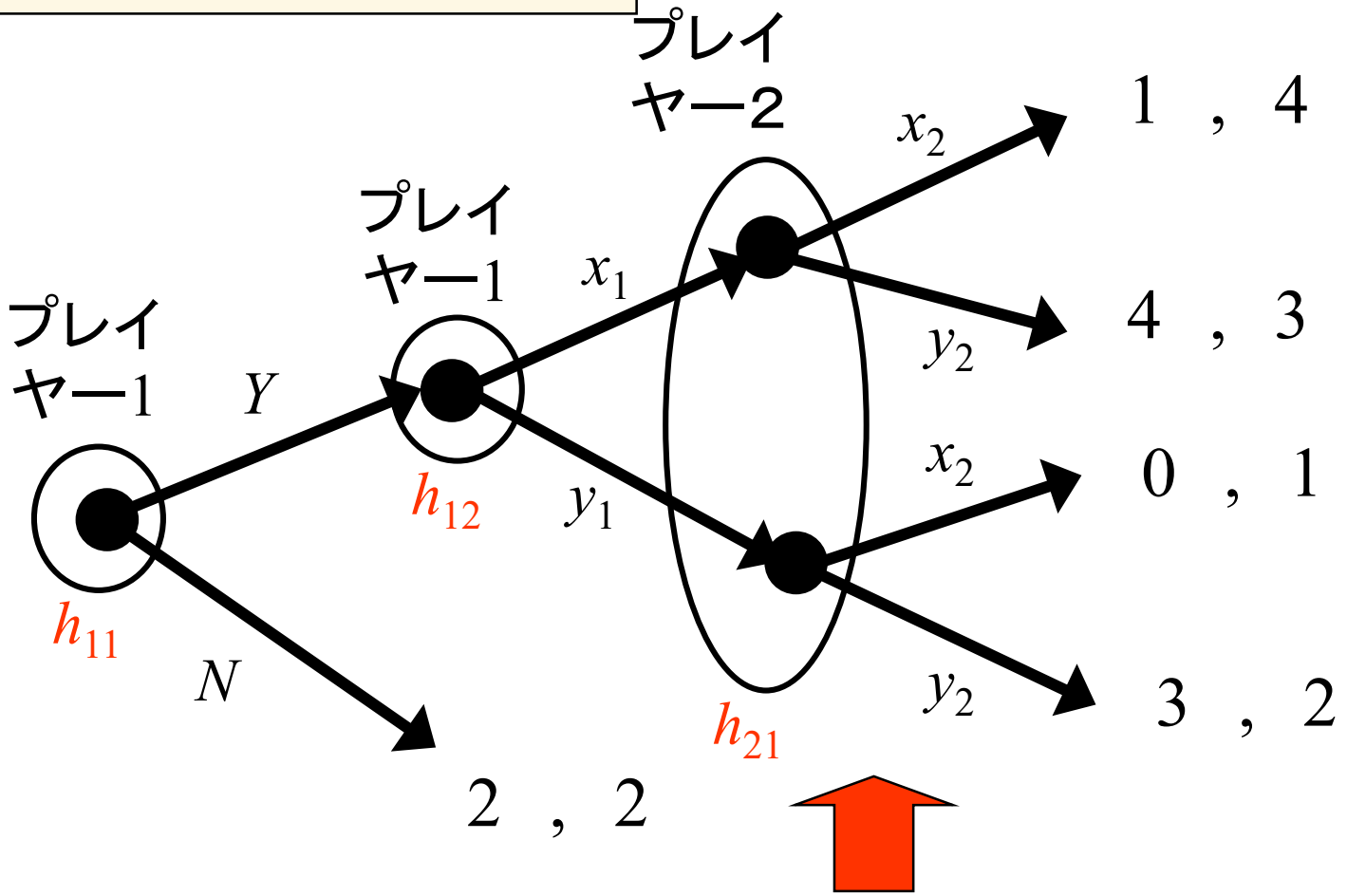
- 結局，完全情報ゲームではバックワードインダクションがゲームの解として適切！
  - 展開形ゲームを戦略形ゲームに変換して解く意味はない？
  - ゲーム理論1で習ったことで十分？

- 完全情報でなければ，どうすれば良いかはまだ習っていない
- 完全情報でなければ，単純には後ろから解けない

ナッシュ均衡の概念と先読み（バックワードインダクション）の概念を合わせて考えなければならない！

先読みの概念を一般のゲームに加える

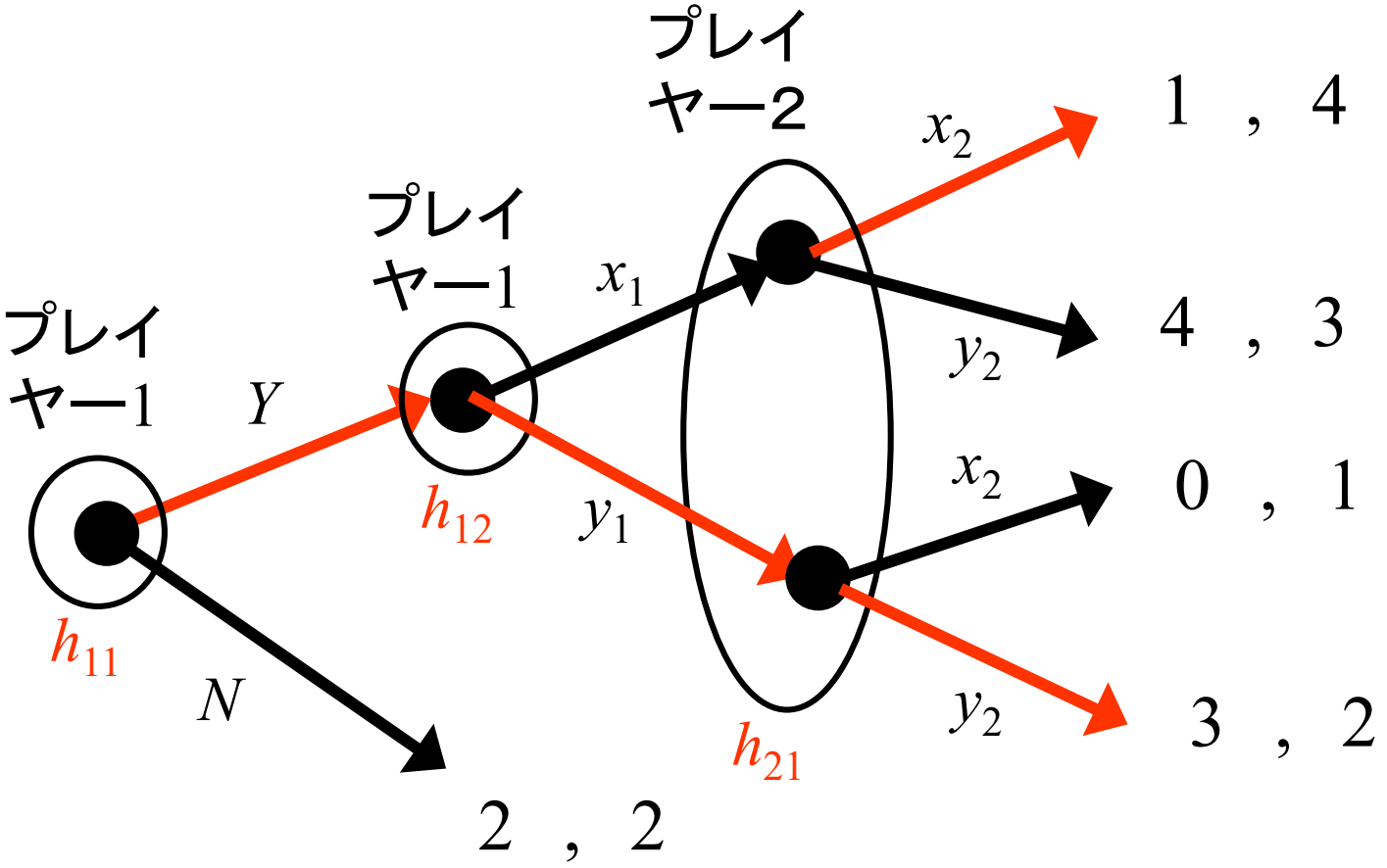
先読みの概念をどう加えるか？



一番先のプレイヤー2の行動だけを決めることはできない！

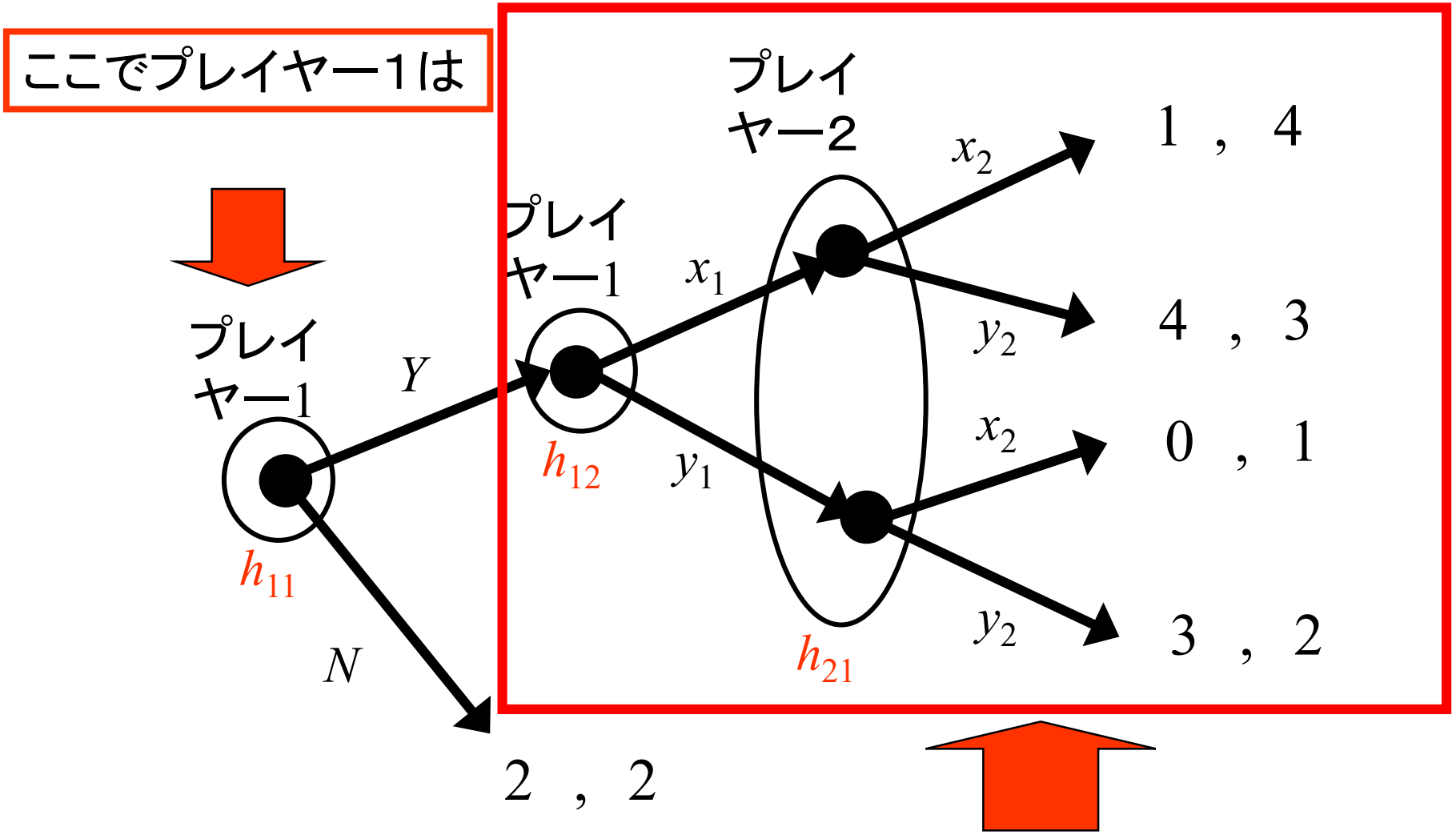
これはやってはいけない！

完全情報でなければ単純なバックワードインダクションはできない



同じ情報集合内で異なる行動は選べない

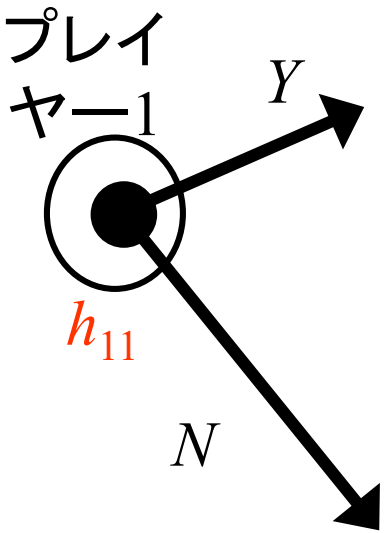
先読みの概念を一般のゲームに加える



Yを選択したならば，このゲームで何が起きるか先読みする

先読みの概念を一般のゲームに加える

イメージ



1 \ 2	x_2	y_2
x_1	(1, 4)	(4 , 3)
y_1	(0, 1)	(3, 2)

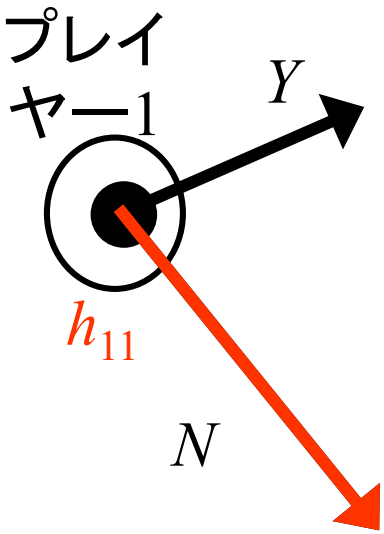
起きる結果はナッシュ均衡

2 , 2

H_{12}より後は同時ゲーム
（戦略形ゲーム）である！

先読みの概念を一般のゲームに加える

イメージ



1 \ 2	x_2	y_2
x_1	(1, 4)	(4 , 3)
y_1	(0, 1)	(3, 2)

ナッシュ均衡を先読みすれば

結果はこうなる！ 2 , 2

H_{12}より後は同時ゲーム（戦略形ゲーム）である！

部分ゲーム完全均衡

- ナッシュ均衡を精緻化した概念「部分ゲーム完全均衡」
- ある時点から後が1つのゲームとみなせるならば（部分ゲーム），ゲームの解は，その部分ゲームのナッシュ均衡でなければならないとする.

定義　部分ゲーム

- 元のゲームのある点から後にある点と枝（元のゲームの部分集合）をすべて取り出したもので，
- 取り出されたすべての点が属する情報集合に関しては，その情報集合の中のすべての点は取り出されていなければならない

定義　部分ゲーム完全均衡

- 「先読み」の概念を一般の展開形ゲームに入れるには？
  - 先に続いているゲームを**適切な部分ゲーム**で分解し，先読みしていかなければならない
- 全ての適切な部分ゲームがナッシュ均衡である戦略の組み合わせ

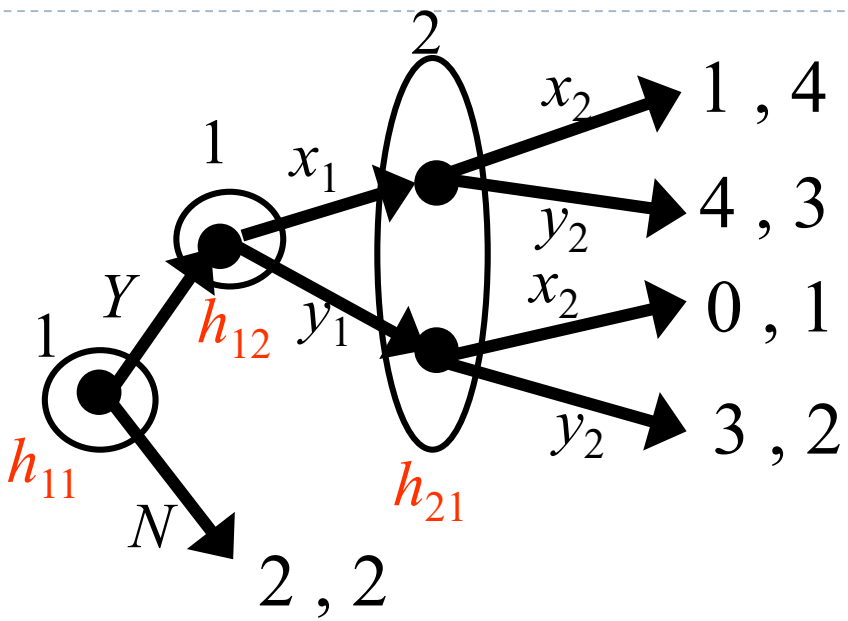
- 「先読み」の概念を一般の展開形ゲームに入れた考え方
- すべての点において，その先に続く点と枝を1つのゲーム（部分ゲーム）とみなせるならば，ゲームの解となる戦略の組合せは，その部分ゲームにおいて，ナッシュ均衡でなければならない
- 初期点においても，これは成立しなければならないので，部分ゲーム完全均衡は元のゲームのナッシュ均衡の1つでなければならない

部分ゲーム完全均衡を求める(例1)

以下のゲームを考える.

