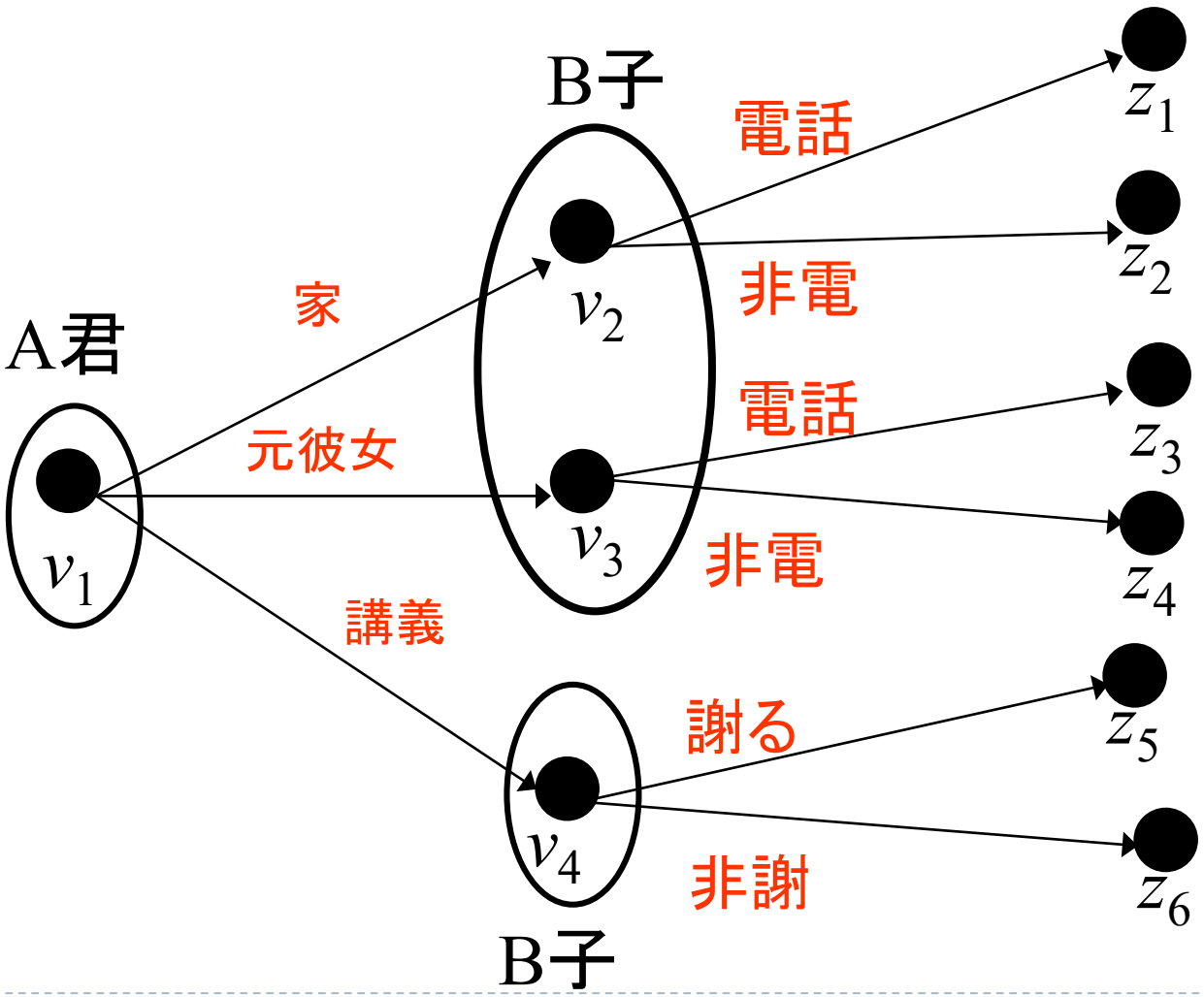
7. 不確実性のある展開形ゲーム

復習：展開形ゲームを戦略形ゲームに変換する

- STEP.1
  各プレイヤーに対し，すべての情報集合において，どの行動を選ぶかを列挙したものを戦略と考える.
- STEP.2
  すべてのプレイヤーの戦略を1つ決めると，実現する終点が1つ決まる．その終点に対応する利得が，その戦略の組に対応する利得となる.
- STEP.3
  それをすべての戦略の組に対して考える.

復習:戦略形ゲームに変換せよ

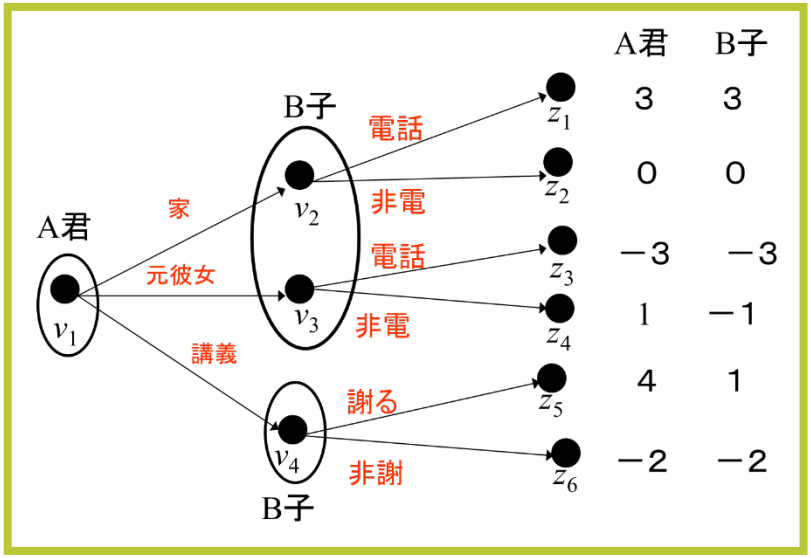


	A君	B子
z_1	3	3
z_2	0	0
z_3	−3	−3
z_4	1	−1
z_5	4	1
z_6	−2	−2

STEP.1

- 「すべての情報集合で，どの行動を選ぶかを列挙したもの」を戦略と考える．

⇒ この考え方に従い，利得行列の「枠」を作る

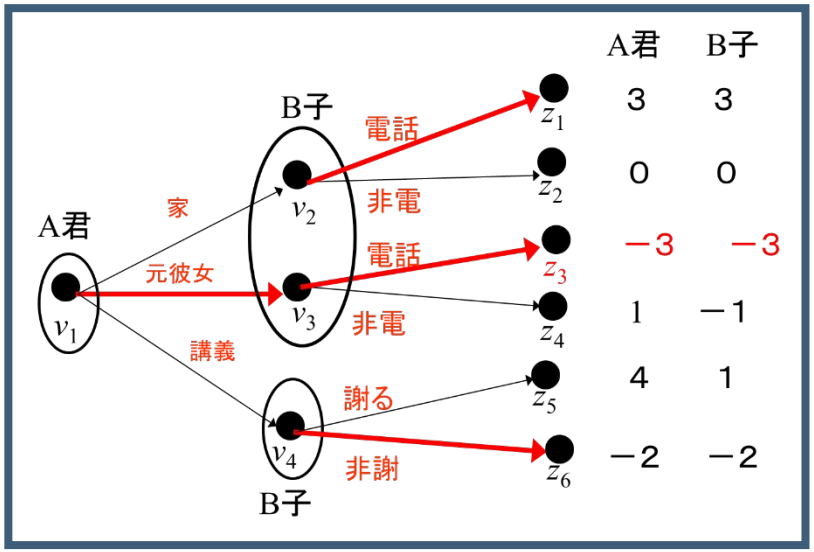


B子 / A君	(電話,謝る)	(電話,非謝)	(非電,謝る)	(非電,非謝)
家				
元カノ				
講義				

STEP.2

- すべてのプレイヤーの戦略を1つ決めると，実現する終点が1つ決まる．その終点に対応する利得が，その戦略の組に対応する利得となる．

（例）
A君：元カノ
B子：（電話，非謝）
を選んだ場合

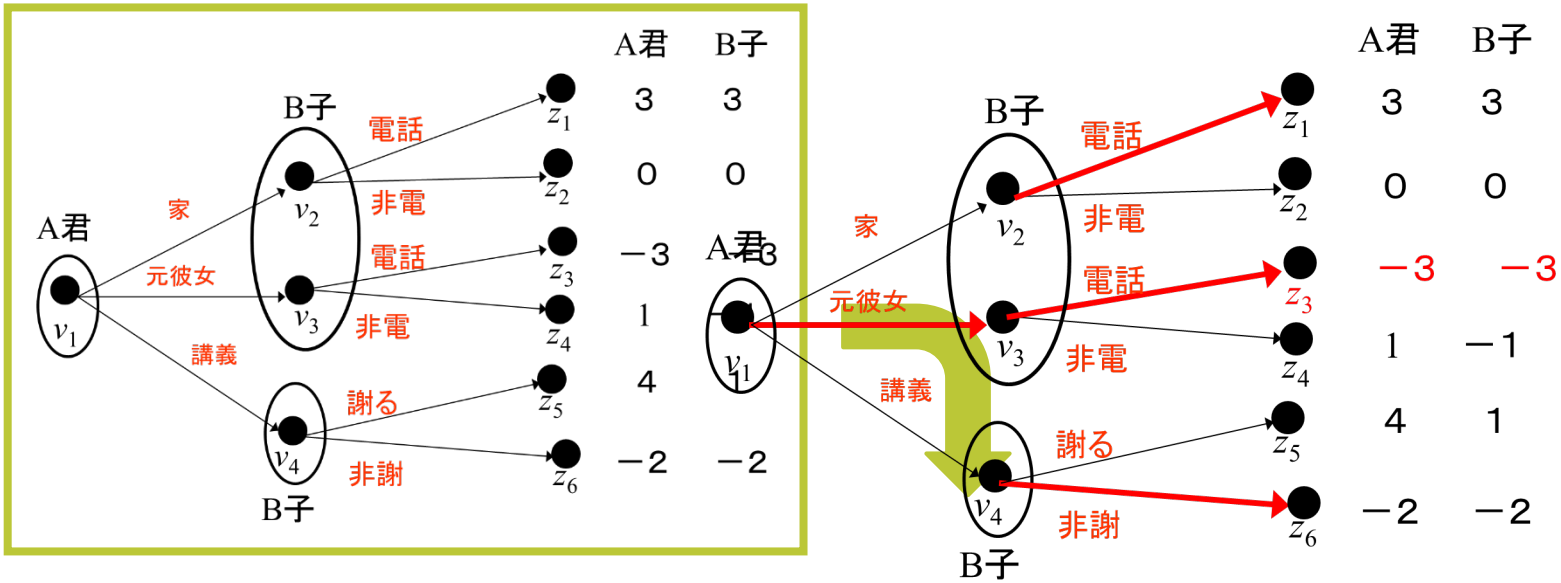


B子 / A君	（電話,謝る）	（電話,非謝）	（非電,謝る）	（非電,非謝）
家				
元カノ		（−3，−3）		
講義				

z_3 の利得が対応する

STEP.2

- すべてのプレイヤーの戦略を1つ決めると，実現する終点が1つ決まる．その終点に対応する利得が，その戦略の組に対応する利得となる．



B子 / A君	(電話,謝る)	(電話,非謝)	(非電,謝る)	(非電,非謝)
家				
元カノ				
講義				

STEP.3

- これを繰り返すと，利得行列が完成する

B子 / A君	(電話,謝る)	(電話,非謝)	(非電,謝る)	(非電,非謝)
家	(3 , 3)	(3 , 3)	(0 , 0)	(0 , 0)
元カノ	(-3, -3)	(-3, -3)	(1 , -1)	(1 , -1)
講義	(4 , 1)	(-2, -2)	(4 , 1)	(-2, -2)