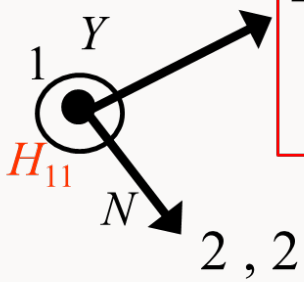
- 第1段階:プレイヤー1はY(ゲームをする), N(ゲームをしない)を選ぶ. Nを選べば, ゲームは終了し, 両プレイヤーの利得2.
- プレイヤー1がYを選ぶとゲームは第2段階へ.
- 第2段階:プレイヤー1がx_1かy_1を, プレイヤー2がx_2かy_2を, 同時に選びゲームは終わる.
  - (x_1, x_2) だと, プレイヤー1の利得1, プレイヤー2の利得4
  - (x_1, y_2) だと, プレイヤー1の利得4, プレイヤー2の利得3
  - (y_1, x_2) だと, プレイヤー1の利得0, プレイヤー2の利得1
  - (y_1, y_2) だと, プレイヤー1の利得3, プレイヤー2の利得2
- 部分ゲーム完全均衡を求めよ

部分ゲーム完全均衡を求める（例1）



- このゲームの部分ゲーム完全均衡を求めてみよう
- 2つの求め方について解説する

このゲームは左のようなゲームであることをイメージしよう

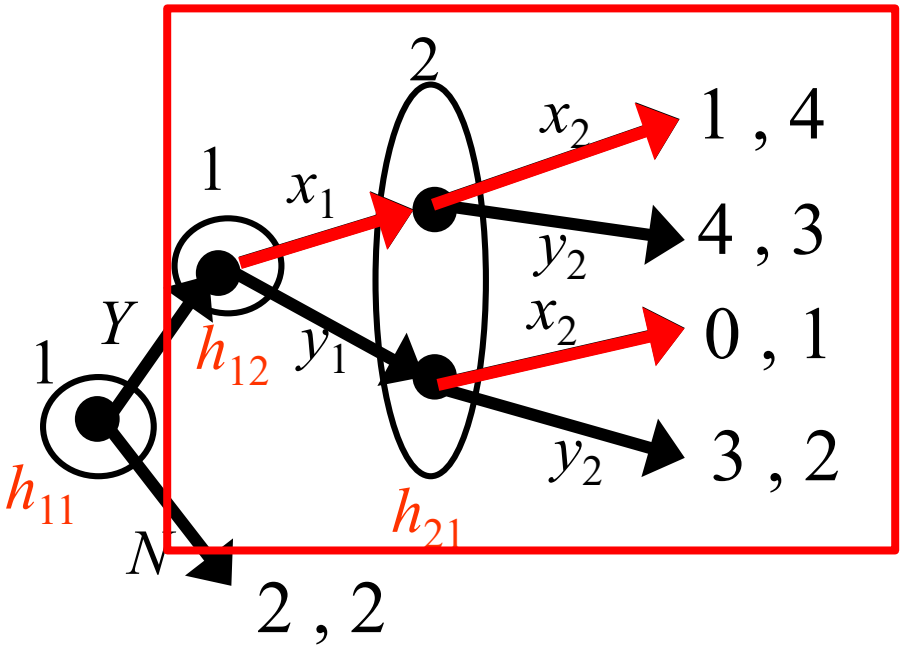


1 \ 2	x_2	y_2
x_1	(1 , 4)	(4 , 3)
y_1	(0 , 1)	(3 , 2)

部分ゲーム完全均衡を求める（例1）：方法1

展開形ゲームの縮約による考え方

終点に近い部分ゲームを取り出す.



1 \ 2	x_2	y_2
x_1	(1 , 4)	(4 , 3)
y_1	(0 , 1)	(3 , 2)

ここが，適切な部分ゲームになっている

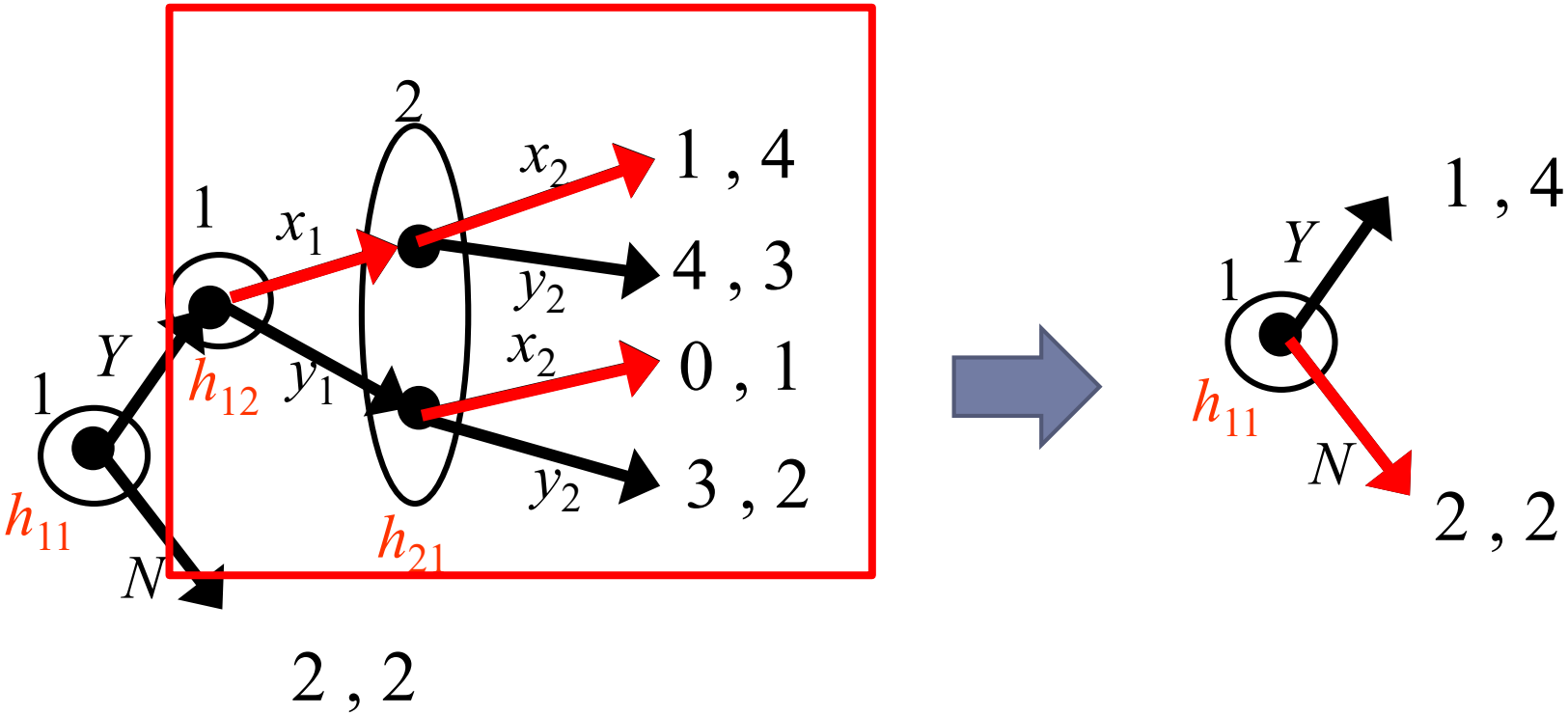
ナッシュ均衡は (x_1, x_2)

部分ゲーム完全均衡では，
各プレイヤーは (x_1, x_2)
を選んでなければならない

情報集合h_{12}
に到達すると，利得は(1,4)になると考えられる.

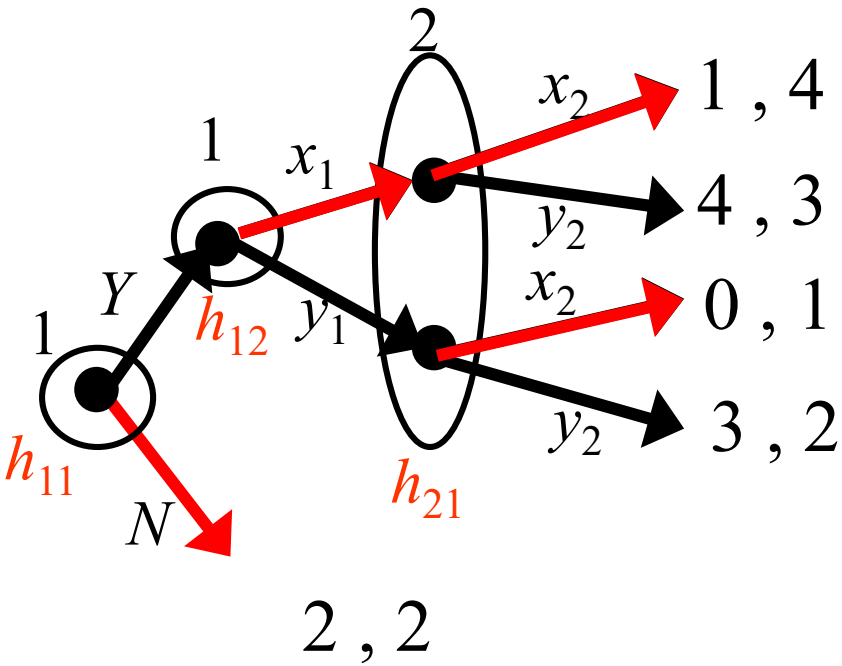
部分ゲーム完全均衡を求める（例1）：方法1

部分ゲームの初期点に，ナッシュ均衡の利得を対応させ，ゲームを縮約する



部分ゲーム完全均衡を求める（例1）：方法1

部分ゲーム完全均衡が求められた

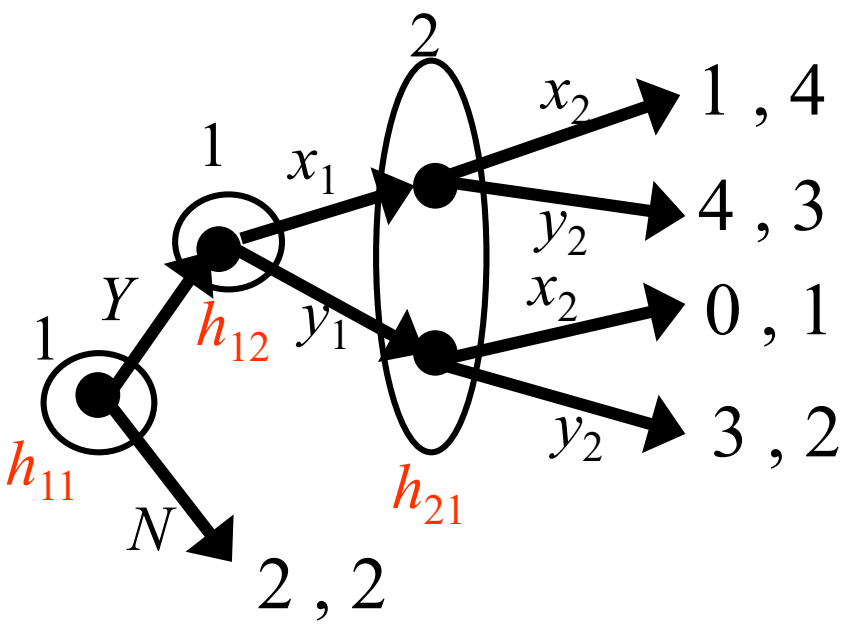


- 縮約によるこの方法はバックワードインダクションの考え方を延長したもの
- 全体のゲームを戦略形ゲームに変換しなくても良いので、簡単
- 部分ゲーム完全均衡は求められるが、それ以外のナッシュ均衡は求められない

部分ゲーム完全均衡を求める（例1）：方法2

部分ゲーム完全均衡の定義（すべての部分ゲームにおいて，ナッシュ均衡）に基づいた求め方

STEP1： 戦略形ゲームに変換する



1 \ 2	x_2	y_2
(Y, x_1)	(1 , 4)	(4 , 3)
(Y, y_1)	(0 , 1)	(3 , 2)
(N, x_1)	(2 , 2)	(2 , 2)
(N, y_1)	(2 , 2)	(2 , 2)

部分ゲーム完全均衡を求める（例1）：方法2

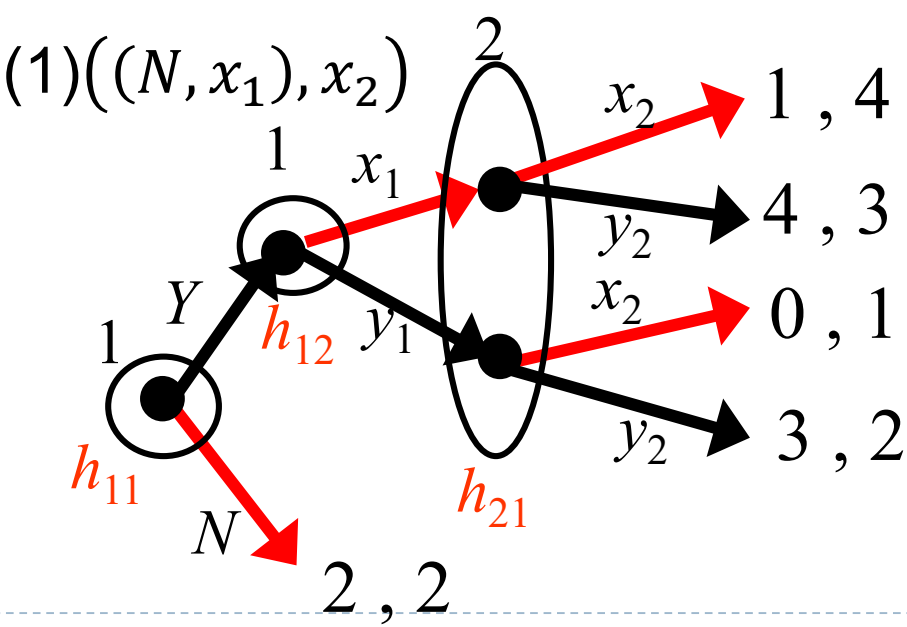
1 \ 2	x_2	y_2
(Y, x_1)	(1 , 4)	(4 , 3)
(Y, y_1)	(0 , 1)	(3 , 2)
(N, x_1)	(2 , 2)	(2 , 2)
(N, y_1)	(2 , 2)	(2 , 2)

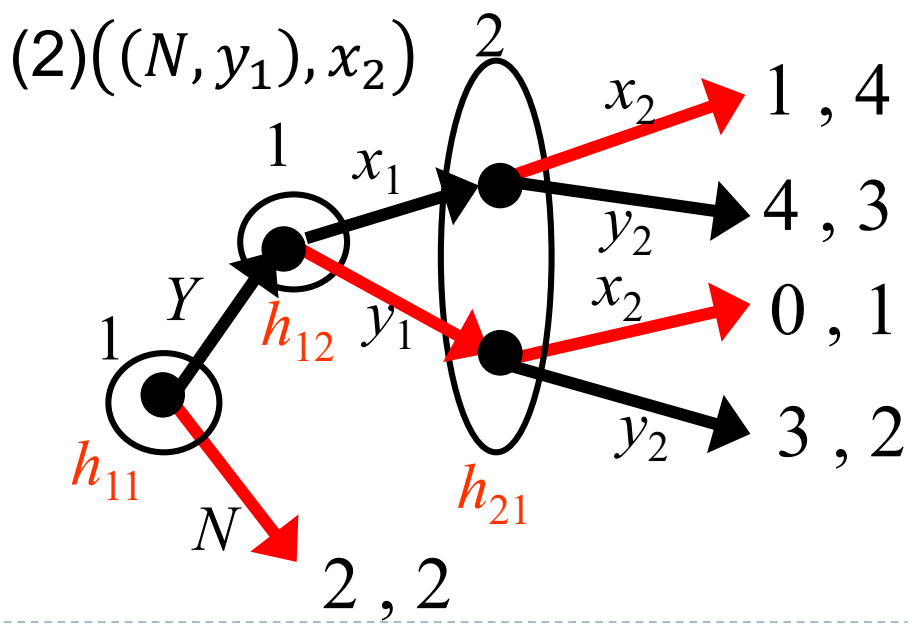
STEP2：ナッシュ均衡を求める

ナッシュ均衡は2つ

（1）$((N, x_1), x_2)$

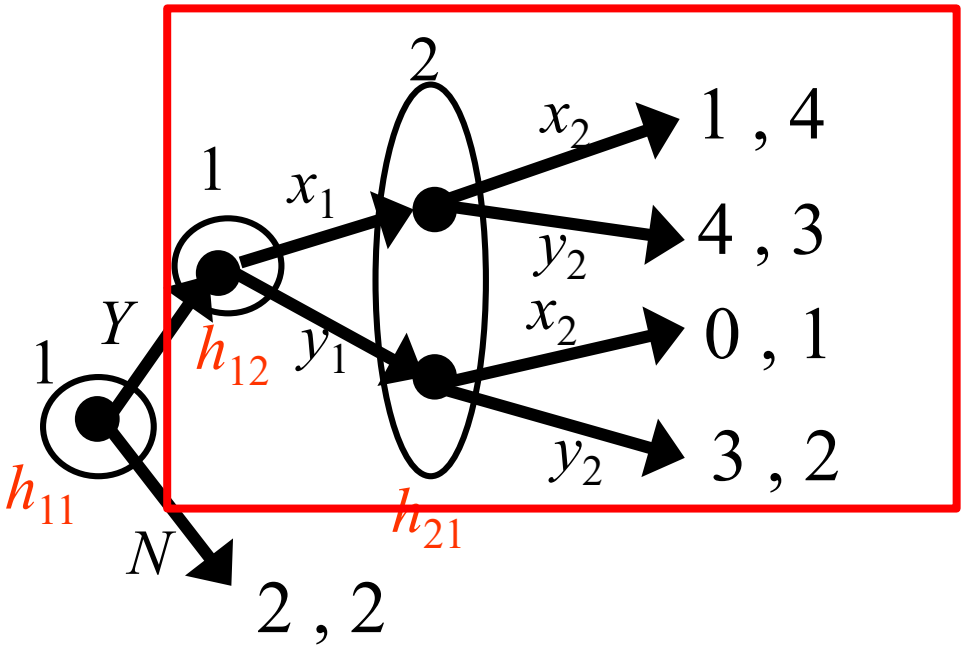
（2）$((N, y_1), x_2)$





部分ゲーム完全均衡を求める：方法2

STEP3：適切な部分ゲームをチェックし，そのナッシュ均衡を求める



1 \ 2	x_2	y_2
x_1	(1 , 4)	(4 , 3)
y_1	(0 , 1)	(3 , 2)