7.1 「自然」というプレイヤー

不確実性があるゲーム：自然というプレイヤー

- ゲームに不確実性が存在する場合は自然という仮想的なプレイヤーを導入する.
- 不確実な状況をプレイヤーに考えることで，これまでと同じように（整合的に）問題を解くことができる.
- 利得を考えるときに事前（不確実な事象が実現する前）と事後（実現した後）の2つに分けて考える必要がある
- 複数のプレイヤーの「ゲーム」について考える前に，プレイヤーが1人のとき（個人）の意思決定を考える

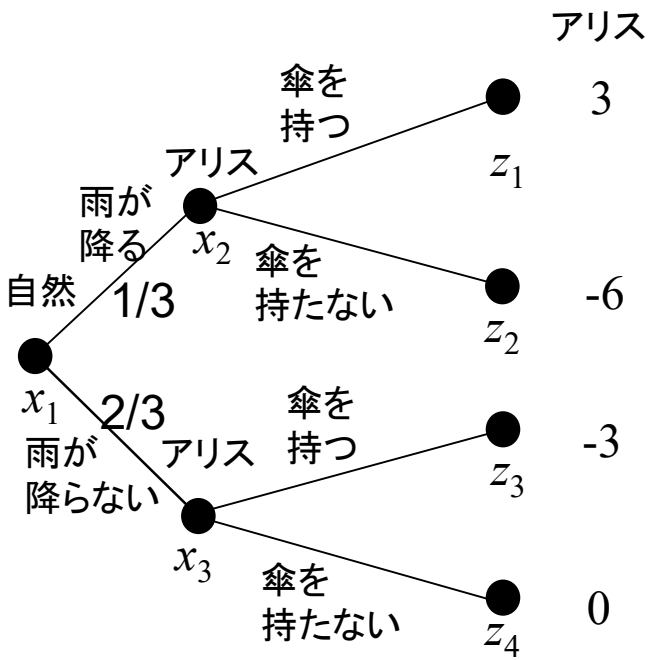
（例）：傘を持つかどうかの意思決定

- アリスは，傘を持って行くかどうかを悩んでいる.
- 雨が降る確率　1/3　（雨が降らない確率は2/3）
- ケース１：雨が降るかどうかが分かった後に，傘を持つかどうかの行動を決定する場合
- ケース２：行動した後に，雨が降るかどうかが決まる場合

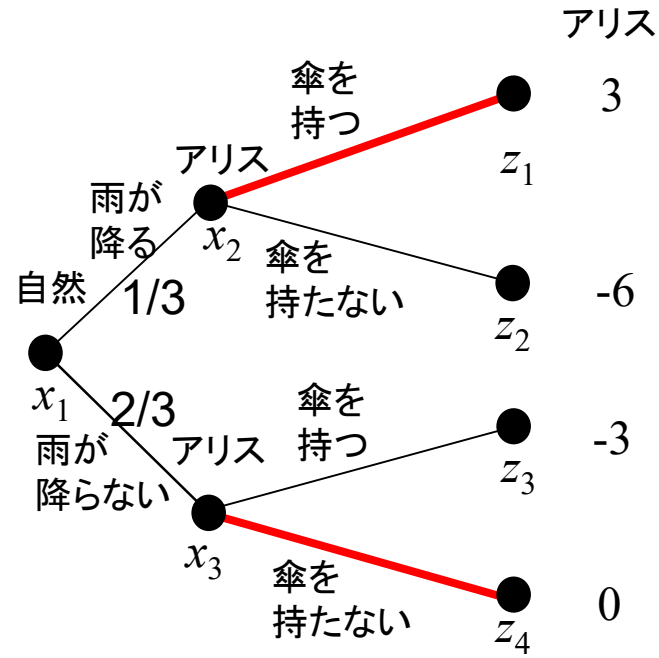
- アリスの利得
  - 雨が降ったとき：傘を持っていれば3，傘を持ってなければ-6
  - 雨が降らないとき：傘を持っていれば-3，傘を持ってなければ0
- ２つのケースを分けて考えることが重要

ケース1

ケース1：雨が降るかどうかが分かった後に，傘を持つかどうかの行動を決定する場合



バックワードインダクションで解くことができる



- 自然というプレイヤーで不確実性を表現
- 「自然」は確率でその行動を選択する「利得が存在しないプレイヤー」と考えることができる.

最適な行動の

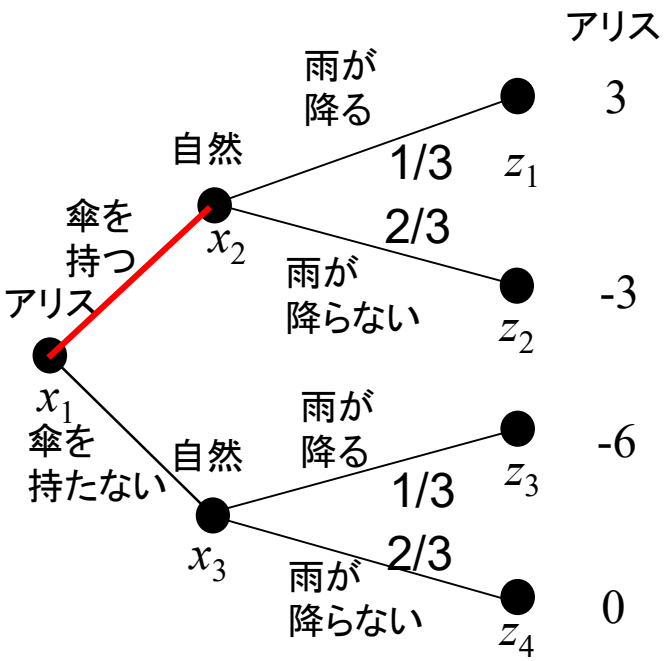
- 事前の期待利得

$$\frac{1}{3}\times 3+\frac{2}{3}\times 0=1$$

- 事後の期待利得
  - 雨が降ったとき：3
  - 雨が降らないとき：0

ケース2

ケース2：傘を持つかどうかの行動を決定した後に，雨が降るかどうかが分かる場合



傘を持つときの期待利得

$$\frac{1}{3}\times 3+\frac{2}{3}\times(-3)=-1$$

傘を持たないときの期待利得

$$\frac{1}{3}\times(-6)+\frac{2}{3}\times 0=-2$$

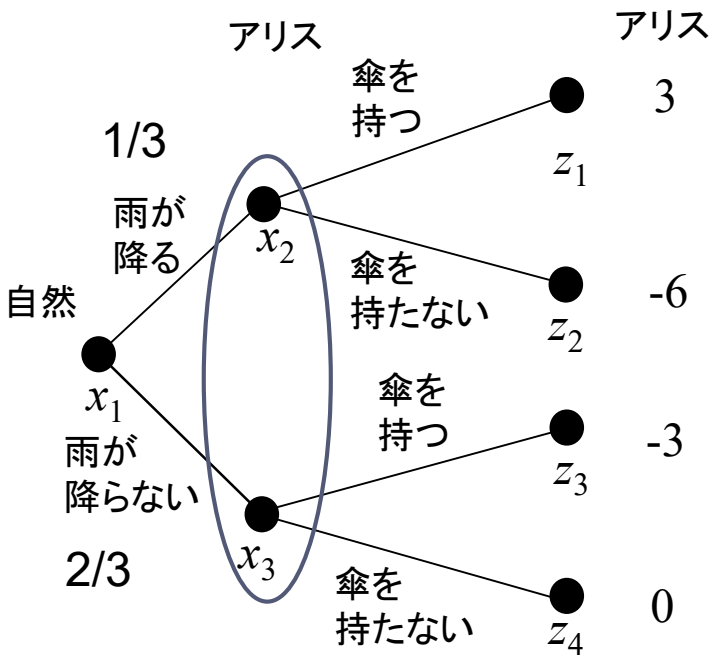
最適な行動は「傘を持つ」

- 自然とプレイヤーのどちらが先かが逆になっている.
- 先手・後手で不確実性のタイミングが表現できる.

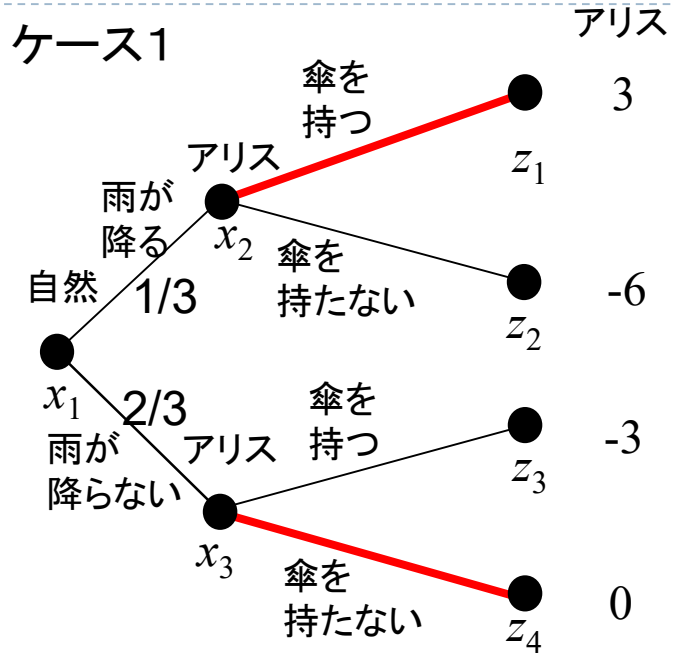
最適な行動の
- 事前の期待利得
  $$\frac{1}{3}\times 3+\frac{2}{3}\times(-3)=-1$$
- 事後の期待利得
  - 雨が降ったとき：3
  - 雨が降らないとき：-3