ここが，適切な部分ゲームになっている

ナッシュ均衡は (x_1, x_2)

部分ゲーム完全均衡では，
各プレイヤーは (x_1, x_2)
を選んでなければならない

部分ゲーム完全均衡を求める:方法2

STEP4:元のゲームのナッシュ均衡から部分ゲーム完全均衡を選ぶ

1 \ 2	x_2	y_2
(Y, x_1)	(1 , 4)	(4 , 3)
(Y, y_1)	(0 , 1)	(3 , 2)
(N, x_1)	(2 , 2)	(2 , 2)
(N, y_1)	(2 , 2)	(2 , 2)

ナッシュ均衡は2つ

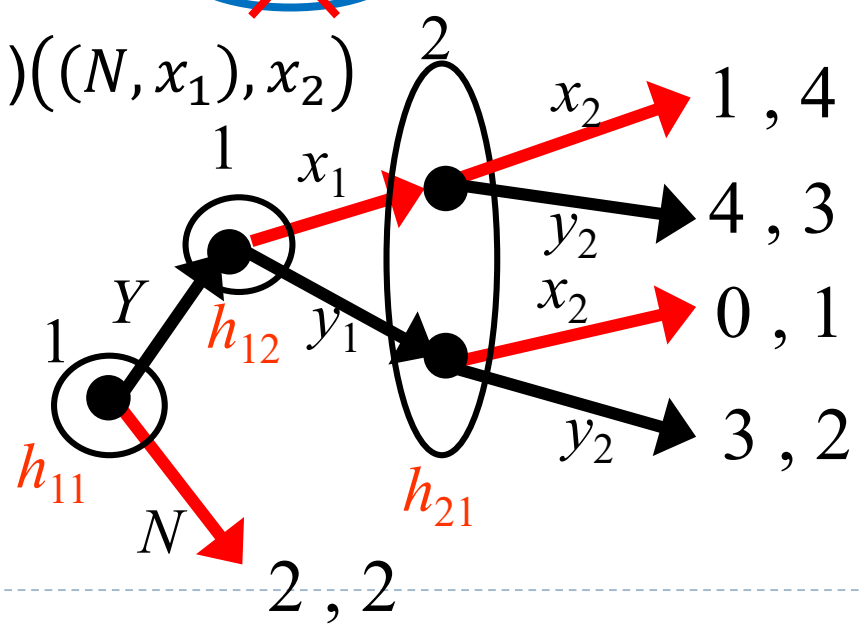
(1) $((N, x_1), x_2)$

(2) $((N, y_1), x_2)$

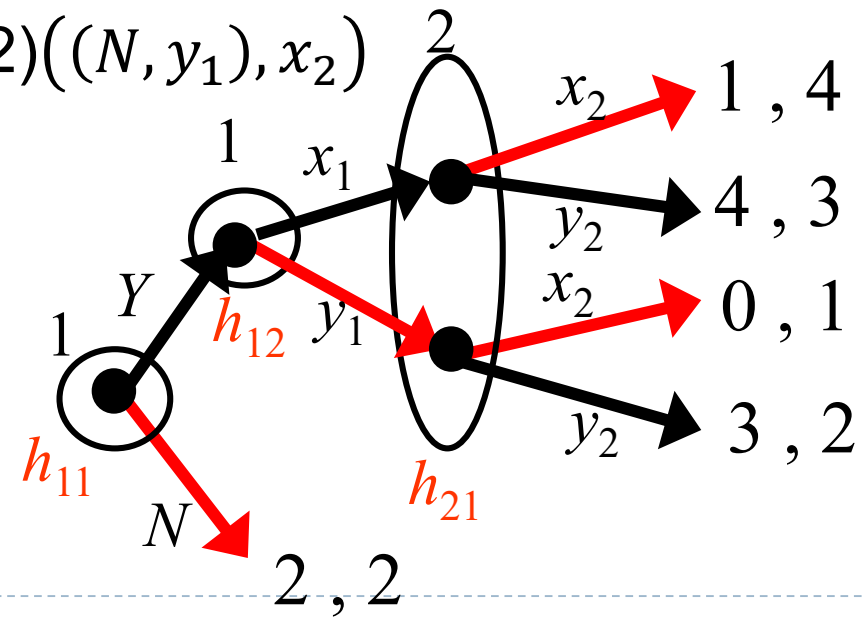
部分ゲーム完全均衡では,
各プレイヤーは (x_1, x_2)
を選んでなければならない

部分ゲーム完全均衡は1つ
$((N, x_1), x_2)$

(1) $((N, x_1), x_2)$



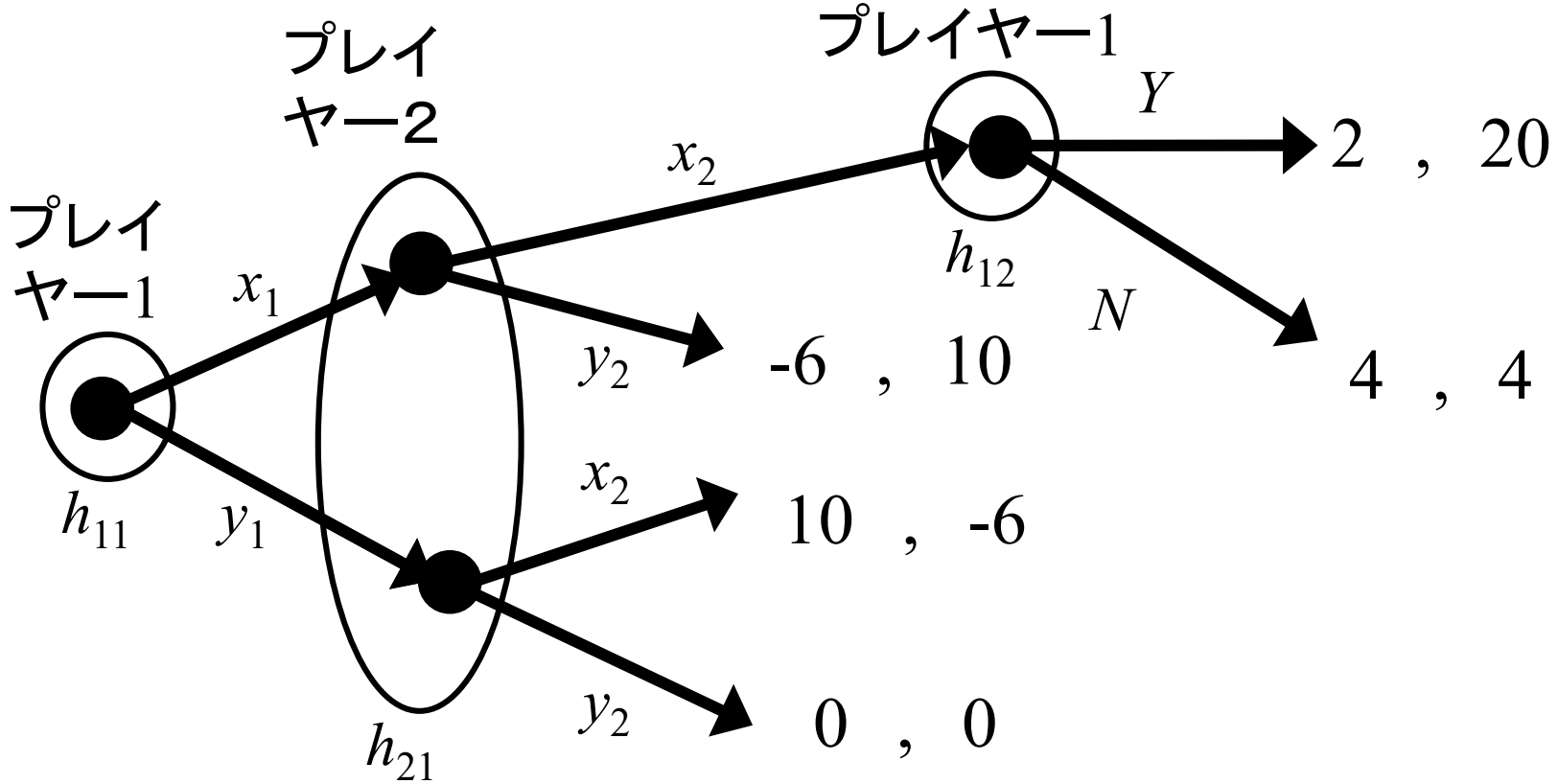
(2) $((N, y_1), x_2)$



部分ゲーム完全均衡：2つの考え方

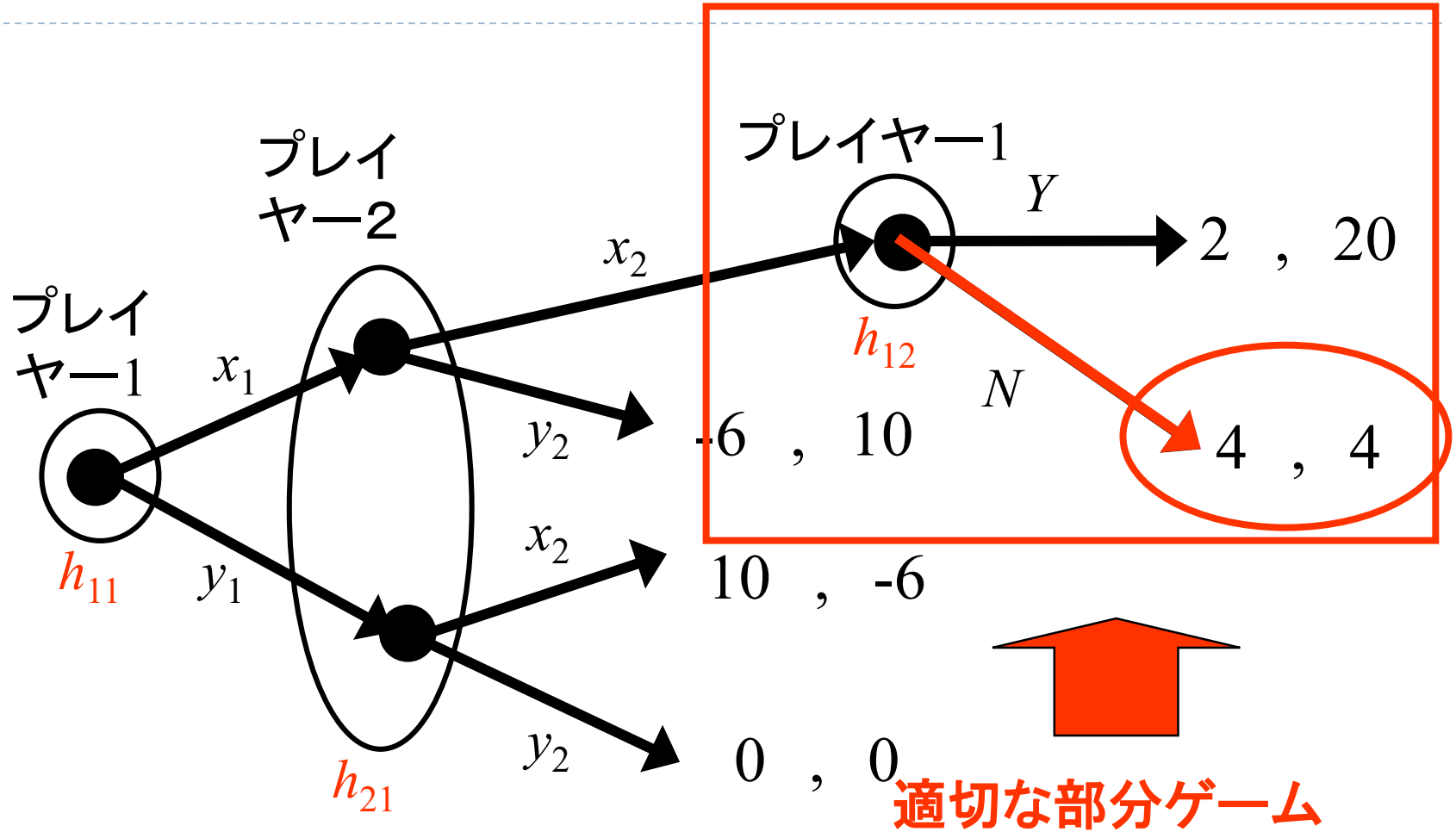
- 展開形ゲーム的に考える（ゲームの縮約） 方法1
  - バックワードインダクションの考え方
  - 部分ゲームを考え，その部分ゲームの初期点に，ナッシュ均衡の利得を対応させて終点とし，残りのゲームを削除してしまう.
- 戦略形ゲーム的に考える 方法2
  - 戦略形ゲームに変換し，ナッシュ均衡を求める
  - 部分ゲームを考え，その部分ゲームのナッシュ均衡の戦略を用いていないナッシュ均衡を外す