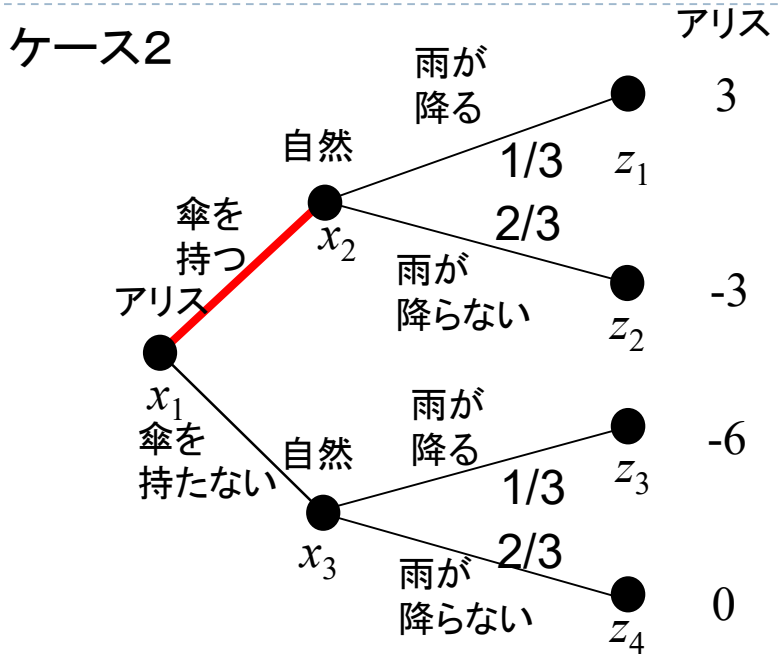
ケース2は情報集合で表現することもできる！

ケース2：傘を持つかどうかの行動を決定した後に，雨が降るかどうかが分かる場合



ケース1とケース2





- 事前の期待利得

$$\frac{1}{3}\times 3+\frac{2}{3}\times 0=1$$

- 事後の期待利得
  - 雨が降ったとき：3
  - 雨が降らないとき：0

- 事前の期待利得

$$\frac{1}{3}\times 3+\frac{2}{3}\times(-3)=-1$$

- 事後の期待利得
  - 雨が降ったとき：3
  - 雨が降らないとき：-3

「どのタイミングで行動するか」「事前と事後のどちらの期待利得か」で答が違うことに注意せよ！

7.2 不確実性がある展開形ゲームの戦略形ゲームへの変換

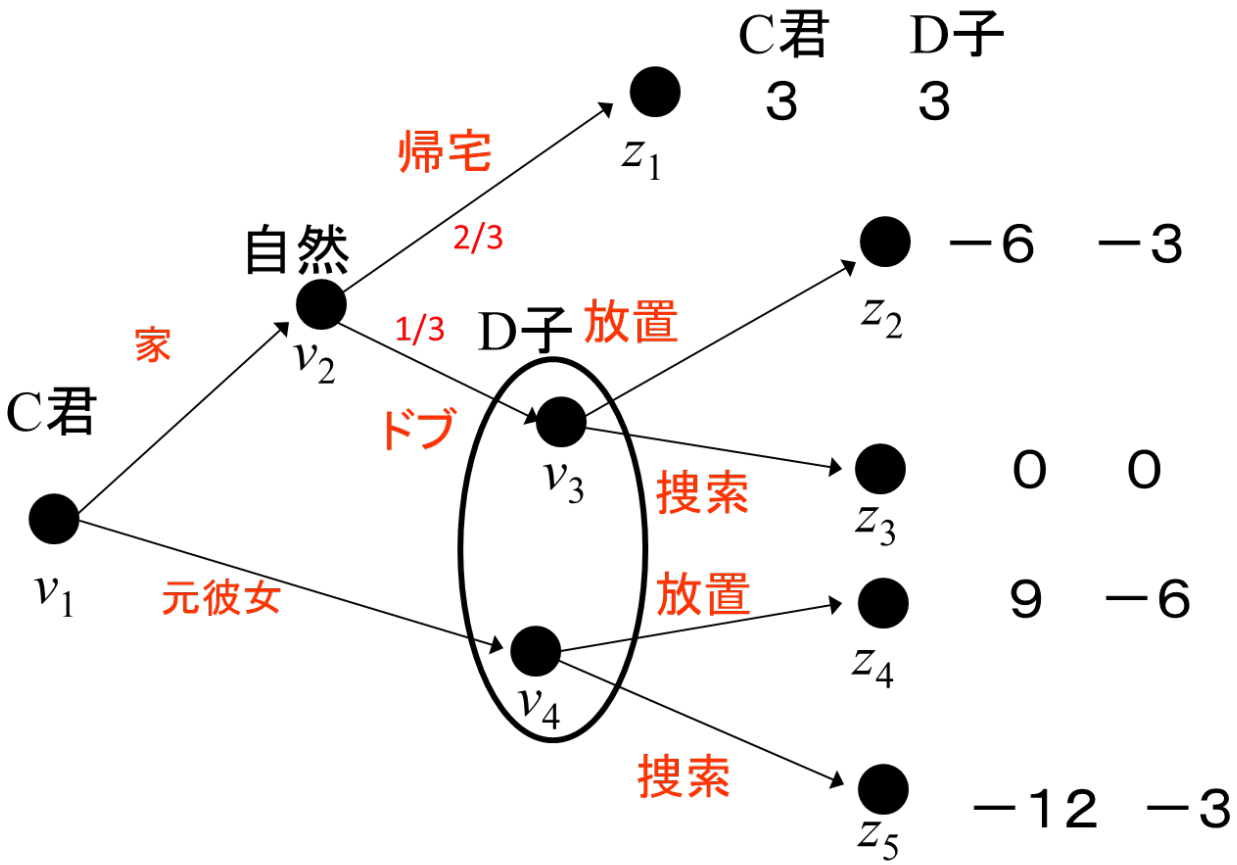
不確実性がある展開形ゲーム

- 戦略形ゲームへの変換
- STEP.1
  各プレイヤーに対し，すべての情報集合において，どの行動を選ぶかを列挙したものを戦略と考える.
- STEP.2*
  すべてのプレイヤーの戦略を1つ決めると，（自然が確率的に選んだ経路を通る）終点が複数決まる．その終点の確率と利得によって，戦略の組に対応する期待利得が計算できる.
- STEP.3
  それをすべての戦略の組に対して考える.

例：C君は元カノの家か？ドブにハマっているか？

- C君は仕事が終わって，家に帰るか，元カノの家に行くかを選ぶ
- C君がまっすぐ家に帰ると，2/3の確率で家にたどり着くが，1/3の確率でドブにはまって帰れません．
- D子は，家にC君が帰ると分かるが，家に帰ってこないときはドブにはまったのか，元カノの家にいるのか分からない．
- 家に帰ってこないとき，警察に捜索願を出すか，放置するかを決める．

例：C君は元カノの家か？ドブにハマっているか？

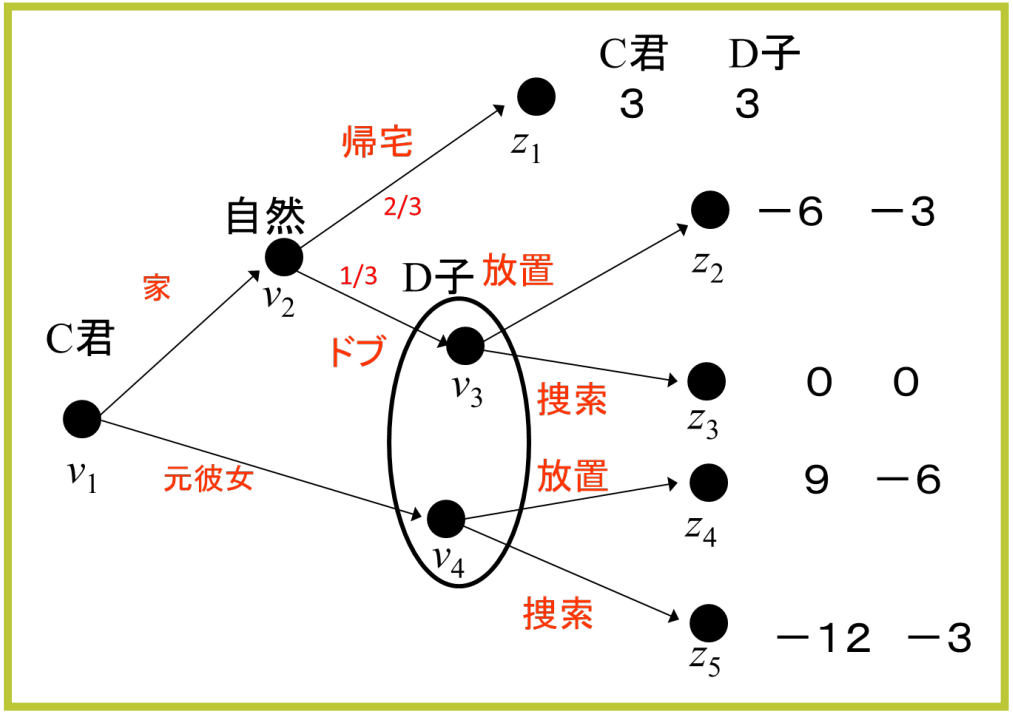


戦略形ゲームに変換し，ナッシュ均衡を求めよ

STEP.1

- 「すべての情報集合で，どの行動を選ぶかを列挙したもの」を戦略と考える．

⇒ この考え方に従い，利得行列の「枠」を作る

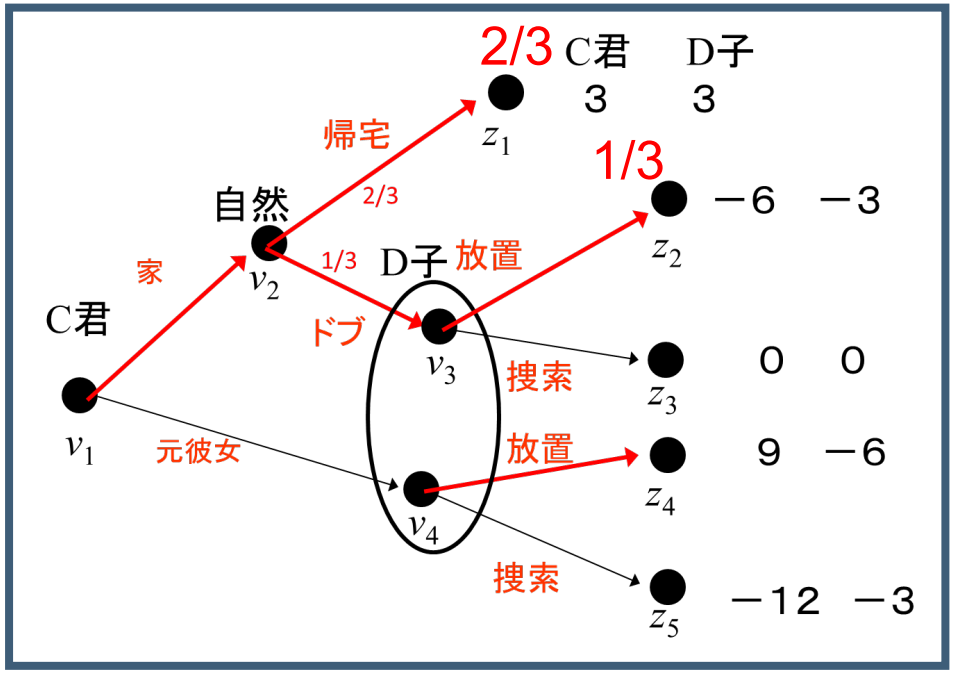


C君＼D子	放置	搜索
家		
元カノ		

STEP.2

- すべてのプレイヤーの戦略を1つ決めると，（自然が確率的に選んだ経路を通る）終点が複数決まる．自然が選んだ確率とその終点に対応する利得によって，その戦略の組に対応する期待利得が計算する．

（例）
C君：家
D子：放置
を選んだ場合



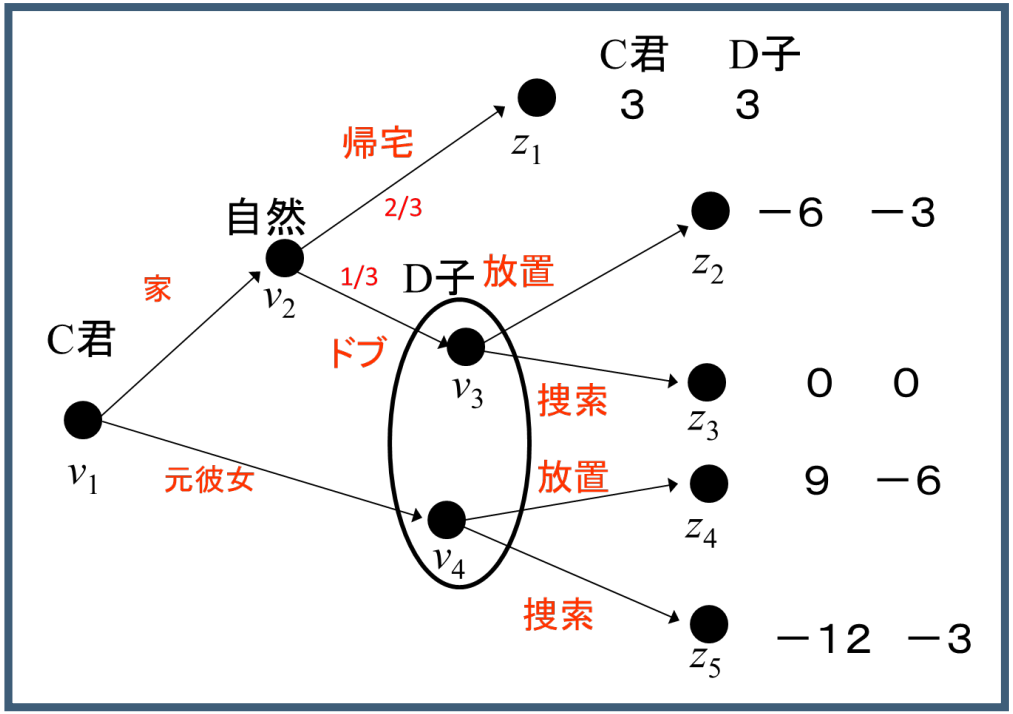
C君＼D子	放置	捜索
家	(0 , 1)	
元カノ		

C君の期待利得：$\frac{2}{3}\times 3+\frac{1}{3}\times(-6)=0$

D子の期待利得：$\frac{2}{3}\times 3+\frac{1}{3}\times(-3)=1$

STEP.3

- これを繰り返すと，利得行列が完成する



C君＼D子	放置	搜索
家	(0 , 1)	(2 , 2)
元カノ	(9 , -6)	(-12 ,-3)

まとめ　不確実性のある展開形ゲーム

- 不確実性のあるゲーム・意思決定は自然という仮想的なプレイヤーを導入する
- 不確実性が起きる前の事前利得と，起きた後の事後利得を区別する.
- 不確実性のあるゲーム：プレイヤーが戦略の組を選ぶと終点の確率分布が決まるので，その期待値を利得と考えて戦略形ゲームに変換する

演習　ハイ　アンド　ロー　ゲーム

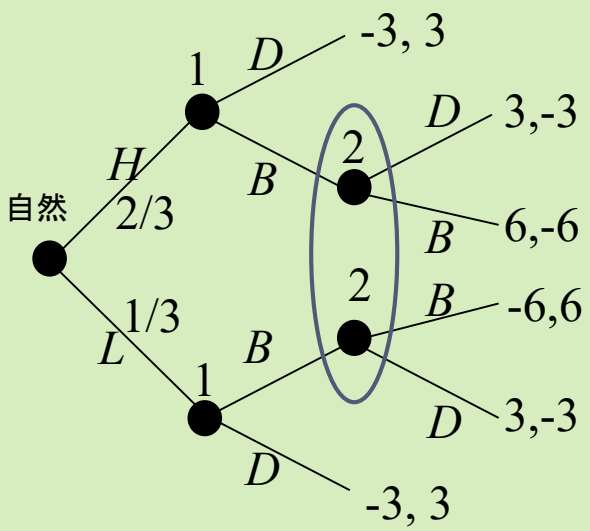
以下の2人ゲームを考える.

- 2枚はH(High)で，1枚はL(Law)と書かれている3枚のカードから，プレイヤー1が1枚をランダムに引き，そのカードを見る．プレイヤー2はプレイヤー1の引いたカードは分からない.
- 1はB(Bid)かD(Drop)を選ぶ．1がDを選べばゲームは終わり，1は2に3万円を支払う(1の利得-3，2の利得3).
- 1がBを選ぶと，次に2がBかDを選ぶ．2がDを選べばゲームは終わり，2は1に3万円を支払う．(1の利得3，2の利得-3).
- 両者が共にBを選ぶと勝負となる．1の引いたカードがHならば，1の勝利，Lならばプレイヤー2の勝利である．この場合は，勝った方が負けた方に6万円支払う．(勝者の利得+6，敗者の利得-6)

問1 ゲームをゲームの木で表現せよ．このとき，最初に自然が2/3で1にHのカードを与え，1/3でLのカードを与えるとしてゲームを表現せよ.
問2 戦略形ゲームに変換せよ.

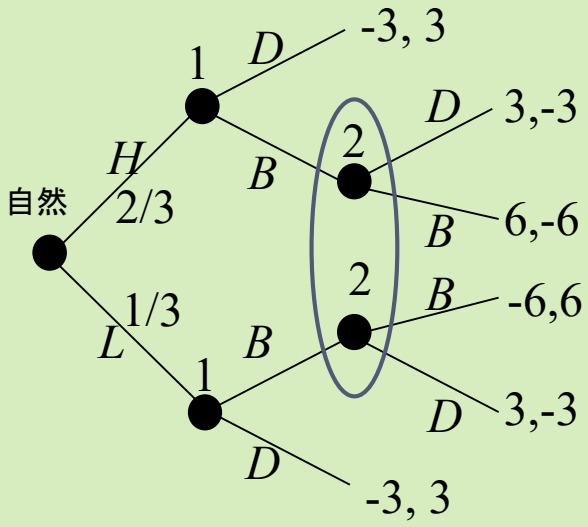
(講義での演習は問2まで．)

解答　ハイ　アンド　ロー　ゲーム



1＼2	B	D
BB		
BD		
DB		
DD		

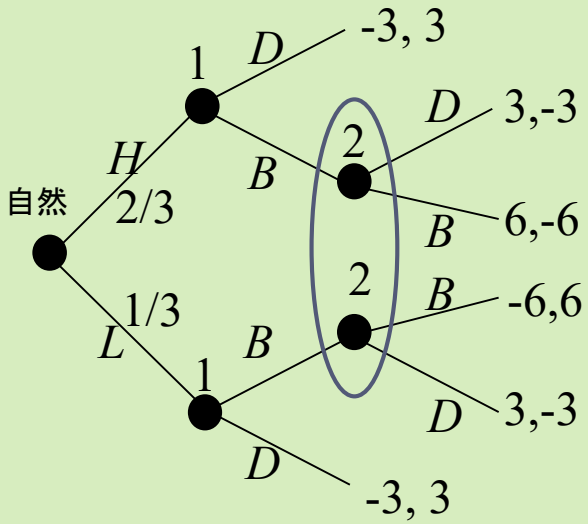
解答　ハイ　アンド　ロー　ゲーム



1＼2	*B*	*D*
BB	(2,-2)	(3,-3)
BD	(3,-3)	(1,-1)
DB	(-4, 4)	(-1, 1)
DD	(-3, 3)	(-3, 3)

- ナッシュ均衡は純粋戦略では存在しない.
- 部分ゲームはないので，部分ゲーム完全均衡も同じになる

解答　ハイ　アンド　ロー　ゲーム



1＼2	B	D
BB	(2,-2)	(3,-3)
BD	(3,-3)	(1,-1)
DB	(-4, 4)	(-1, 1)
DD	(-3, 3)	(-3, 3)

- ナッシュ均衡は純粋戦略では存在しない.
- 部分ゲームはないので，部分ゲーム完全均衡も同じになる

DB，DDは（強）支配された戦略なので削除して考えて良い

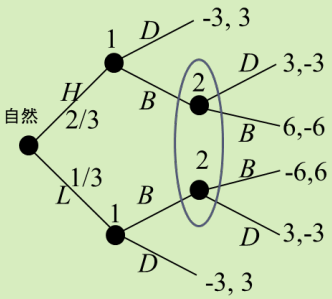
1＼2	B	D
BB	(2,-2)	(3,-3)
BD	(3,-3)	(1,-1)

純粋戦略はないので，
混合戦略のナッシュ均衡を求める

ナッシュ均衡は
1：BBを2/3，BDを1/3で選ぶ
2：Bを2/3，Dを1/3で選ぶ

次ページに詳しく

解答　ハイ　アンド　ロー　ゲーム



戦略形へ

1＼2	B	D
BB	(2,-2)	(3,-3)
BD	(3,-3)	(1,-1)
DB	(-4, 4)	(-1, 1)
DD	(-3, 3)	(-3, 3)

DB，DDは支配された戦略なので削除

1＼2	B	D
BB	(2,-2)	(3,-3)
BD	(3,-3)	(1,-1)

純粋戦略はないので，混合戦略のナッシュ均衡を求める

プレイヤー1：BBを確率p，BDを確率$1-p$
プレイヤー2：Bを確率q，Dを確率$1-q$ で選ぶとする.