部分ゲーム完全均衡を求める(例2):方法1



- このゲームの部分ゲーム完全均衡を求めてみよう
- やはり2つの求め方について解説する

部分ゲーム完全均衡を求める(例2):方法1

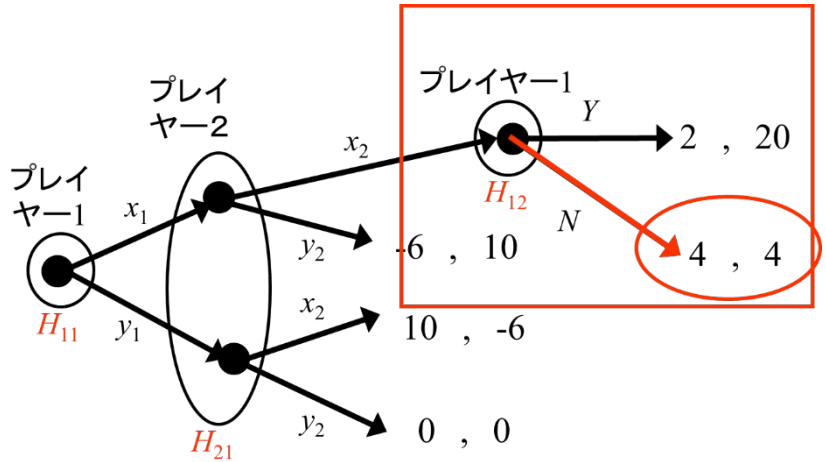


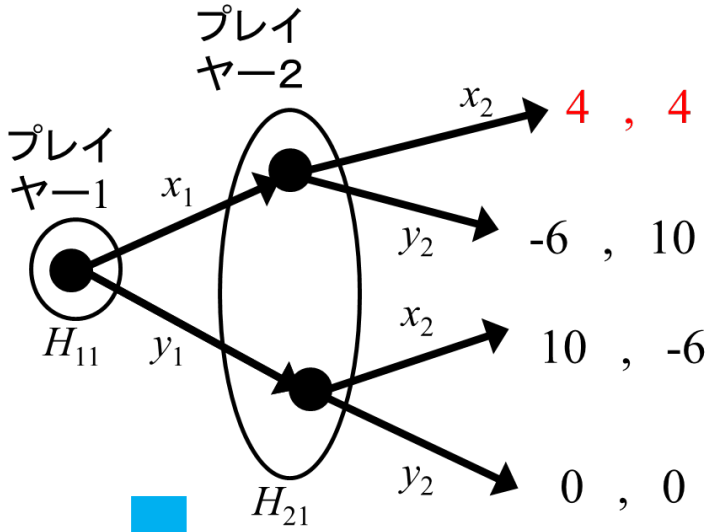
適切な部分ゲームでナッシュ均衡でなければならない

プレイヤーが1人

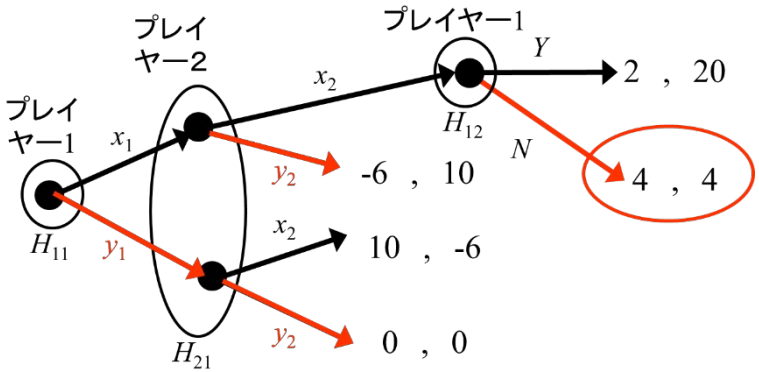
ナッシュ均衡＝最適戦略

部分ゲーム完全均衡を求める(例2):方法1

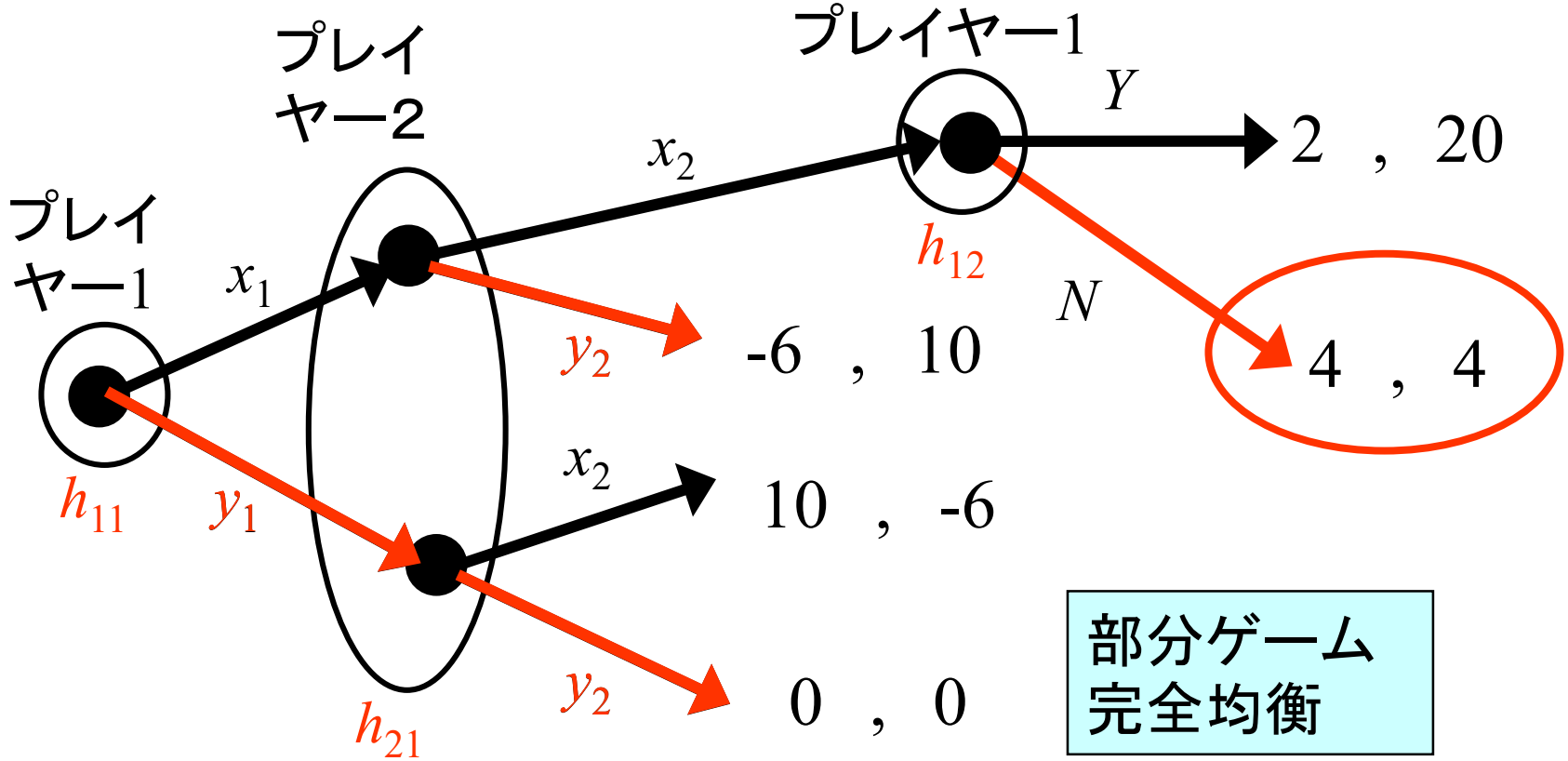




1 \ 2	x_2	y_2
x_1	(4 , 4)	(-6, 10)
y_1	(10, -6)	(0 , 0)



部分ゲーム完全均衡を求める（例2）



全体のゲームは囚人のジレンマと同じ…

部分ゲーム完全均衡を求める（例2）：方法2

1 \ 2	x_2	y_2
(x_1, Y)	(2 , 20)	(-6, 10)
(x_1, N)	(4 , 4)	(-6, 10)
(y_1, Y)	(10, -6)	(0 , 0)
(y_1, N)	(10, -6)	(0 , 0)

ナッシュ均衡は2つ

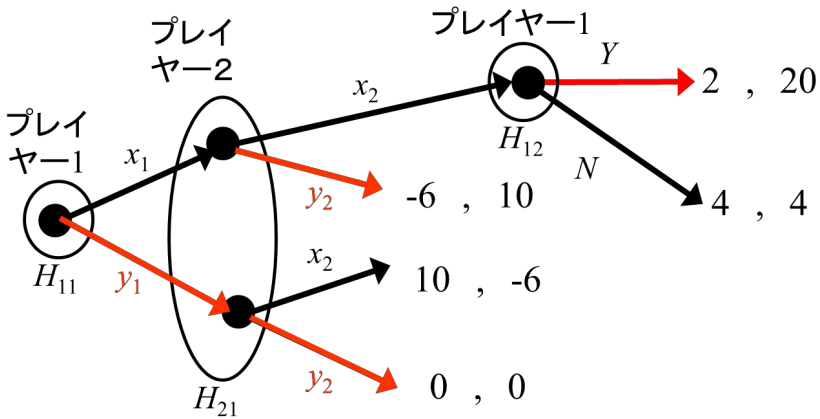
（1）$((y_1, Y), y_2)$

（2）$((y_1, N), y_2)$

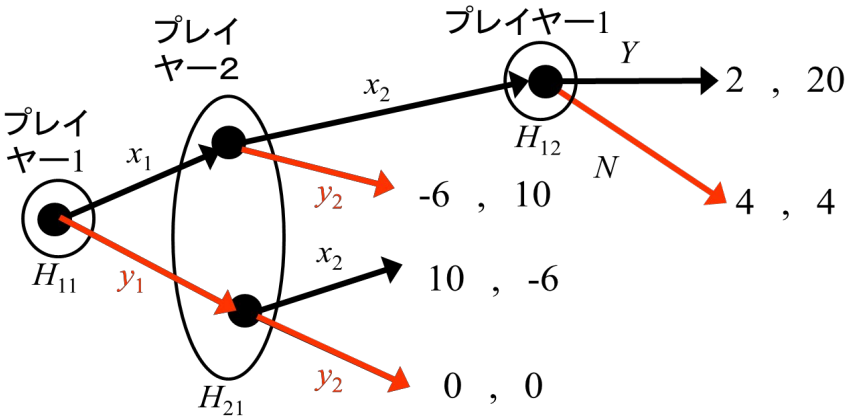
2つのナッシュ均衡は同じ結果だけど

部分ゲーム完全均衡は1つ
$((y_1, N), y_2)$

(1)$((y_1, Y), y_2)$



(2)$((y_1, N), x_2)$

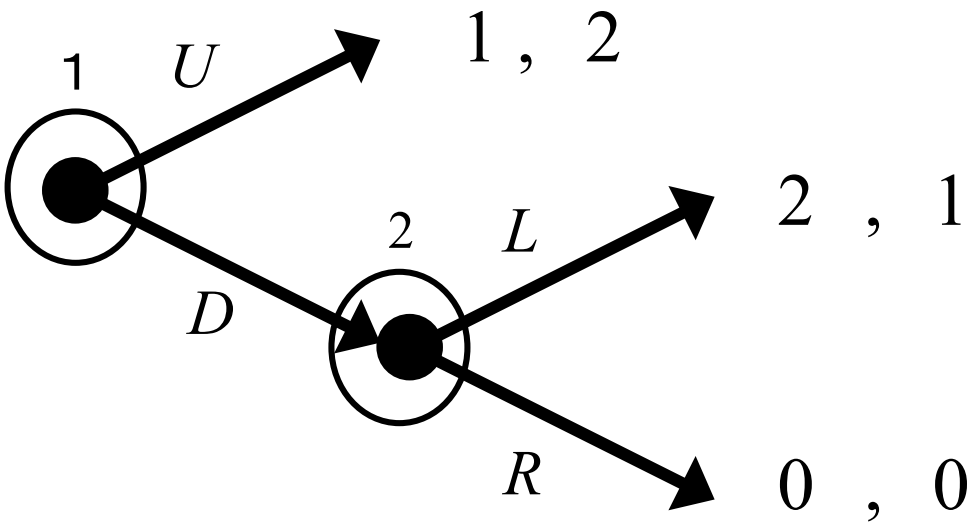


部分ゲーム完全均衡：2つの考え方（再掲）

- 展開形ゲーム的に考える（ゲームの縮約）
  - バックワードインダクションの考え方
  - 部分ゲームを考え，その部分ゲームの初期点に，ナッシュ均衡の利得を対応させて終点とし，残りのゲームを削除してしまう.
- 戦略形ゲーム的に考える
  - 戦略形ゲームに変換し，ナッシュ均衡を求める
  - 部分ゲームを考え，その部分ゲームのナッシュ均衡の戦略を用いていないナッシュ均衡を外す

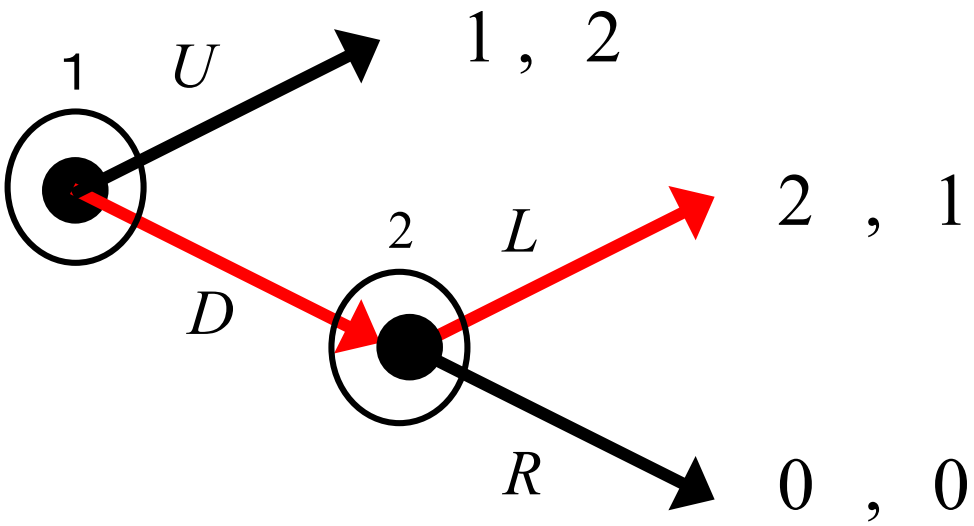
- ここまでの2つの例では，ナッシュ均衡は2つあったが，戦略の組は違っても同じ結果であった.
  - 部分ゲーム完全均衡とナッシュ均衡は同じ結果.
- ナッシュ均衡が複数あって異なる結果となるときもある.
  - このときは，部分ゲーム完全均衡が威力を発揮する
  - もともと完全情報ゲームの例はそうであった.

部分ゲーム完全均衡を求めよ（例3）

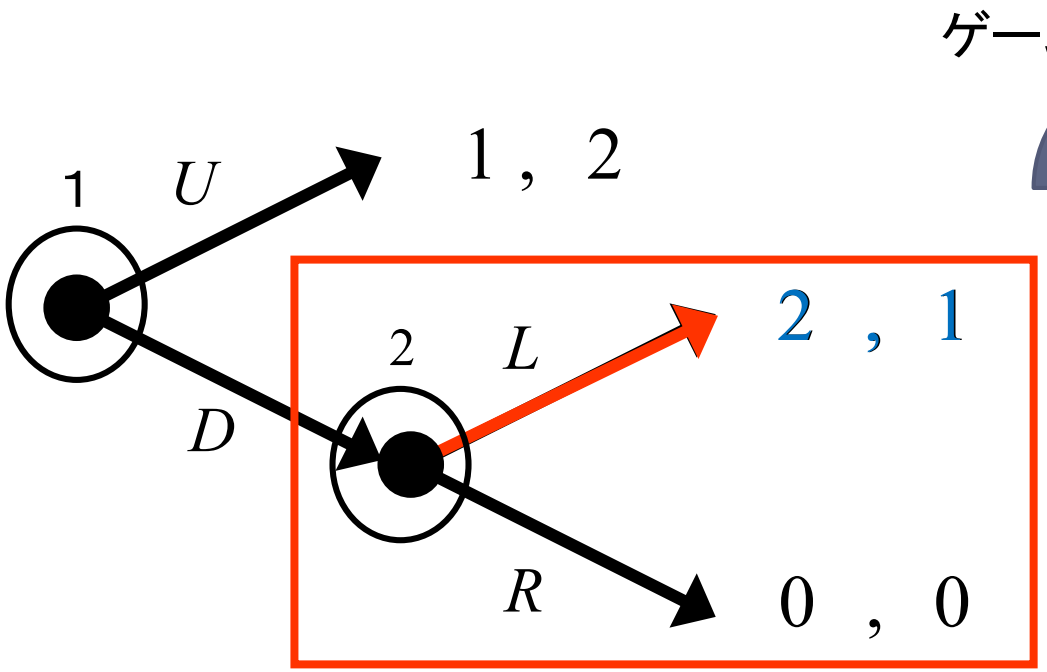


- このゲームの部分ゲーム完全均衡を求めてみよう
- 2つの求め方について解説する

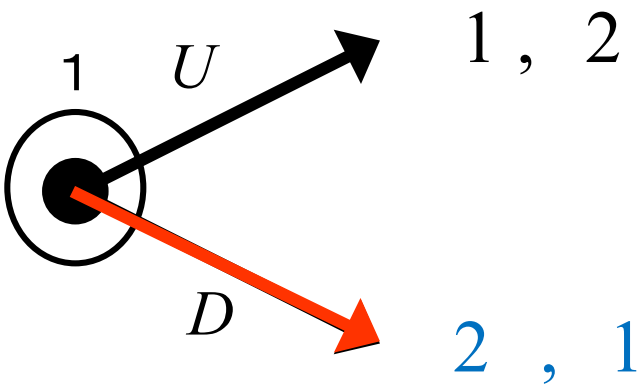
部分ゲーム完全均衡を求めよ（例3）



部分ゲーム完全均衡を求めよ（例3）：方法1



ゲームを縮約する



部分ゲーム

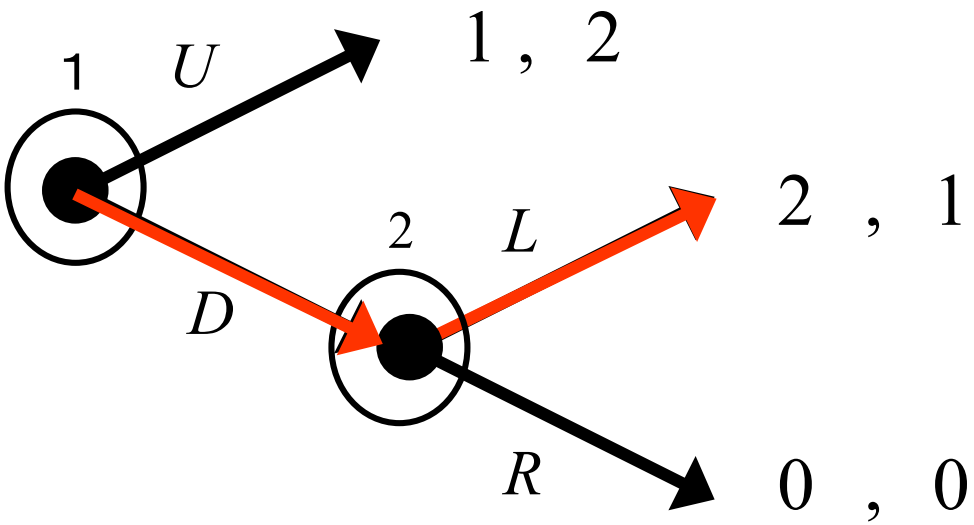
プレイヤーが1人

ナッシュ均衡＝最適戦略

プレイヤー2はLを選ぶ

部分ゲーム完全均衡は
(D,L)

部分ゲーム完全均衡を求めよ（例3）：方法1



実は、これは単純なバックワードインダクションをやっているに過ぎない

部分ゲーム完全均衡は
(D,L)

再確認1：
- 完全情報ゲームでは、部分ゲーム完全均衡は（ゲーム理論1で学んだ）バックワードインダクションの解である
- 2018年の試験では，該当する問題の正答率が63%だった.

部分ゲーム完全均衡を求める（例3）：方法2

1 \ 2	L	R
U	(1, 2)	(1, 2)
D	(2, 1)	(0, 0)

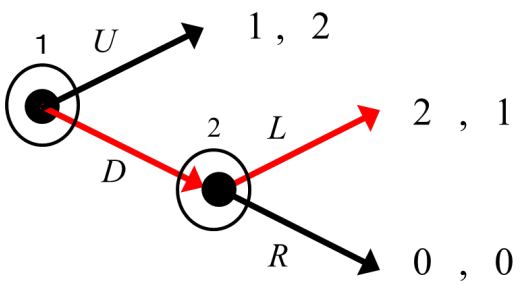
ナッシュ均衡は2つ！

（1）(D, L)

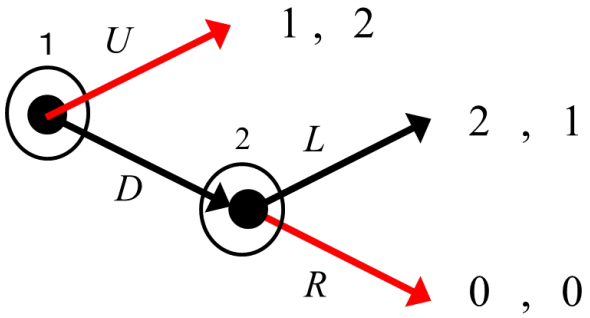
（2）(U, R)

部分ゲーム完全均衡は(D, L)　1つだけ！

(1)(D, L)



(2)(U, R)



再確認2：

- 完全情報ゲームでは、部分ゲーム完全均衡は（ゲーム理論1で学んだ）バックワードインダクションの解である
- 部分ゲーム完全均衡ではないナッシュ均衡は、他にも存在することがある.

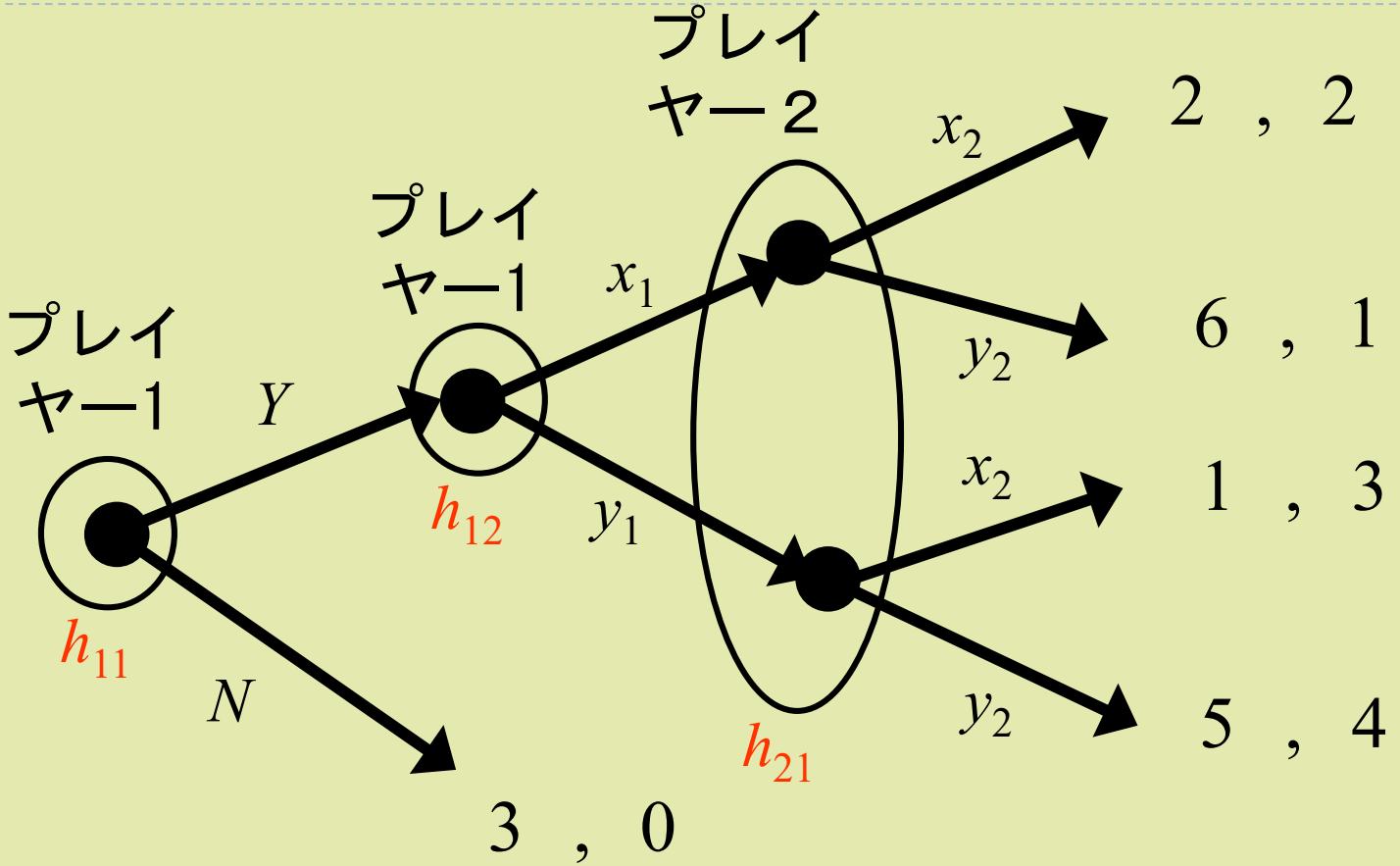
プレイヤー2の戦略が最適戦略ではない
＝部分ゲームがナッシュ均衡ではない

まとめ　部分ゲーム完全均衡

- 一般の展開形ゲームの解は部分ゲーム完全均衡である
- 部分ゲーム完全均衡とは？
  - すべての**適切な部分ゲーム**においてナッシュ均衡であるような戦略
  - 当然，全体のゲームも適切なナッシュ均衡なので，部分ゲーム完全均衡はナッシュ均衡
- 部分ゲーム完全均衡を求めるには，
  - すべての部分ゲーム（戦略形ゲーム）のナッシュ均衡を求める方法（方法1）と
  - 終点に近い部分ゲームからバックワードインダクションのように縮約していく方法（方法2）がある
  - 解である部分ゲーム完全均衡を求めるだけならば，縮約による方法が簡単である.

- ナッシュ均衡の精緻化　　Selten (1975)

演習　部分ゲーム完全均衡を求めよ



- 上記の展開形ゲームを戦略形ゲームに変換せよ
- ナッシュ均衡を求めよ（混合戦略は考えない）
- 部分ゲーム完全均衡を求めよ（混合戦略は考えない）

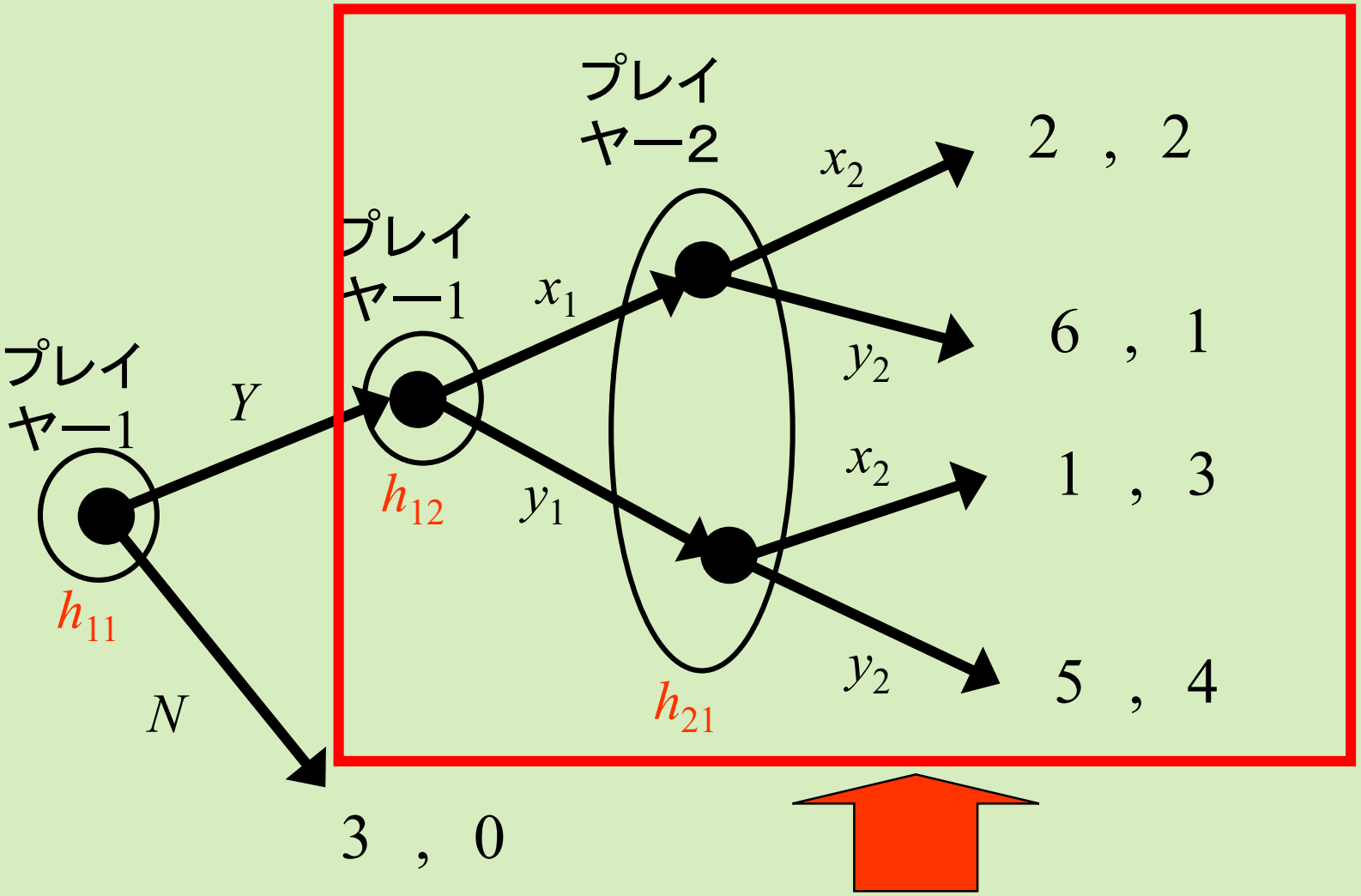
解答　戦略形ゲームへの変換

1 \ 2	x_2	y_2
(Y, x_1)	(2 , 2)	(6 , 1)
(Y, y_1)	(1 , 3)	(5 , 4)
(N, x_1)	(3 , 0)	(3 , 0)
(N, y_1)	(3 , 0)	(3 , 0)

解答　ナッシュ均衡

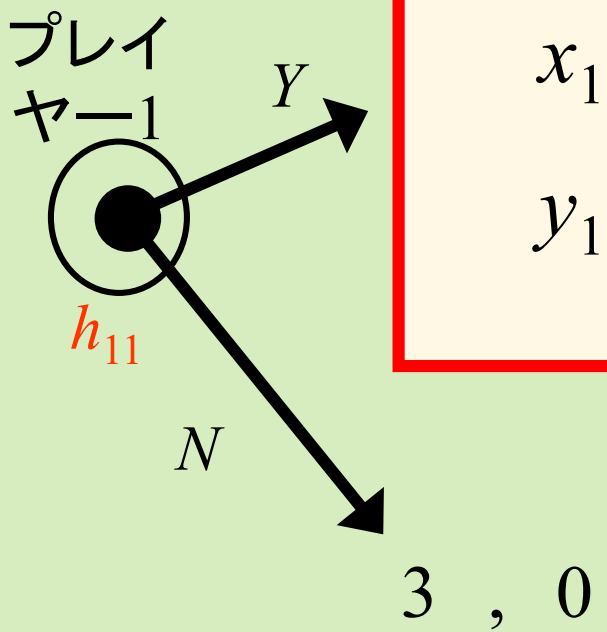
1 \ 2	x_2	y_2
(Y, x_1)	(2 , 2)	(6 , 1)
(Y, y_1)	(1 , 3)	(5 , 4)
(N, x_1)	(3 , 0)	(3 , 0)
(N, y_1)	(3 , 0)	(3 , 0)

解答　部分ゲーム完全均衡を求めよ



適切な部分ゲーム

解答　部分ゲーム完全均衡を求めよ

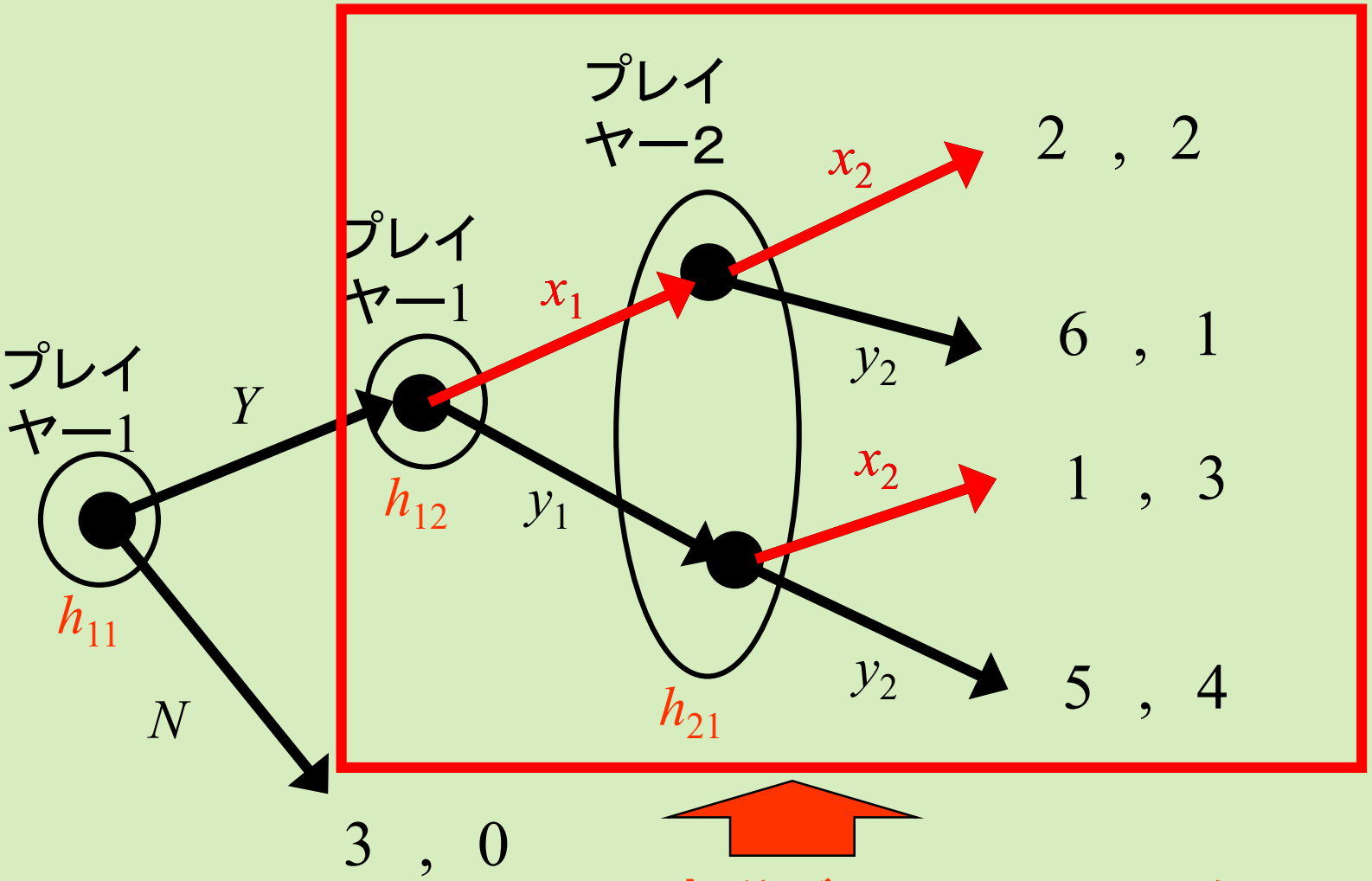


1 \ 2	x_2	y_2
x_1	(2, 2)	(6, 1)
y_1	(1, 3)	(5, 4)

ナッシュ均衡は(x_1, x_2)