プレイヤー1の期待利得

★ BBを選んだ時：　$2q+3(1-q)=-q+3$

★ BDを選んだ時：　$3q+(1-q)=2q+1$

どちらかが大きいと，混合戦略がナッシュ均衡にならないため，期待利得は等しくなければならない.

$$-q+3=2q+1 \Rightarrow \quad q=2/3$$

同様にプレイヤー2の期待利得を考える

★ Bを選んだ時：　$-2p-3(1-p)=p-3$

★ Dを選んだ時：　$-3p-(1-p)=-2p-1$

$$p-3=-2p-1 \Rightarrow \quad p=2/3$$

ナッシュ均衡は
1：BBを2/3，BDを1/3
(DBとDDを確率0)で選ぶ.
2：Bを2/3，Dを1/3で選ぶ

8. ベイズの定理、不完備情報ゲーム

8.1 条件付き確率とベイズの定理

確率・情報・不確実性

皆さんは，確率や不確実性とは，一般的にはこれから起きる未来の事（誰も知らない事）についての確からしさを表すものと解釈されているかもしれない

しかし実際には既に定まっている事実も，自分がその結果について全く分かっていなければ，未来に起きることと同じだ

事象A：このラーメン屋はうまい
事象$\bar{A}$：このラーメン屋はうまくない

世の中の状態（the state of the world)は1つだけ．実際は未来でも現在でも状態は決まっているが，それを知らないだけ，という考え方もできる

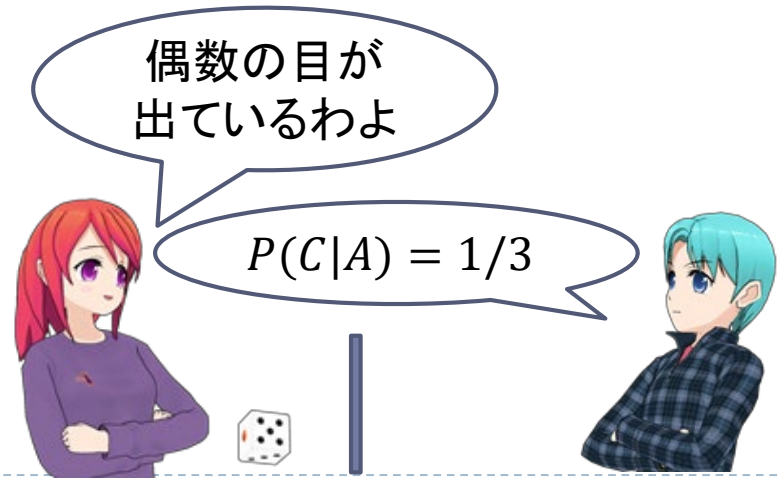
既に定まっている事実について，相手と自分で知っていることが異なる可能性もある

条件付き確率

- サイコロを1個振り，「2の目が出る」という事象Cを考える．
- 事象C :「2の目が出る」　　$P(C)=1/6$

- もう既にサイコロは振られていて，相手はその結果を知っているとしよう．
- 自分がその結果を知らないとき，サイコロの2の目が出る確率は1/6.

- しかし相手が「偶数の目が出たよ」と情報を教えてくれたら？
- 「2の目が出る」確率は1/3に変化する．（{2,4,6}の中の1つ）
- 事象A :「偶数の目が出る」
- 偶数の目が出たという条件のもとで2の目が出る条件付き確率
  ⇒$P(C|A) = 1/3$　事象Aのもとで事象Cが起きる条件付き確率



条件付き確率

- $P(Y|X)$: 事象Xが起きたという条件のもとで，事象Y が起きる条件付き確率
- これは「事象Xが起きたという情報のもとで，事象Y が起きる確率」を表している.

情報によって確率は更新される

事象A:
このラーメン屋はうまい

$P(A) = 0.6$

事象B:
真帆が「このラーメン屋はうまい」と言う

$P(A|B)$？

ここのラーメンすっごくおいしいですっ！

真帆

条件付き確率の公式

- 条件付き確率に対しては以下が成り立つ

$$P(X \cap Y) = P(Y|X)P(X)$$

- これより$P(X) \neq 0$ ならば

$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)}$ （ベイズルールと呼ぶこともある）

（例）
事象A :「偶数の目が出る」
事象C :「2の目が出る」

$A = \{2,4,6\}$ $P(A) = \frac{1}{2}$

$A \cap C = \{2\}$ $(= C)$

$P(A \cap C) = \frac{1}{6}$

$$P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

（例）
事象A :「偶数の目が出る」$A = \{2,4,6\}$
事象B:「4以下の目が出る」$B = \{1,2,3,4\}$

$P(B) = \frac{2}{3}$

$A \cap B = \{2,4\}$ $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

条件付き確率の公式:条件が逆のとき

- 条件付き確率の公式 ： $P(X \cap Y) = P(Y|X)P(X)$
- XとYを入れ替えると？： $P(Y \cap X) = P(X|Y)P(Y)$
- $P(X \cap Y) = P(Y \cap X)$ なので

$$P(X \cap Y) = P(Y|X)P(X) = P(X|Y)P(Y)$$

が成り立つ

分割とは？

- 全事象Ωを事象$B_1, B_2, \ldots B_n$に分割するとは？
  - すべての$i \neq j$に対して$B_i \cap B_j = \emptyset$ （すべての事象が排反）
  - $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$ (全部合わせるとΩ)

例）サイコロを1個振る.　　全事象：$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

分割の例（1）
B_1：偶数の目が出る $B_1 = \{2,4,6\}$　　B_2：奇数の目が出る$B_2 = \{1,3,5\}$
$B_1 \cap B_2 = \emptyset$　　$B_1 \cup B_2 = \Omega$

分割の例（2）
B_1：偶数の目が出る $B_1 = \{2,4,6\}$　　B_2：5の目が出る $B_2 = \{5\}$
B_3：2以外の3以下の目が出る $B_3 = \{1,3\}$
$i \neq j$に対して$B_i \cap B_j = \emptyset$　　$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$

分割じゃない例
B_1：偶数の目が出る $B_1 = \{2,4,6\}$　　B_2：4以下の目が出る $B_2 = \{1,2,3,4\}$

全確率の公式

- 全事象Ωが事象$B_1, B_2, \ldots B_n$に分割できたとする．すなわち
  - すべての$i \neq j$に対して$B_i \cap B_j = \emptyset$
  - $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$　($B_1, B_2, \ldots B_n$を全部合わせるとΩ)
- このとき

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n)$$

が成立する．これを全確率の公式と呼ぶ．

例：

A：3以下の目が出る　B_1：偶数の目が出る　B_2：奇数の目が出る

$B_1 \cap B_2 = \emptyset$　$B_1 \cup B_2 = \Omega$

$P(A|B_1) = \frac{1}{3}$　$P(A|B_2) = \frac{2}{3}$　$P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) = 1/3 \times 1/2 + 2/3 \times 1/2 = 1/2$$

全確率の公式の使い方：例

- アリスは，家にいるか(B_1)，禅寺にいるか(B_2)，ショッピングモール(B_3)にいるとする．アリスはどれかの状態にあるとし，同時に起きることはないとする．
- アリスがアップルジュース・プレミアムを飲む(A)確率を知りたい
- ここで家にいる確率，禅寺にいる確率，ショッピングモールに入る確率はそれぞれ，

$$P(B_1)=1/4,\ \ P(B_2)=1/2,\ \ P(B_3)=1/4$$

とする．

また

- 家にいるときジュースを飲む確率 $P(A|B_1)=1/2$
- 禅寺にいるときジュースを飲む確率 $P(A|B_2)=1/12$
- ショッピングモールでジュースを飲む確率 $P(A|B_2)=1/3$

とする

全確率の公式の使い方：例

- 家(B_1)，禅寺(B_2)，モール(B_3)．
- ジュースを飲む(A)
- $P(B_1)$ =1/4　　$P(B_2)$ =1/2　　$P(B_3)$ =1/4
- $P(A|B_1)$ =1/2　　$P(A|B_2)$ =1/12　　$P(A|B_2)$ =1/3

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P\ (A|B_3)P\ (B_3)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{24} + \frac{1}{24} + \frac{2}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

演習★ 植木鉢が壊れる確率

- 演習4.2　問題1

アリス，文太，キャサリンの3人は，毎月15日にお寺に掃除に来るように，必ず1人だけ和尚に呼ばれる．（誰かは必ず呼ばれる）．
3人が呼ばれる確率は，アリスが0.6，文太が0.3，キャサリンが0.1である．

3人はお寺に呼ばれて掃除をしているときに，和尚が大事にしている庭の植木鉢を壊してしまうことがある．それぞれがお寺に呼ばれているときに植木鉢を壊してしまう確率（条件付き確率）は，アリスが0.1，文太が0.4，キャサリンが0.6である．

問題1：とある15日に，和尚の植木鉢が壊れる確率を求めよ．（小数で答えよ）

アリス
よく寺に呼ばれる
植木鉢はあまり
壊さない

文太
寺にそこそこ
呼ばれる
植木鉢をそこ
そこ壊す

キャサリン
寺にあまりこ
呼ばれない
植木鉢をよく
壊す

解答　植木鉢が壊れる確率

- アリス，文太，キャサリンがお寺に呼ばれると言う事象をA,B,Cとする.
- A, B, Cは全事象の分割となっている.
- $P(A) = 0.6, P(B) = 0.3, P(C) = 0.1$
- 植木鉢が壊れるという事象をUとする.
- 条件付き確率：
- $P(U|A) = 0.1,\ \ P(U|B) = 0.4,\ \ P(U|C) = 0.6$

- 植木鉢の壊れる確率

$$P(U) = P(U|A)P(A) + P(U|B)P(B) + P(U|C)P(C)$$
$$= 0.06 + 0.12 + 0.06 = 0.24$$

アリス
よく寺に呼ばれる
植木鉢はあまり
壊さない

文太
寺にそこそこ
呼ばれる
植木鉢をそこ
そこ壊す

キャサリン
寺にあまりこ
呼ばれない
植木鉢をよく
壊す

ベイズの定理

- 全確率の公式
  $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P\ (A|B_n)P\ (B_n)$
- 条件付き確率の公式 ($P(A) \neq 0$ ならば)
- $P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)}$
- さらに $P(A \cap B_i) = P(A|B_i)P(B_i)$を合わせると,
- 以下のベイズの公式が成立する.