イメージ:
部分ゲームは戦略形ゲーム

解答　部分ゲーム完全均衡を求めよ

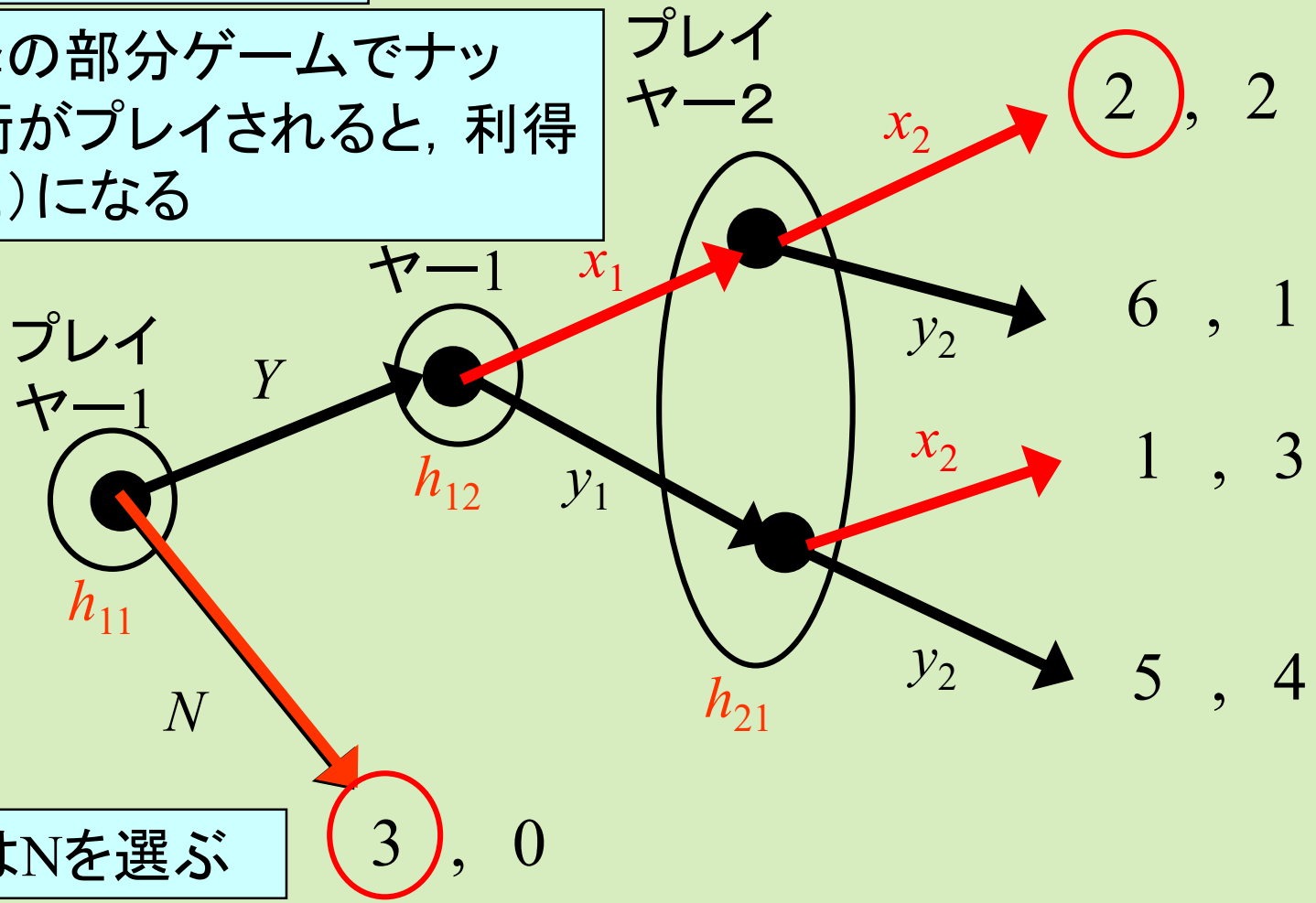


部分ゲームのナッシュ均衡を書き入れた

解答　部分ゲーム完全均衡を求めよ

頭の中で「縮約」する

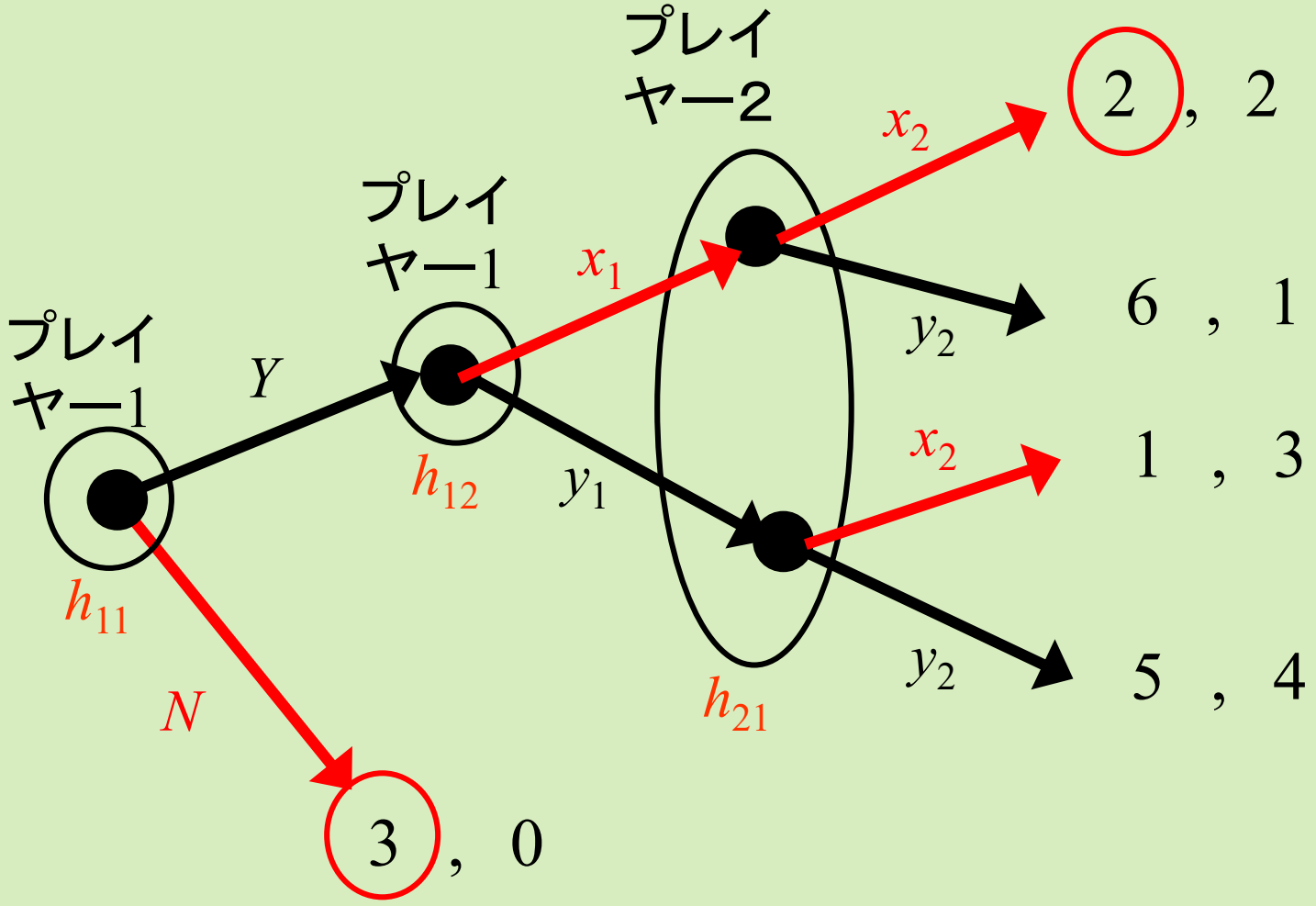
H_{12}以降の部分ゲームでナッシュ均衡がプレイされると，利得は（2，2）になる



H_{11}ではNを選ぶ

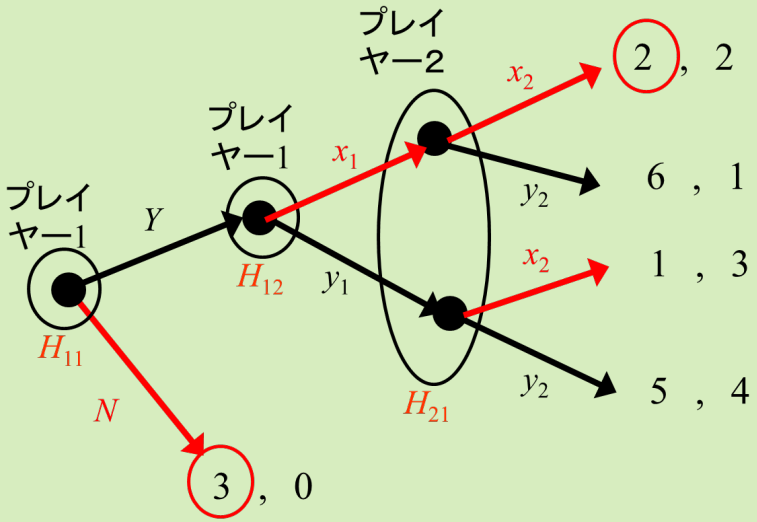
解答　部分ゲーム完全均衡を求めよ－解答方法

図によって解答する



解答　部分ゲーム完全均衡を求めよ－解答方法

記述で解答するには？

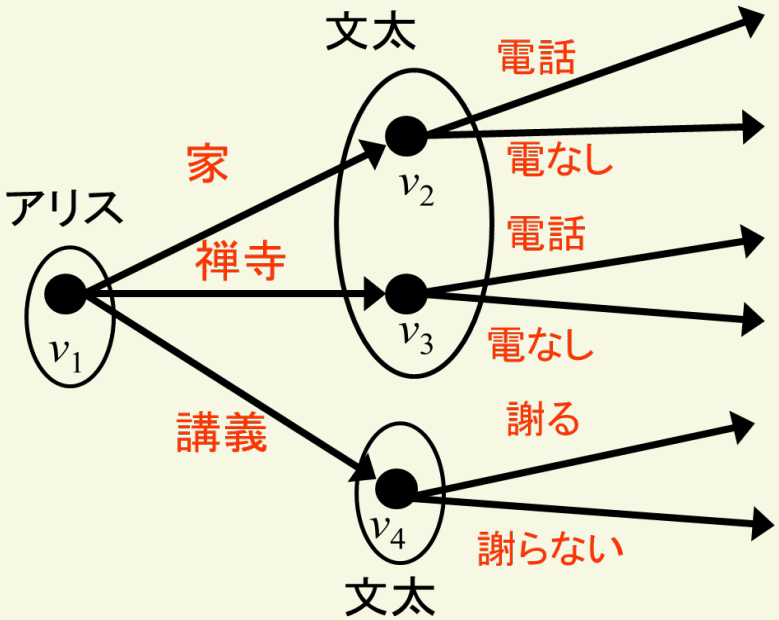


情報集合に対応させて
選択する行動を記す

プレイヤー1	h_{11}	N
	h_{12}	x_1
プレイヤー2	h_{21}	x_2

演習★ アリスと文太のゲームの解

- 演習3.5



アリス	文太
3	3
0	0
−3	−3
2	0
4	1
−2	−2

- ナッシュ均衡を求め，ナッシュ均衡で起こる結果（均衡経路）を示せ．
- 部分ゲーム完全均衡を求め，部分ゲーム完全均衡で起こる結果（均衡経路）を示せ．

NABENAVI .net

解答　アリスと文太のゲームの解を求める

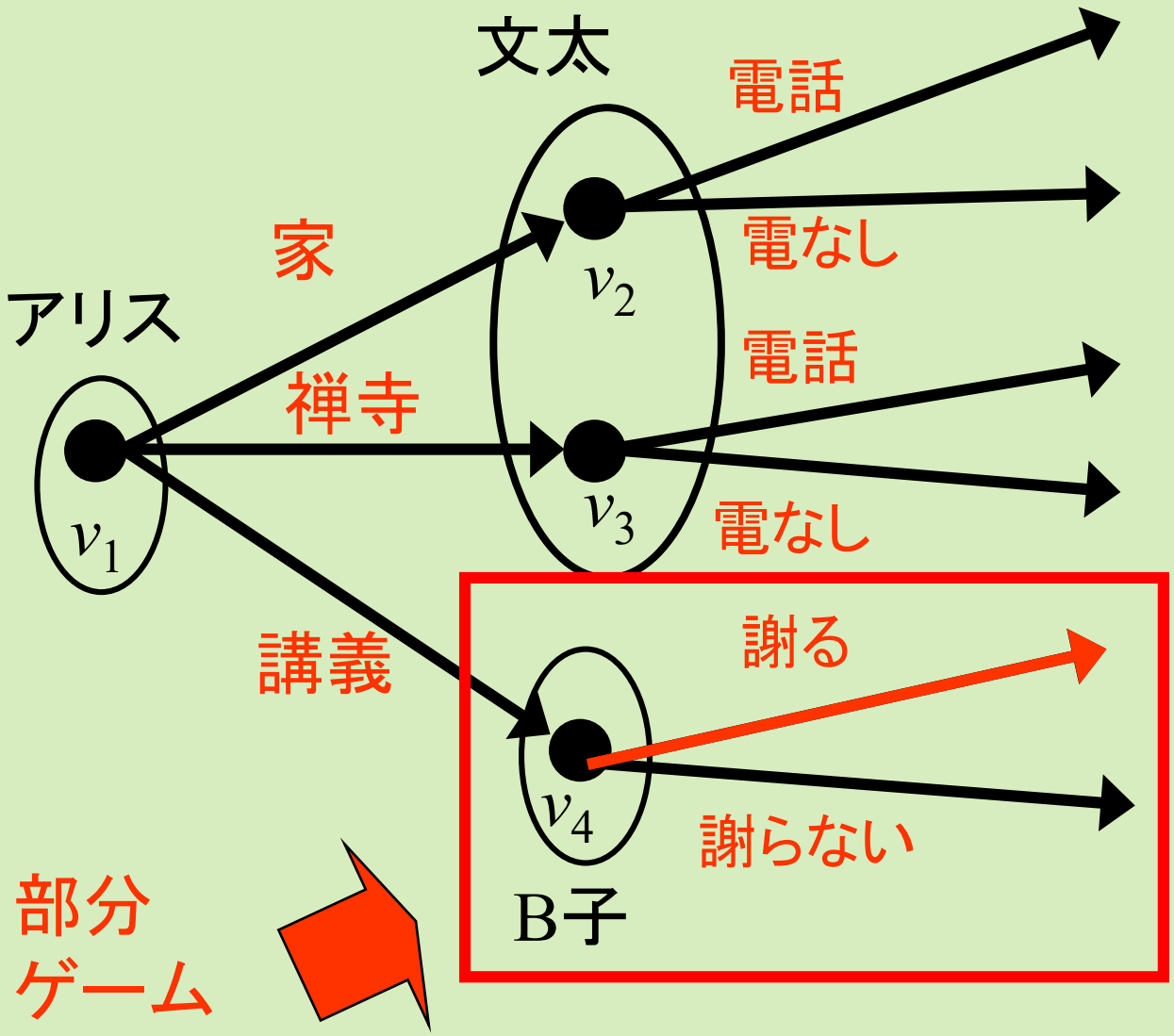
文太 / アリス	(電話,謝る)	(電話,非謝)	(非電,謝る)	(非電,非謝)
家	(3, 3)	(3, 3)	(0, 0)	(0, 0)
禅寺	(-3, -3)	(-3, -3)	(2, 0)	(2, 0)
講義	(4, 1)	(-2, -2)	(4, 1)	(-2, -2)

ナッシュ均衡は4つ　⇒　起きる可能性は3つ
(1)アリスが家にいて、文太が電話
(2)アリスは禅寺へ行き、文太は電話しない
(3)アリスが講義に出て、文太は謝る

部分ゲーム完全均衡は？

アリスが禅寺へ行く可能性
(2)はあるのか？

解答　アリスと文太のゲーム



アリス	文太
3	3
0	0
−3	−3
2	0
4	1
−2	−2

解答　アリスと文太のゲームの解を求める

文太 / アリス	(電話,謝る)	(電話,非謝)	(非電,謝る)	(非電,非謝)
家	(3 , 3)	~~(3 , 3)~~	(0 , 0)	(0 , 0)
禅寺	(-3, -3)	(-3, -3)	(2 , 0)	~~(2 , 0)~~
講義	(4 , 1)	(-2, -2)	(4 , 1)	(-2, -2)

文太が謝らない戦略は、部分ゲーム完全均衡にならない

部分ゲーム完全均衡は2つあるが，結果は1つ
⇒アリスが講義に出て、文太は謝る

結果を絞り込むことができる！

Selten ありがとう！（アリス・文太）

6.5 部分ゲーム完全均衡（発展編）

6.5.1 複数均衡と部分ゲーム完全均衡

2段階のゲーム

以下のゲームを考える.

- 第1段階：プレイヤー1はY（ゲームをする），N（ゲームをしない）を選ぶ．Nを選べば，ゲームは終了し，両プレイヤーの利得は2
  プレイヤー1がYを選ぶとゲームは第2段階へ.
- 第2段階：プレイヤー1とプレイヤー2が，同時にAかBを選ぶ.
  - 共にAを選べば，プレイヤー1の利得3，プレイヤー2の利得1
  - 共にBを選べば，プレイヤー1の利得1，プレイヤー2の利得3

1＼2	A	B
A	(3 , 1)	(0 , 0)
B	(0 , 0)	(1 , 3)

- 第2段階のゲームは，コーディネーションゲーム
- 共に同じものを選ぶことがナッシュ均衡
- 純粋戦略のナッシュ均衡は2つ．混合戦略も考えると3つ

実験：2段階ゲーム

実験してみる？

- 第1段階：プレイヤー1はY，Nを選ぶ．Nを選べば，ゲームは終了

両プレイヤーの利得は2．Yを選ぶとゲームは第2段階へ．

- 第2段階：プレイヤー1とプレイヤー2が，同時にAかBを選ぶ．
  - 共にAを選べば，プレイヤー1の利得3，プレイヤー2の利得1
  - 共にBを選べば，プレイヤー1の利得1，プレイヤー2の利得3

1＼2	A	B
A	(3 , 1)	(0 , 0)
B	(0 , 0)	(1 , 3)

考えてみよう：

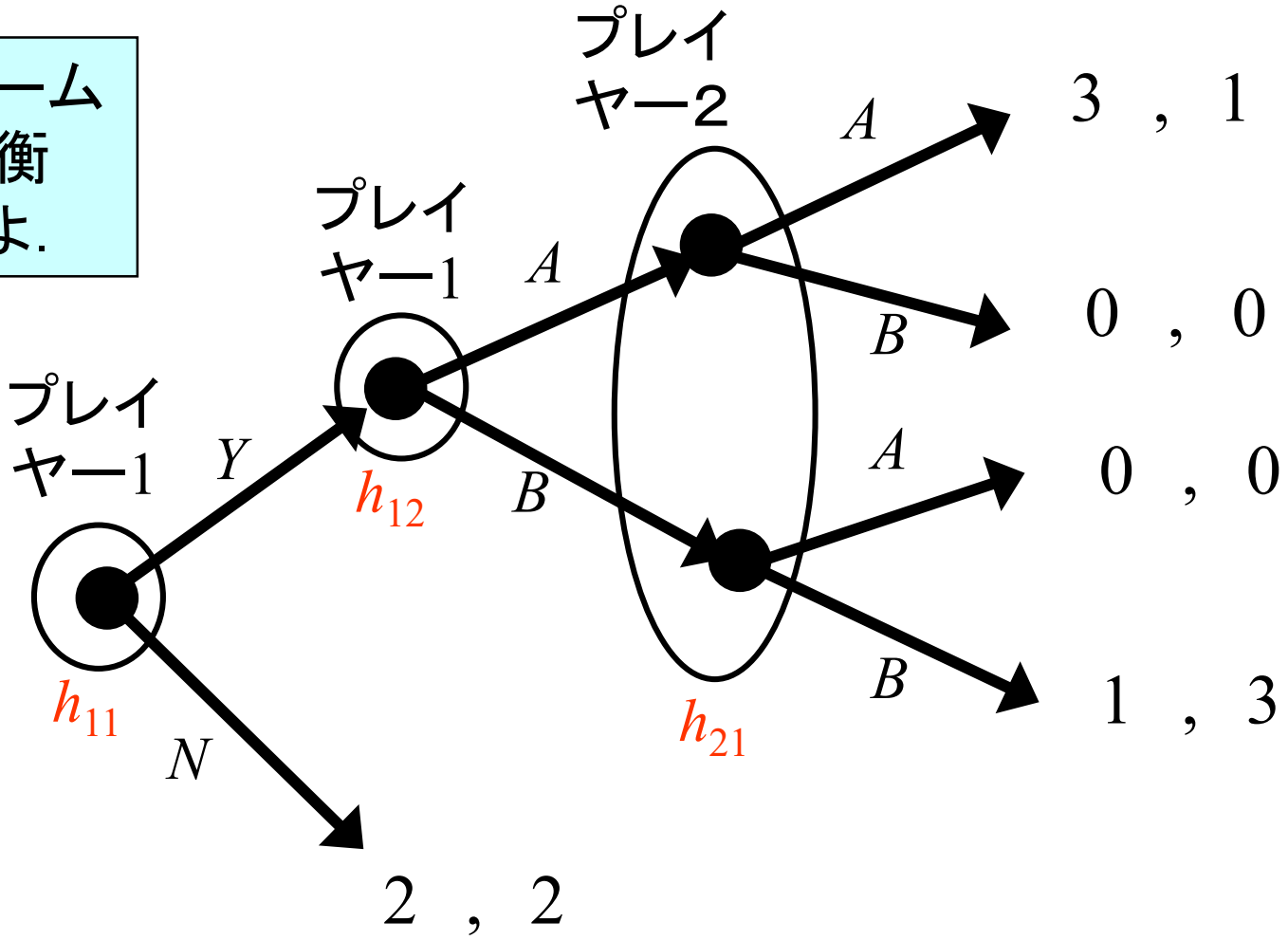
- 第2段階だけだとどうなるか？
- もしプレイヤー1がYを選んだと仮定して，その後，2人がどうするか

部分ゲーム完全均衡は複数存在することもある

- そもそも戦略形ゲームでもナッシュ均衡点が複数ある
- したがって部分ゲーム完全均衡も複数存在することはある.
- 注意：部分ゲームの戦略形ゲームの解が複数あるだけではなく，先読みした部分ゲームのナッシュ均衡のどちらを解と考えるかによって，それ以前の選択が影響を受けることがある.

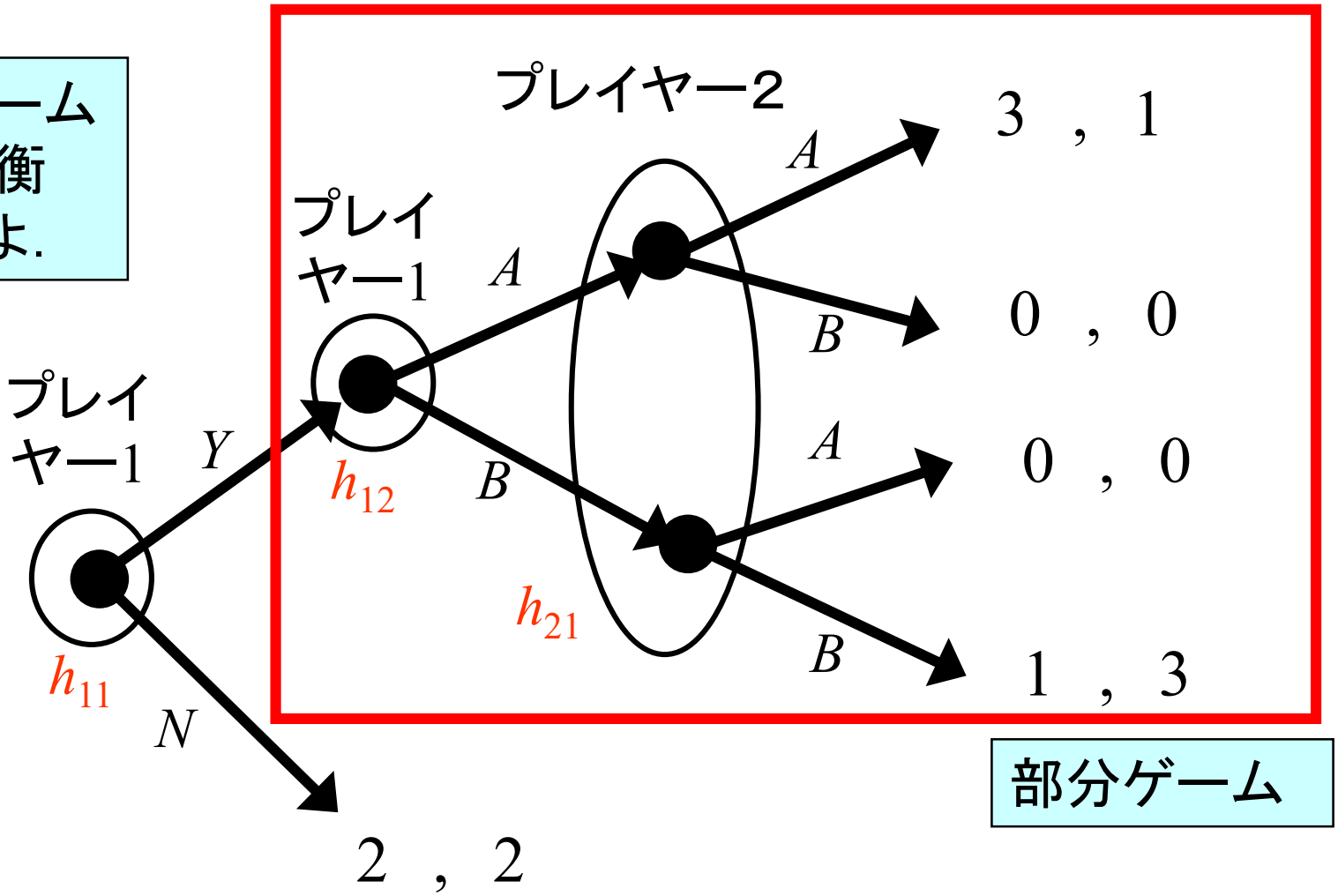
例：複数の部分ゲーム完全均衡

部分ゲーム
完全均衡
を求めよ.

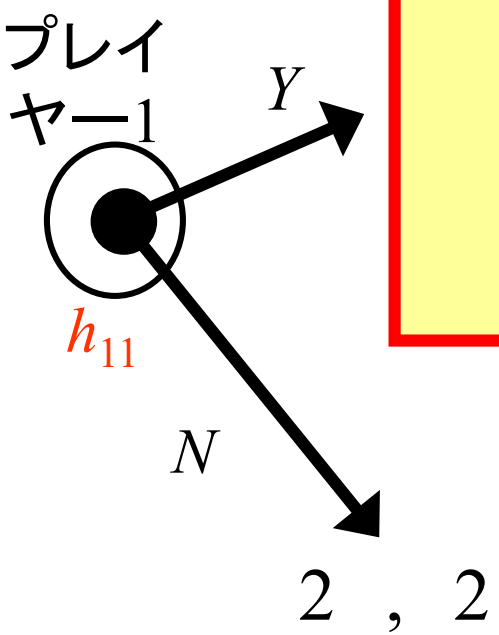


例：複数の部分ゲーム完全均衡

部分ゲーム
完全均衡
を求めよ.



例：複数の部分ゲーム完全均衡

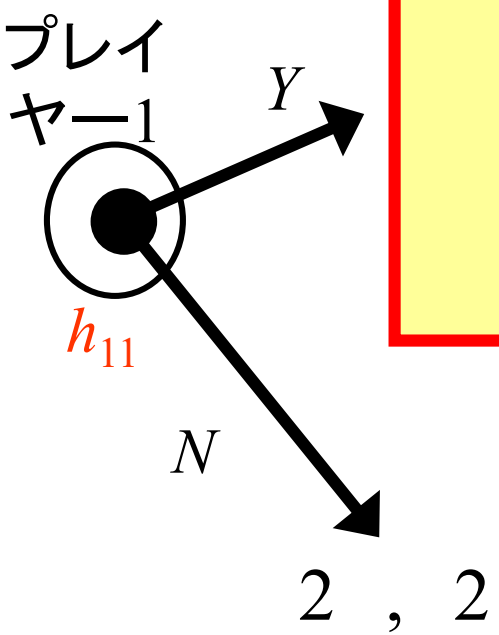


1 \ 2	A	B
A	(3 , 1)	(0 , 0)
B	(0 , 0)	(1 , 3)

部分ゲームに2つのナッシュ均衡

混合戦略も考えるとナッシュ均衡は3つあるが，ここでは混合戦略は考えない

例：複数の部分ゲーム完全均衡



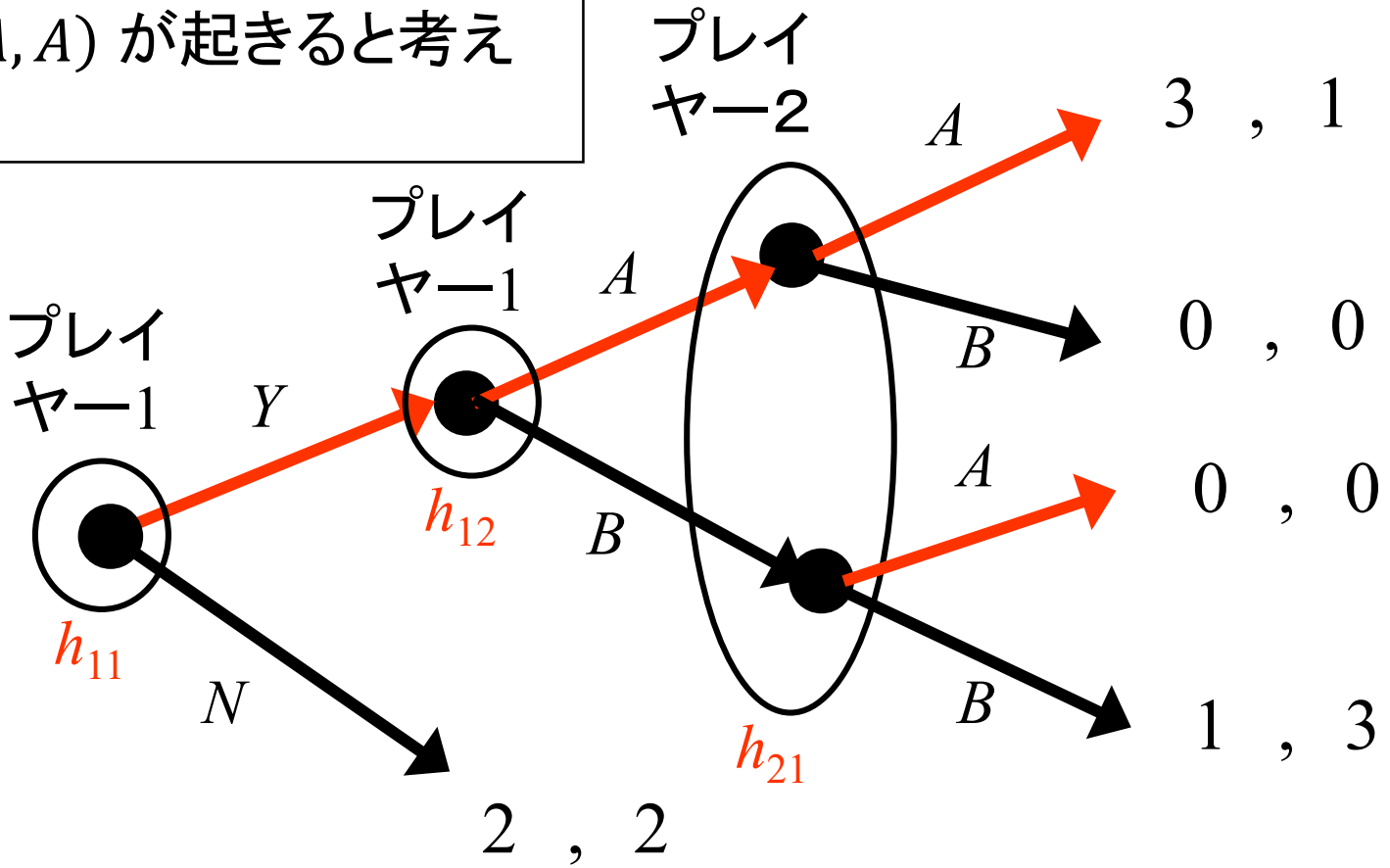
1 \ 2	A	B
A	(3 , 1)	(0 , 0)
B	(0 , 0)	(1 , 3)

部分ゲームのナッシュ均衡として，

(A, A) が起きると考えると？

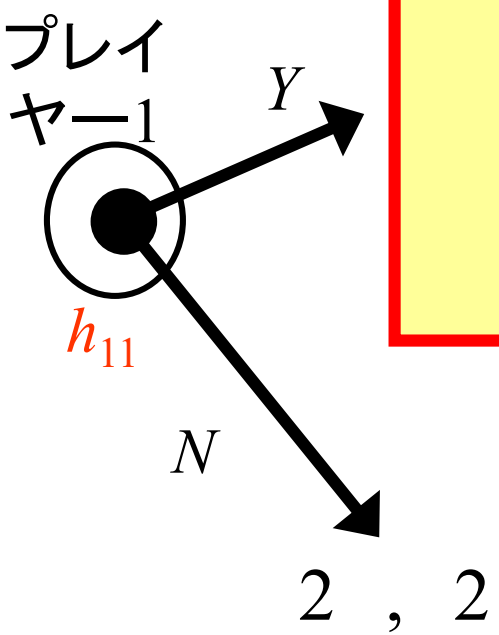
複数の部分ゲーム完全均衡

部分ゲームのナッシュ均衡として，(A, A) が起きると考えると？



部分ゲーム完全均衡は$((Y, A), A)$

例：複数の部分ゲーム完全均衡



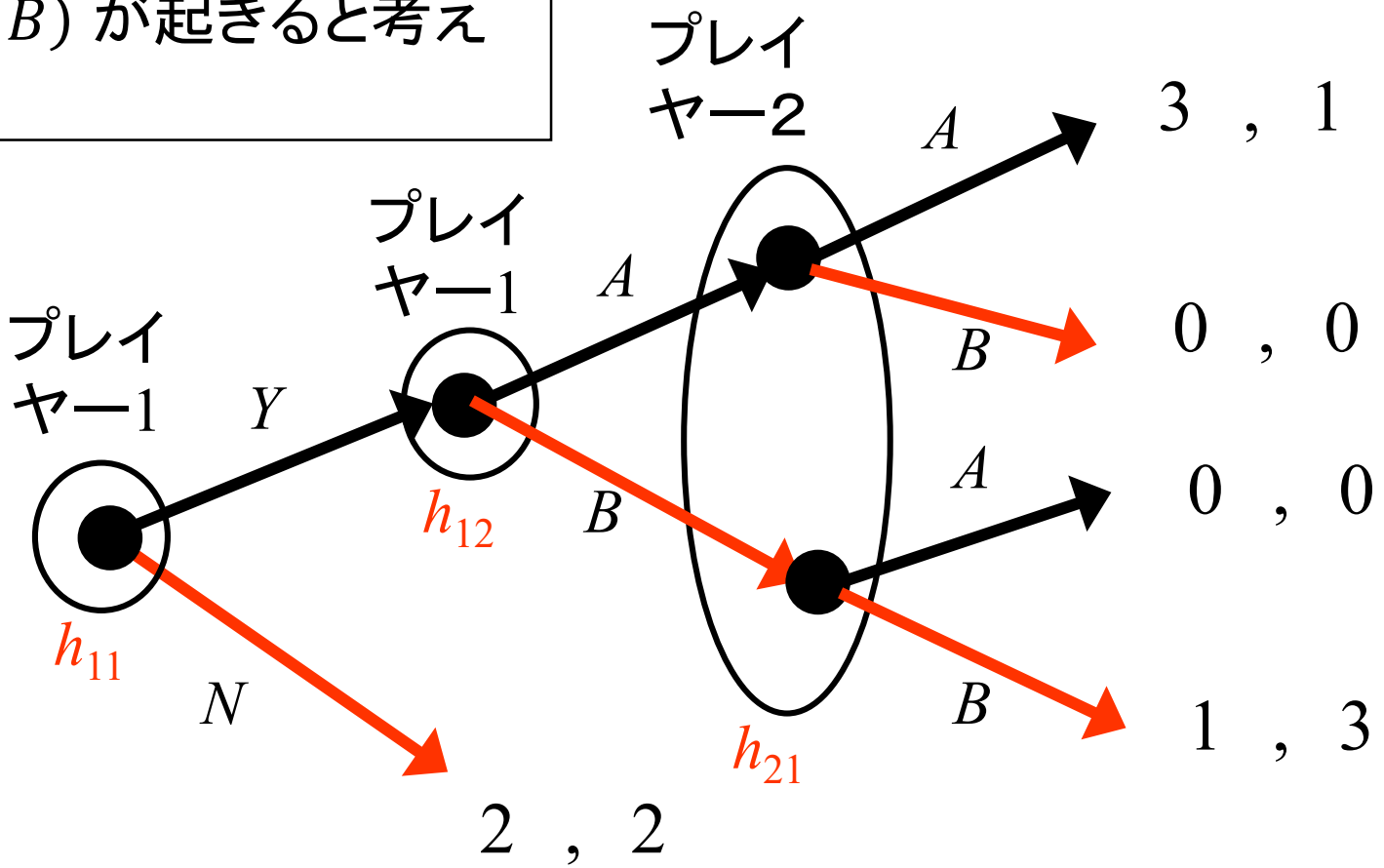
1 \ 2	A	B
A	(3 , 1)	(0 , 0)
B	(0 , 0)	(1 , 3)

部分ゲームのナッシュ均衡として，

(B, B) が起きると考えると？

複数の部分ゲーム完全均衡

部分ゲームのナッシュ均衡として，(B, B) が起きると考えると？

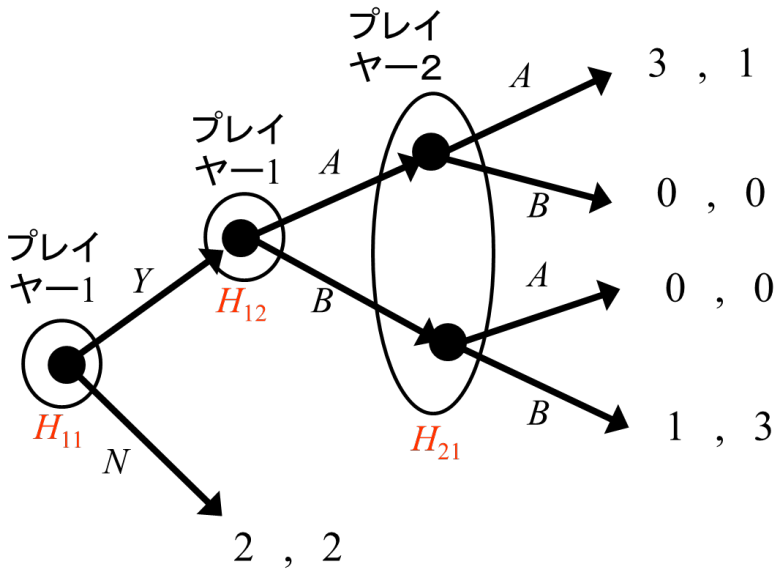


部分ゲーム完全均衡は
$((N, B), B)$

部分ゲーム完全均衡は2つある
※混合戦略も含めれば3つ

複数の部分ゲーム完全均衡：未解決問題

- 部分ゲーム完全均衡は（混合戦略を考えないと）2つ.
- $((N,B),B)$： プレイヤー1がNを選んで，ゲームは終わり.（両プレイヤーは第2段階で(B,B)を予想している）.
- $((Y,A),A)$： プレイヤー1がYを選び，第2段階で(A,A)となる.