ベイズの定理

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P\ (A|B_n)P\ (B_n)}$$

演習★ 植木鉢を割ったのは誰だ？

- 演習4.2　問題2

アリス，文太，キャサリンの3人は，毎月15日にお寺に掃除に来るように，必ず1人だけ和尚に呼ばれる．（誰かは必ず呼ばれる）．
3人が呼ばれる確率は，アリスが0.6，文太が0.3，キャサリンが0.1である．

3人はお寺に呼ばれて掃除をしているときに，和尚が大事にしている庭の植木鉢を壊してしまうことがある．それぞれがお寺に呼ばれているときに植木鉢を壊してしまう確率（条件付き確率）は，アリスが0.1，文太が0.4，キャサリンが0.6である．

問題2：とある15日に和尚の植木鉢が壊れていたとき，アリス，文太，キャサリンが割った確率（掃除に来ていた確率）をそれぞれ求めよ．誰が割った可能性が高いか？

解答　植木鉢を割ったのは誰だ

- $P(A) = 0.6, P(B) = 0.3, P(C) = 0.1$
- $P(U|A) = 0.1,\ \ P(U|B) = 0.4,\ \ P(U|C) = 0.6$

- アリス，文太，キャサリンが植木鉢を割った確率

$$P(A|U) = \frac{P(A \cap U)}{P(U)}$$

$$= \frac{P(U|A)P(A)}{P(U|A)P(A) + P(U|B)P(B) + P(U|C)P(C)} = \frac{0.06}{0.24} = \frac{1}{4}(= 0.25)$$

$$P(B|U) = \frac{P(U|B)P(B)}{P(U|A)P(A) + P(U|B)P(B) + P(U|C)P(C)} = \frac{0.12}{0.24} = \frac{1}{2}(= 0.5)$$

$$P(C|U) = \frac{P(U|C)P(C)}{P(U|A)P(A) + P(U|B)P(B) + P(U|C)P(C)} = \frac{0.06}{0.24} = \frac{1}{4}(= 0.25)$$

アリス
よく寺に呼ばれる
植木鉢はあまり
壊さない

文太
寺にそこそこ
呼ばれる
植木鉢をそこ
そこ壊す

キャサリン
寺にあまりこ
呼ばれない
植木鉢をよく
壊す

ベイズの定理:例1　検査薬問題

- ある病気に関する検査を考える.
- B_1 :病気にかかっている
- B_2 :病気にかかっていない
- A :検査結果が陽性と出る
- 病気になる確率は1/10000とする:　$P(B_1)$ =1/10000
- 検査は，病気にかかっているときは100%「陽性」と出る $P(A|B_1)$ =1
- 病気にかかっていないときも，1%は「陽性」と誤って出る確率がある. $P(A|B_2)$ =1/100

- 検査で「陽性」と出た人が，実際に病気である確率はいくらか？

ベイズの定理：例1　検査薬問題

- B_1：病気にかかっている
- B_2：病気にかかっていない
- A　：検査結果が陽性と出る
- $P(B_1)$ =1/10000
- $P(A|B_1)$ =1
- $P(A|B_2)$ =1/100

- 検査で「陽性」と出た人が，実際に病気である確率？：$P(B_1|A)$

ベイズの定理

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)}$$

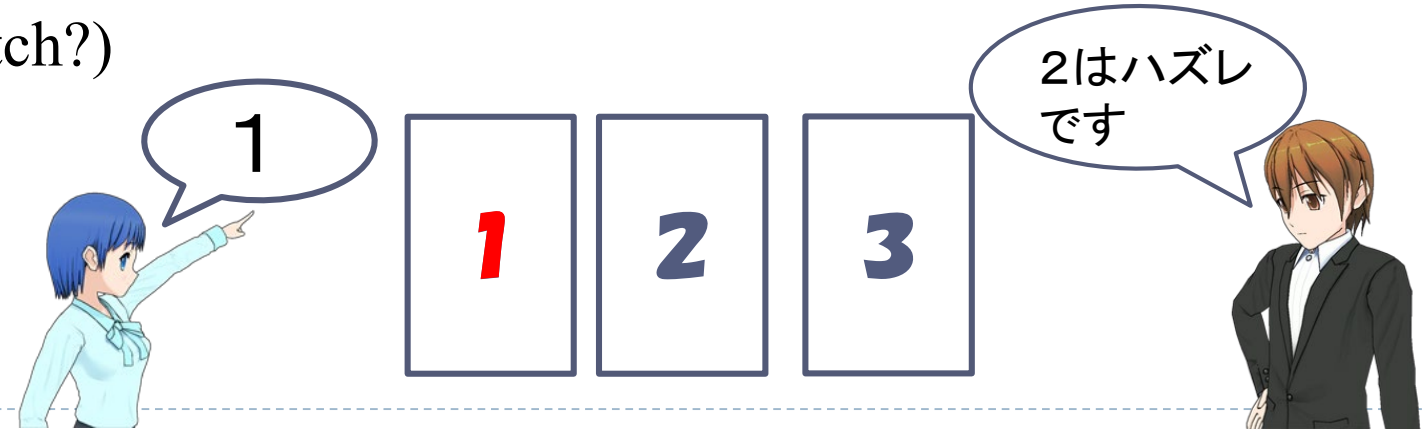
- 「病気にかかる」か「かからない」か,のどちらか.

$P(B_2) = 1 - 1/10000 = 9999/10000$　：ベイズの定理に代入して

$$P(B_1|A) = \frac{1 \times \frac{1}{10000}}{1 \times \frac{1}{10000} + \frac{1}{100} \times \frac{9999}{10000}} = 0.001$$

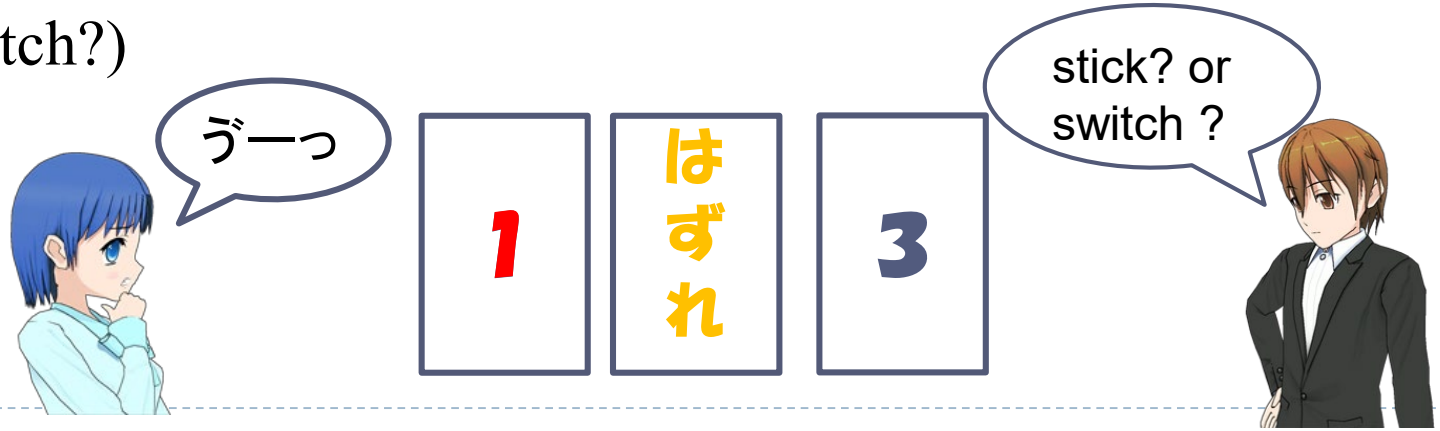
ベイズの定理：例2　モンティ・ホール問題

- 1，2，3のカーテンの後に1つだけ「当たり」がある.
- 解答者は，1つだけ当たりのカーテンを予想し指定する．仮に1のカーテンを指したとする.
- 司会者は当たりがどこかを知っている．司会者は，指していないカーテンから1つだけハズレのカーテンを開ける．仮に2のカーテンを空けたとする.
- 解答者は，それを見て，1のカーテンのまま留まるか（stick)，変えて3のカーテンにするか決める（switch)
- この場合，留まったほうが良いか，変えたほうが良いか？(sitck or switch?)



ベイズの定理：例2　モンティ・ホール問題

- 1，2，3のカーテンの後に1つだけ「当たり」がある．
- 解答者は，1つだけ当たりのカーテンを予想して指定する．仮に1のカーテンを指名したとする．
- 司会者は当たりがどこかを知っている．司会者は，指していないカーテンから1つだけハズレのカーテンを開ける．仮に2のカーテンを空けたとする．
- 解答者は，それを見て，1のカーテンのまま留まるか（stick)，変えて3のカーテンにするか決める（switch)
- この場合，留まったほうが良いか，変えたほうが良いか？(sitck or switch?)



ベイズの定理：例2　モンティ・ホール問題

- B_1：1のカーテンが当たり
- B_2：2のカーテンが当たり
- B_3：3のカーテンが当たり
- A　：司会者が2のカーテンを開ける
- $P(B_1|A)$ を求める．$P(B_3|A) = 1 - P(B_1|A)$

- カーテンを開ける前：当たる確率は同じ　$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 1/3$
- １のカーテンが当たりのとき，司会者が2と3のカーテンを開ける確率は同じなので
$$P(A|B_1) = 1/2$$
- ２のカーテンが当たりであることはない．$P(A|B_2) = 0$
- ３のカーテンが当たりだと2のカーテン100%確実に開く $P(A|B_3) = 1$

ベイズの定理

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)) + P(A|B_3)P(B_3)} = \frac{1}{3}$$

$$P(B_2|A) = 0, P(B_3|A) = \frac{2}{3}$$

３のカーテンにスイッチしたほうが良い！！
（当たる確率は2倍）

8.2　不完備情報の戦略形ゲーム

不確実性を扱うゲーム

- 完備情報(complete information)ゲーム
  - 相手や自分がプレイするゲーム（主に利得）が確実に分かるゲーム
    - 相手の「行動」は，分からなくてもよい－不完全(imperfect)情報
    - （戦略形ゲームはそもそも，相手の行動が分からない）
    - 完全情報(perfect information)と完備情報を区別する
- 不完備情報(incomplete information)ゲーム
  - 相手や自分がプレイするゲームが不確実
  - プレイヤーは確率でゲームを推測する

- 情報の非対称性：不完備情報ゲームが取り扱う重要な問題
  - 自分と相手の持っている情報が異なるゲーム
  - 売り手と買い手（新商品の性能，中古品品質）
  - 依頼人と代理人，雇用者と被雇用者，経営者と株主etc．．．

簡単な不完備情報ゲーム

- ２人ゲーム
- 一方のプレイヤーは，どのゲームでプレイするかについての情報を持っている.
- 一方のプレイヤーは分からず，それを確率で推測している.

モデル34： I市コンビニ戦争PART7

- 2つのコンビニ：セレブとファミモ
- 同時にA駅かB駅かに出店する
- 両駅の利用客は，基本的には600人
- 別の場所に出店した場合⇒600人を獲得
- 同じ駅に出店した場合，900人の客を2つのコンビニが取り合う

- セレブには2つのタイプがある
  - タイプA：A駅で競争すると強い
  - タイプB：B駅で競争すると強い

- セレブがタイプAの場合
- A駅に両方が出店
  ⇒セレブ750人，ファミモ150人
- B駅に両方が出店
  ⇒セレブ・ファミモ共に450人

- セレブがタイプBの場合
- A駅に両方が出店
  ⇒セレブ・ファミモ共に450人
- B駅に両方が出店
  ⇒セレブ750人，ファミモ150人

2つのタイプに対する利得行列

セレブがタイプAの場合

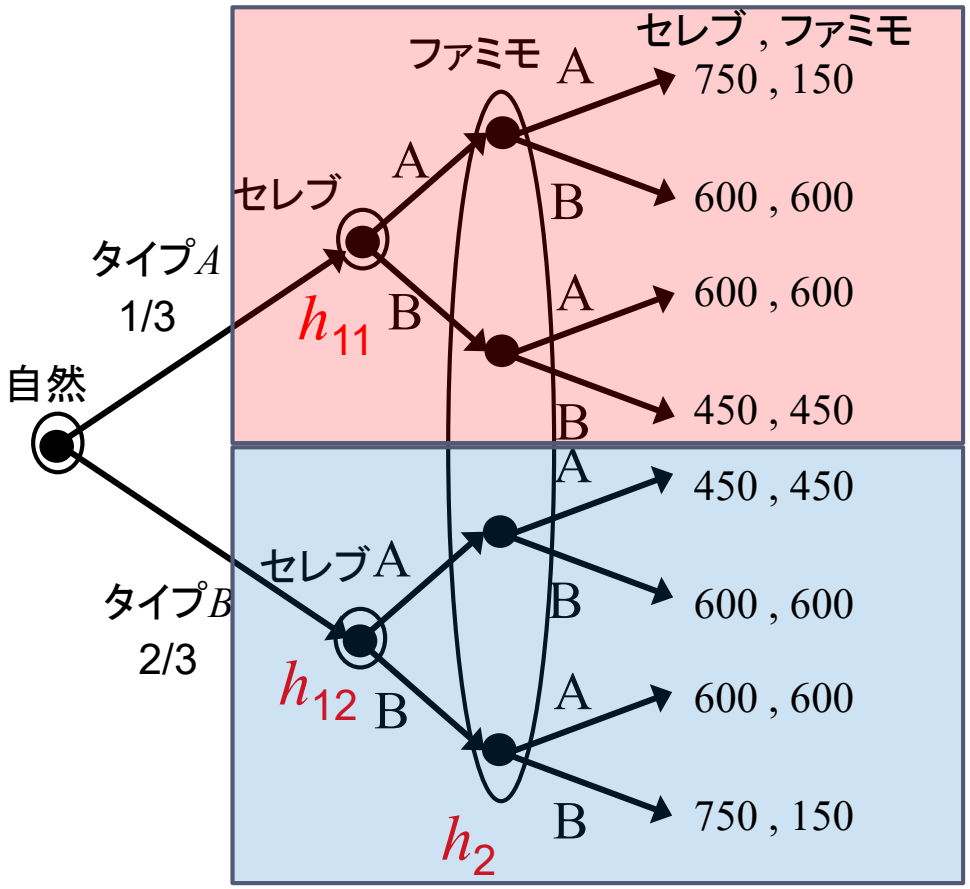
ファミモ / セレブ	A駅	B駅
A駅	(750,150)	(600,600)
B駅	(600,600)	(450,450)

セレブがタイプBの場合

ファミモ / セレブ	A駅	B駅
A駅	(450,450)	(600,600)
B駅	(600,600)	(750,150)

- セレブは自分のタイプを分かっているとする.
- ファミモは，セレブのタイプを以下の確率で推測している:
  - タイプAである確率1/3，タイプBである確率2/3
  - どちらのゲームかを推測する＝相手のタイプを推測する

展開形ゲームによる記述



- 自然が，セレブのタイプを決定する.
- セレブは，自分のタイプを知って，それぞれに行動を決める（情報集合h_{11}とh_{12}）
- ファミモは，セレブのタイプは分からず，セレブが何を選んだかも分からない（同時のゲームなので）ので，行動を決めるのは1つの情報集合h_2だけ

部分ゲームはないことに注意する！

不完備情報ゲームの戦略と解

- プレイヤーは，タイプごとに行動を選ぶ

セレブの戦略

（A駅, A駅）　タイプAはA駅，タイプBもA駅を選ぶ

（A駅, B駅）　タイプAはA駅，タイプBはB駅を選ぶ

（B駅, A駅）　タイプAはB駅，タイプBはA駅を選ぶ

（B駅, B駅）　タイプAがB駅，タイプBもB駅を選ぶ

不完備情報の利得行列ー利得の計算方法

セレブがタイプA

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(750,150)	(600,600)
B駅	(600,600)	(450,450)

セレブがタイプB

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(450,450)	(600,600)
B駅	(600,600)	(750,150)

- セレブは自分のタイプを認識できる.
- ファミモは，セレブを確率で推測

タイプA：1/3

タイプB：2/3

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
（A駅，A駅）	((750, 450), 350)	
（A駅，B駅）		
（B駅，A駅）		
（B駅，B駅）		

セレブの利得

(750,450)

左側がタイプAの利得

右側がタイプBの利得

ファミモの利得

セレブがタイプAなら150

セレブがタイプBなら450

期待値で計算

1/3×150+2/3×450=350

不完備情報の利得行列ーもう1つ

セレブがタイプA

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(750,150)	(600,600)
B駅	(600,600)	(450,450)

セレブがタイプB

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(450,450)	(600,600)
B駅	(600,600)	(750,150)

- セレブは自分のタイプを認識できる.
- ファミモは，セレブを確率で推測

タイプA：1/3

タイプB：2/3

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
（A駅，A駅）	((750, 450), 350)	
（A駅，B駅）	((750, 600), 450)	
（B駅，A駅）		
（B駅，B駅）		

セレブの利得(750,600)
左側がタイプA
右側がタイプB

ファミモの利得
セレブがタイプAなら150
セレブがタイプBなら600
期待値で計算

1/3×150+2/3×600=450

不完備情報の利得行列：完成

セレブがタイプA

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(750,150)	(600,600)
B駅	(600,600)	(450,450)

セレブがタイプB

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(450,450)	(600,600)
B駅	(600,600)	(750,150)

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
(A駅，A駅)	((750, 450), 350)	((600, 600), 600)
(A駅，B駅)	((750, 600), 450)	((600, 750), 300)
(B駅，A駅)	((600, 450), 500)	((450, 600), 550)
(B駅，B駅)	((600, 600), 600)	((450, 750), 250)

不完備情報ゲームにおけるタイプ

- 不完備情報におけるタイプとは？
  - 利得を決定する属性
  - 持っている情報の属性
- 先ほどのゲームにおいてセレブのタイプは，A駅に強い，B駅に強い，という自分の属性のように見えた．
  - 初学者に分かりやすくするため
- しかし自分の属性と考えるよりは，異なる情報を持っていれば，異なるタイプになる，と考えたほうが良い．
  - 「タイプ」は，プレイヤーが持っている情報を表すと考えても良い．
  - 次の演習を参照

演習　不完備情報ゲームの利得行列

- 以下の2つの戦略形ゲームのどちらかがプレイされる
- プレイヤー1は，どちらのゲームが起きるかを知っている.
  - タイプA：右の赤いゲームであると知っている
  - タイプB：右の青いゲームであると知っている
- プレイヤー2は，ゲームを確率で推測する
  ＝プレイヤー1のタイプを推測する
  - タイプAである確率1/4　タイプBである確率3/4

プレイヤー1がタイプA

1＼2	L	R
U	(0, 8)	(16,16)
D	(8,16)	(8 , 0)

プレイヤー1がタイプB

1＼2	L	R
U	(4, 4)	(4 ,0)
D	(12, 12)	(0,16)

問題

不完備情報ゲームの利得行列を作成せよ

解答　不完備情報ゲームの利得行列

1 \ 2	L	R
(U, U)	((0, 4), 5)	
(U, D)		
(D, U)		
(D, D)		

プレイヤー1がタイプA

1 \ 2	L	R
U	(0, 8)	(16,16)
D	(8,16)	(8, 0)

プレイヤー1がタイプB

1 \ 2	L	R
U	(4, 4)	(4 ,0)
D	(12, 12)	(0,16)

- タイプAである確率1/4
- タイプBである確率3/4

解答　不完備情報ゲームの利得行列

1 \ 2	L	R
(U , U)	((0 , 4) , 5)	((16 , 4) , 4)
(U , D)	((0 ,12) , 11)	((16 , 0) , 16)
(D , U)	((8 , 4) , 7)	((8 , 4) , 0)
(D , D)	((8 ,12) , 13)	((8 , 0) , 12)

8.3 ベイズナッシュ均衡

不完備情報ゲームの解はベイズナッシュ均衡

- 完備情報の解はナッシュ均衡
  - すべてのプレイヤーが，最適反応戦略を選びあう
- ベイズナッシュ均衡
  - すべてのプレイヤーのすべてのタイプが，最適反応戦略を選びあう戦略の組

- ベイズナッシュ均衡の求め方
  - これまでと同じ
  - すべてのプレイヤーのすべてのタイプに対して，最適反応戦略を求めていけば良い

ベイズナッシュ均衡を求める(1)

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
(A駅, A駅)	((750, 450), 350)	((600, 600), 600)
(A駅, B駅)	((750, 600), 450)	((600, 750), 300)
(B駅, A駅)	((600, 450), 500)	((450, 600), 550)
(B駅, B駅)	((600, 600), 600)	((450, 750), 250)

タイプAのセレブの最適反応戦略を求める
(セレブの左側の利得(赤色)に注目)

ファミモがA駅を選択すると？　A駅が最適反応

ファミモがB駅を選択すると？　A駅が最適反応

ベイズナッシュ均衡を求める(2)

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
(A駅, A駅)	((750, 450), 350)	((600, 600), 600)
(A駅, B駅)	((750, 600), 450)	((600, 750), 300)
(B駅, A駅)	((600, 450), 500)	((450, 600), 550)
(B駅, B駅)	((600, 600), 600)	((450, 750), 250)

タイプBのセレブの最適反応戦略を求める
(セレブの左側の利得(青色)に注目)

ファミモがA駅を選択すると？　B駅が最適反応

ファミモがB駅を選択すると？　B駅が最適反応

ベイズナッシュ均衡を求める(3)

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
(A駅, A駅)	((750, 450), 350)	((600, 600), 600)
(A駅, B駅)	((750, 600), 450)	((600, 750), 300)
(B駅, A駅)	((600, 450), 500)	((450, 600), 550)
(B駅, B駅)	((600, 600), 600)	((450, 750), 250)

ファミモの最適反応戦略を求める
(ファミモの利得(黒色)に注目)

セレブが(A駅, A駅)を選択すると?
(すなわち, タイプAがA駅, タイプBもA駅を選択すると?)