- 上記2つの部分ゲーム完全均衡のどちらも解とするのが一般的
- しかし，それならばプレイヤー1がYを選ぶと，は第2段階で両プレイヤーが(A,A)を選ぶはず？
- そうならば，プレイヤー1は必ず最初にYを選ぶのでは？だから（$((Y,A),A)$ だけが解，という考えもある. ⇒フォワードインダクションと呼ばれる考え方

演習　複数の部分ゲーム完全均衡

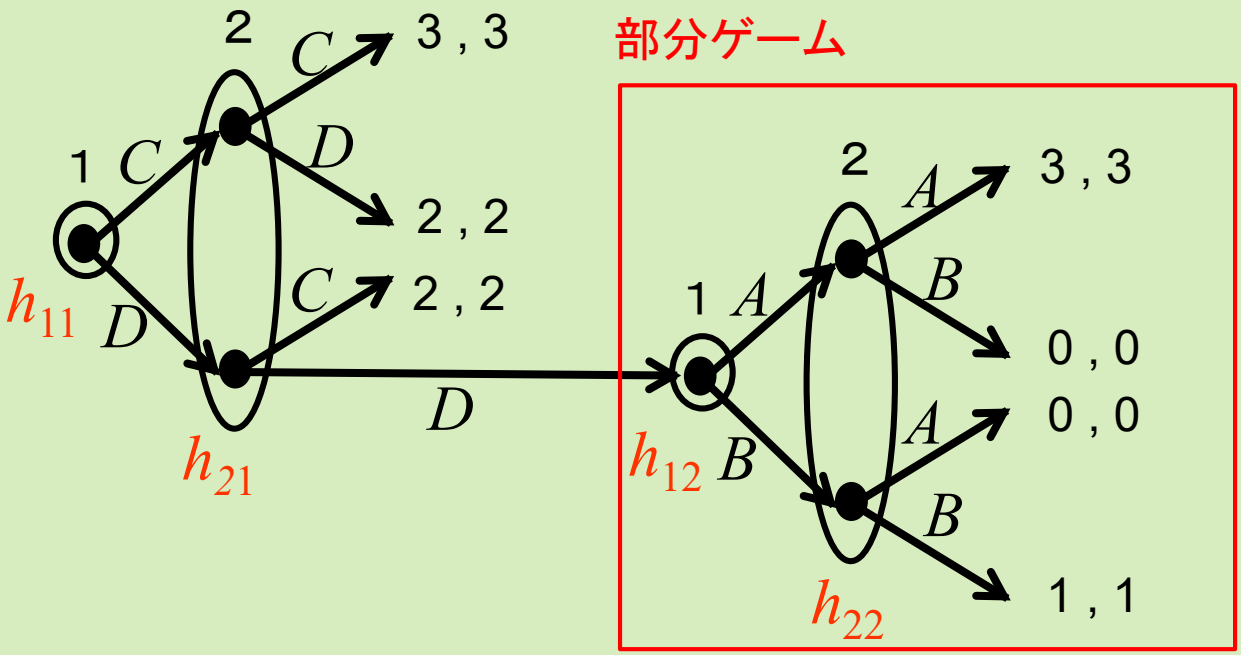
問1．以下の2人ゲームの部分ゲーム完全均衡を求めよ

混合戦略は考えない．ナッシュ均衡は求める必要はない．

- 第1段階：プレイヤー1と2は同時にCかDを選ぶ
  - 両プレイヤーがCを選ぶと2人の利得は 3
  - 一方がC，もう一方がDを選ぶと2人の利得は 2
  - 両プレイヤーがDを選ぶと第2段階のゲームに入る
- 第2段階：プレイヤー1とプレイヤー2が，同時にAかBを選ぶ．
  - 両プレイヤーがAを選ぶと2人の利得は 3
  - 一方がA，もう一方がBを選ぶと2人の利得は 0
  - 両プレイヤーがBを選ぶと2人の利得は 1

問2．部分ゲーム完全均衡は何個あるか？その中で第1段階でゲームが終わる部分ゲーム完全均衡は何個あるか？

解答　複数の部分ゲーム完全均衡



部分ゲーム完全均衡を求めるには，第2段階のゲームのナッシュ均衡を求める

第2段階の純粋戦略のナッシュ均衡は2つ

このゲームのイメージ

1 \ 2	C	D
C	(3 , 3)	(2 , 2)
D	(2 , 2)	

1 \ 2	A	B
A	(3 , 3)	(0 , 0)
B	(0 , 0)	(1 , 1)

解答　複数の部分ゲーム完全均衡

1＼2	C	D
C	(3, 3)	(2, 2)
D	(2, 2)	

1＼2	A	B
A	(3, 3)	(0, 0)
B	(0, 0)	(1, 1)

1＼2	C	D
C	(3, 3)	(2, 2)
D	(2, 2)	(3, 3)

第2段階の部分ゲームでナッシュ均衡(A,A)が起きると考えると？
第1段階では(C,C)，(D,D)の2つのナッシュ均衡

1＼2	C	D
C	(3, 3)	(2, 2)
D	(2, 2)	(1, 1)

第2段階の部分ゲームでナッシュ均衡(B,B)が起きると考えると？
第1段階では(C,C) のみがナッシュ均衡
※Cは支配戦略

各プレイヤーが第1段階と第2段階で選んだ戦略をカッコで書き，それをカッコで並べると
※例えば((C,A),(D,B))はプレイヤー1が第1段階でC，第2段階でA，プレイヤー2は第1段階でD，第2段階でBを選んだことを表す

部分ゲーム完全均衡は　$((C,A),(C,A))$，$((D,A),(D,A))$，$((C,B),(C,B))$　3個
最初にCが選ばれると，第1段階でゲームが終わるので，2個．

6.5.2 部分ゲームに混合戦略の均衡

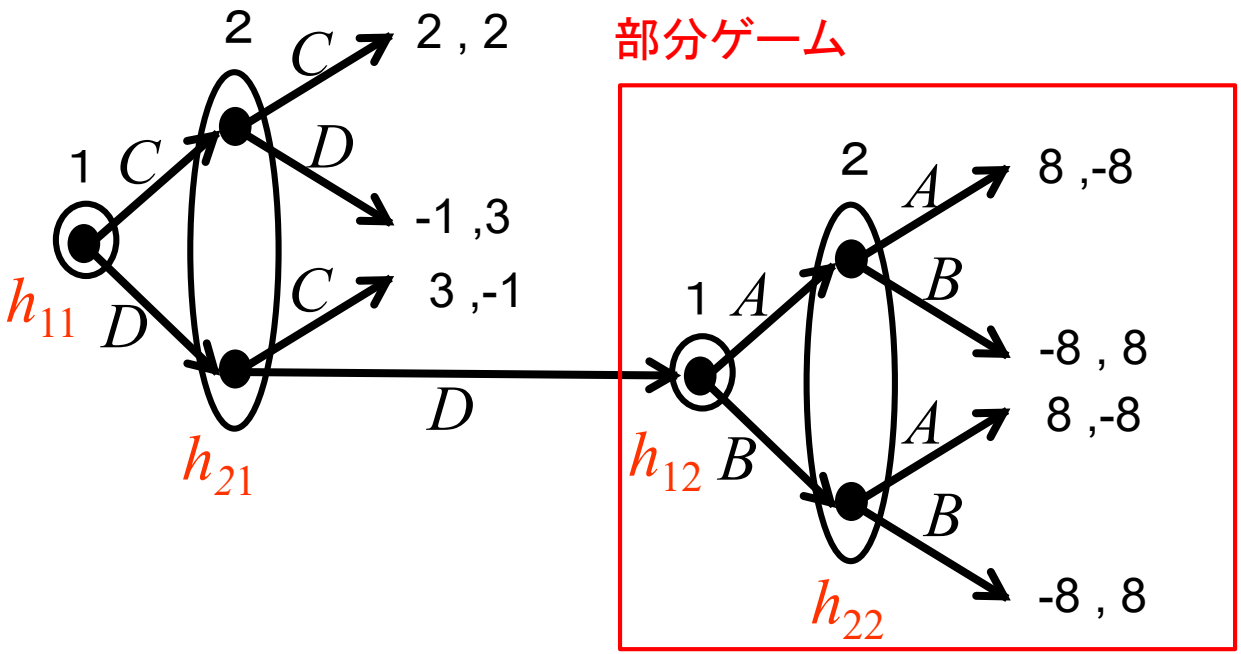
２段階のゲーム

以下の２人ゲームを考える.

- 第1段階：プレイヤー1と2は同時にC（協力）かD（非協力）を選ぶ
  - 共にCを選ぶと2人とも利得は2
  - 一方がC，もう一方がDを選ぶと，Cを選んだ方の利得は－1，Dを選んだ方の利得は3
  - 両方がDを選ぶと第２段階のゲームに入る
- 第２段階：プレイヤー1とプレイヤー2が，同時にAかBを選ぶ.
  - 両方が同じものを選べば，プレイヤー1の利得+8，プレイヤー2の利得-8
  - 両方が異なるものを選べば，プレイヤー1の利得-8，プレイヤー2の利得+8

部分ゲーム完全均衡を求めよ.

ゲームのイメージ



部分ゲーム完全均衡を求めるには，第2段階のゲームのナッシュ均衡を求める

しかし，第2段階には，純粋戦略のナッシュ均衡はない！

1 \ 2	C	D
C	(2 , 2)	(-1, 3)
D	(3 , -1)	

1 \ 2	A	B
A	(8 , -8)	(-8, 8)
B	(-8 , 8)	(8, -8)

部分ゲームにおけるナッシュ均衡と期待利得

1 \ 2	q → A	$1-q$ → B
p → A	(8 , -8)	(-8, 8)
$1-p$ → B	(-8 , 8)	(8, -8)

第2段階の部分ゲームにおける混合戦略のナッシュ均衡と期待利得を求める

プレイヤー1 : Aを確率p， Bを確率$1-p$
プレイヤー2 : Aを確率q， Bを確率$1-q$
で選ぶとする.

本当はこのように計算するのだが

プレイヤー1の期待利得

★ Aを選んだ時： $8q+(-8)\times(1-q)=16q-8$

★ Bを選んだ時： $-8q+8\times(1-q)=-16q+8$

プレイヤー1の最適反応がA $(p=1)$ である範囲

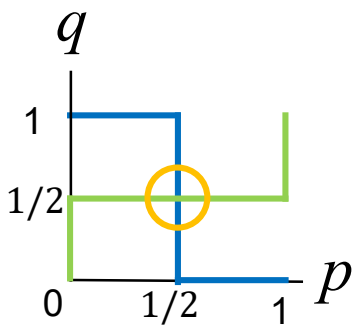
$16q-8\geq -16q+8 \Rightarrow q\geq 1/2$

プレイヤー1の最適反応戦略

$q>1/2$ のとき $p=1$
$q<1/2$ のとき $p=0$
$q=1/2$ のとき $0\leq p\leq 1$

プレイヤー2の最適反応戦略

$p>1/2$ のとき $q=0$
$p<1/2$ のとき $q=1$
$p=1/2$ のとき $0\leq q\leq 1$



ナッシュ均衡

$p=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}$

混合戦略のナッシュ均衡：簡便に求める

1 \ 2	q → A	$1-q$ → B
p → A	(8 , -8)	(-8, 8)
$1-p$ → B	(-8 , 8)	(8, -8)

第2段階の部分ゲームにおける混合戦略のナッシュ均衡と期待利得を求める

プレイヤー1：Aを確率p， Bを確率$1-p$
プレイヤー2：Aを確率q， Bを確率$1-q$
で選ぶとする.

プレイヤー1の期待利得

★ Aを選んだ時： $8q+(-8)\times(1-q)=16q-8$

★ Bを選んだ時： $-8q+8\times(1-q)=-16q+8$

もしどちらかが大きいと，混合戦略がナッシュ均衡にならない.（最適反応戦略が$p=0$か$p=1$となるが，純粋戦略のナッシュ均衡がないことに矛盾）

したがって，AとBの期待利得は等しくなければならない

$$16q-8=-16q+8 \Rightarrow \quad q=1/2$$

プレイヤー1の期待利得を計算することで，プレイヤー2のナッシュ均衡戦略が決まることに注意する

プレイヤー2についても同様

プレイヤー2の期待利得

★ A： $-8p+8\times(1-p)=-16p+8$

★ B： $8p+8\times(1-p)=16p-8$

$$-16p+8=16p-8$$
$$\Rightarrow \quad p=1/2$$

$$\boxed{p=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}}$$

プレイヤー1：
AとBを1/2ずつ選ぶ
プレイヤー2：
AとBを1/2ずつ選ぶ

部分ゲームの期待利得

1 \ 2	C	D
C	(2 , 2)	(-1, 3)
D	(3 , -1)	

1 \ 2	A	B
A	(8 , -8)	(-8, 8)
B	(-8 , 8)	(8, -8)

ナッシュ均衡：
プレイヤー1：AとBを1/2ずつ選ぶ
プレイヤー2：AとBを1/2ずつ選ぶ

1 \ 2	C	D
C	(2 , 2)	(-1, 3)
D	(3 , -1)	(0 , 0)

ナッシュ均衡における期待利得

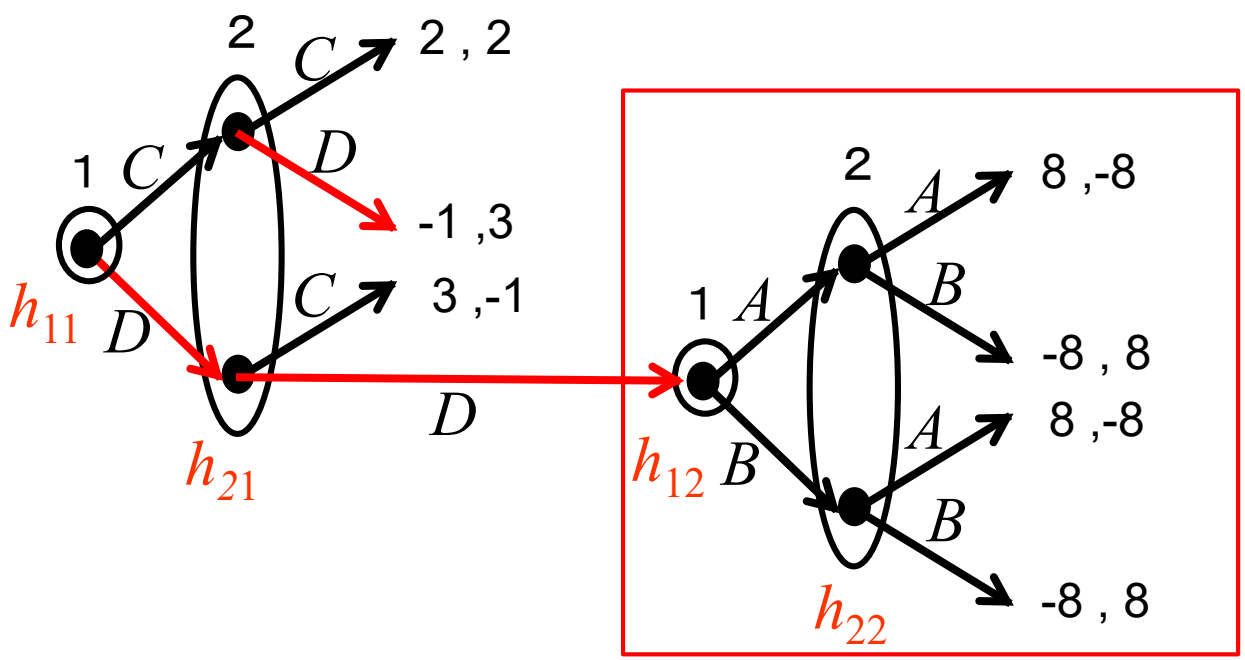
プレイヤー1：

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 8+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(-8)$$
$$+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times(-8)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 8=0$$

プレイヤー2　も
0

ゲームのイメージ

ナッシュ均衡：
プレイヤー1：AとBを1/2ずつ選ぶ
プレイヤー2：AとBを1/2ずつ選ぶ

1 \ 2	C	D
C	(2 , 2)	(-1, 3)
D	(3 , -1)	(0 , 0)

1 \ 2	A	B
A	(8 , -8)	(-8, 8)
B	(-8 , 8)	(8, -8)