B駅が最適反応

ベイズナッシュ均衡を求める(4)

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
(A駅, A駅)	((750, 450), 350)	((600, 600), 600)
(A駅, B駅)	((750, 600), 450)	((600, 750), 300)
(B駅, A駅)	((600, 450), 500)	((450, 600), 550)
(B駅, B駅)	((600, 600), 600)	((450, 750), 250)

すべてのプレイヤーの，すべてのタイプが最適反応戦略を選んでいる戦略の組がベイズナッシュ均衡

セレブはタイプAがA駅，タイプBがB駅を選ぶ．
ファミモはA駅を選ぶ

セレブは自分が強い駅に立地している

結果の分析と解釈

セレブがタイプA

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(750,150)	(600,600)
B駅	(600,600)	(450,450)

セレブがタイプB

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
A駅	(450,450)	(600,600)
B駅	(600,600)	(750,150)

- セレブは自分のタイプを認識できる.
- ファミモは，セレブを確率で推測

タイプA：1/3

タイプB：2/3

ベイズナッシュ均衡

セレブはタイプAがA駅，タイプBがB駅を選ぶ.
ファミモは，A駅を選ぶ

よく見ると？
タイプAのセレブは「A駅」が支配戦略
タイプBのセレブは「B駅」が支配戦略

どのプレイヤーのどのタイプも，支配戦略があるときは，ベイズナッシュ均衡ではそれを選ぶ

利得の考え方 事前・事後・中間期

ファミモ / セレブ	A駅	B駅
A駅	(750,150)	(600,600)
B駅	(600,600)	(450,450)

ファミモ / セレブ	A駅	B駅
A駅	(450,450)	(600,600)
B駅	(600,600)	(750,150)

タイプA：1/3
タイプB：2/3

セレブ / ファミモ	A駅	B駅
(A駅，A駅)	((750, 450), 350)	((600, 600), 600)
(A駅，B駅)	((750, 600), 450)	((600, 750), 300)
(B駅，A駅)	((600, 450), 500)	((450, 600), 550)
(B駅，B駅)	((600, 600), 600)	((450, 750), 250)

セレブ：
タイプA：A駅，
タイプB：B駅
ファミモ：
A駅を選ぶ

この時点でプレイヤーは行動を選ぶ

利得に対する3つの考え方：どの時点の利得を考えるか？

事前 (ex ante) の利得
セレブのタイプもファミモのタイプも分からない

セレブの期待利得
1/3×750+2/3×600=650
ファミモの期待利得　450

中間期 (interim) の利得
セレブは自分のタイプが分かる（＝ゲームをプレイするとき）ファミモは分からない

セレブの利得
タイプA　750
タイプB　600
ファミモの期待利得　450

事後(ex post) の利得
セレブもファミモもセレブのタイプが分かる（＝ゲームをプレイしたあと）

タイプAだったとき
セレブ　750　ファミモ150
タイプBだったとき
セレブ　600　ファミモ600

演習　ベイズナッシュ均衡を求める

プレイヤー1がタイプA

1＼2	L	R
U	(0, 8)	(16,16)
D	(8,16)	(8 , 0)

プレイヤー1がタイプB

1＼2	L	R
U	(4, 4)	(4 ,0)
D	(12, 12)	(0,16)

タイプA:1/4
タイプB:3/4

1＼2	L	R
(U , U)	((0 , 4) , 5)	((16, 4) , 4)
(U , D)	((0 ,12) , 11)	((16, 0) , 16)
(D , U)	((8 , 4) , 7)	((8 , 4) , 0)
(D , D)	((8 ,12) , 13)	((8 , 0) , 12)

この1つ前の演習の不完備情報ゲーム（利得行列を求めたもの）に対し

- ベイズナッシュ均衡を求めよ
- 均衡における各プレイヤーの利得（中間期）を求めよ
- 均衡における各プレイヤーの事後利得を求めよ
- 均衡におけるプレイヤー1の事前利得を求めよ

どちらのタイプのゲームにも支配戦略がないことにも注目

解答　ベイズナッシュ均衡を求める

プレイヤー1がタイプA

1＼2	L	R
U	(0, 8)	(16,16)
D	(8,16)	(8 , 0)

プレイヤー1がタイプB

1＼2	L	R
U	(4, 4)	(4 ,0)
D	(12, 12)	(0,16)

タイプA：1/4
タイプB：3/4

1＼2	L	R
(U , U)	((0 , 4) , 5)	((16, 4) , 4)
(U , D)	((0 ,12) , 11)	((16, 0) , 16)
(D , U)	((8 , 4) , 7)	((8 , 4) , 0)
(D , D)	((8 ,12) , 13)	((8 , 0) , 12)

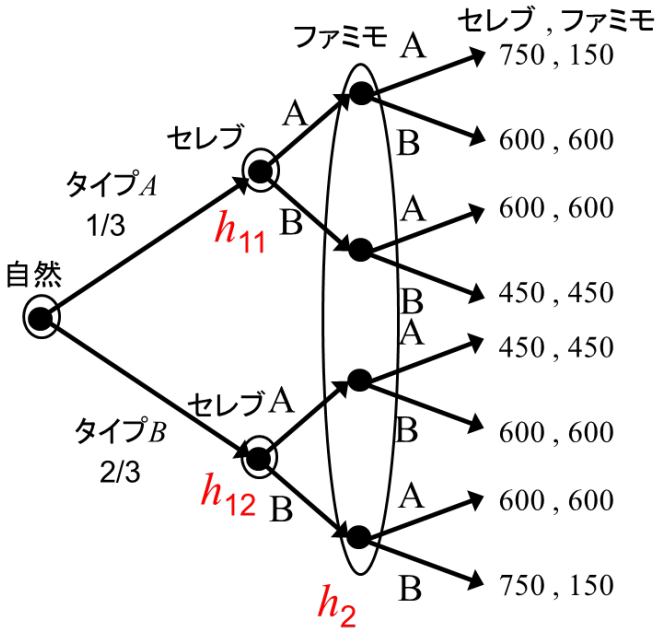
問題1：ベイズナッシュ均衡　((*D*,*D*),*L*)
　　（プレイヤー1：タイプ*A*もタイプ*B*もDを選択，プレイヤー2は*L*を選択）
問題2：各プレイヤーの利得（中間期）
　　プレイヤー1：タイプ*A*　8　タイプ*B* 12　　プレイヤー2　13
問題3：各プレイヤーの事後利得
プレイヤー1がタイプ*A*のとき　プレイヤー1　8　　プレイヤー2　16
プレイヤー1がタイプ*B*のとき　プレイヤー1　12　　プレイヤー2　12
問題4：プレイヤー1の事前利得　1/4×8+3/4×12=11

まとめ　不完備情報の戦略形ゲーム

- 相手や自分がプレイするゲームが不確実なゲームを不完備情報ゲームと言う
- 各プレイヤーはタイプを持ち，タイプごとに異なる情報を持っている
- 簡単な不完備情報ゲーム：２人ゲーム．一方のプレイヤーは，どのゲームでプレイするかについての情報を持っていて，一方のプレイヤーは分からず，それを確率で推測している．
- ベイズナッシュ均衡をゲームの解と考える．

8.4 事前確率で不完備情報ゲームを考察する

展開形ゲーム⇒戦略形ゲームで考える

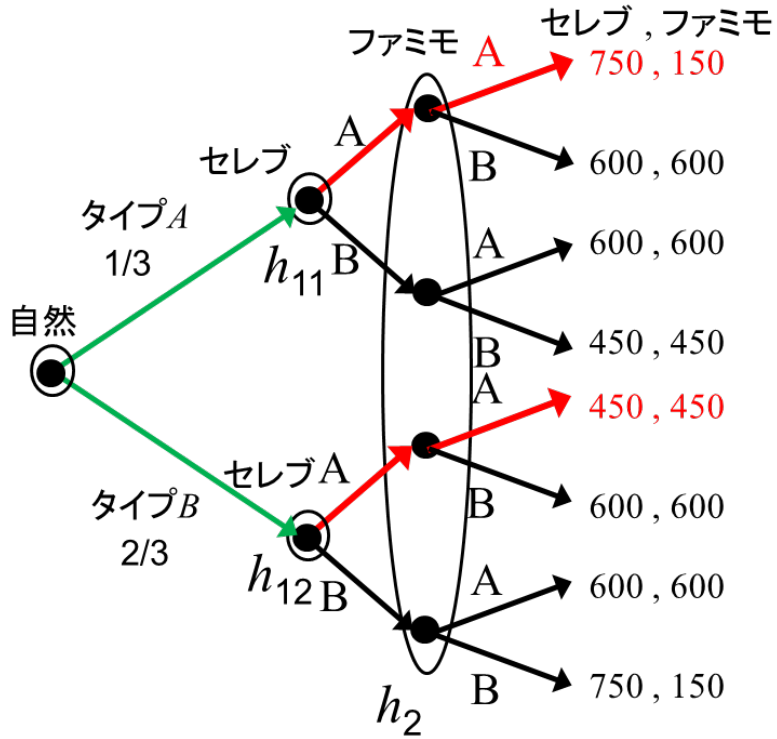


セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
(A駅, A駅)	((750, 450), 350)	((600, 600), 600)
(A駅, B駅)	((750, 600), 450)	((600, 750), 300)
(B駅, A駅)	((600, 450), 500)	((450, 600), 550)
(B駅, B駅)	((600, 600), 600)	((450, 750), 250)

不完備情報ゲームを解くために利得行列を上のように作り，ベイズナッシュ均衡を解として考えた.

しかし展開形ゲーム⇒戦略形ゲームで考えると？

不確実性のある展開形ゲーム



戦略の組によって，終点の確率分布が決まる．その期待利得を計算する．

（例）セレブがA駅，ファミモが(A駅，A駅）を選ぶ．

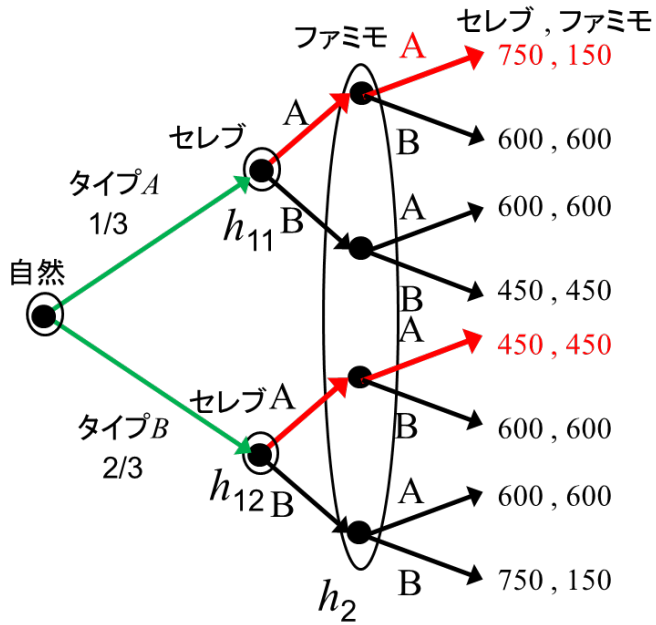
⇒

セレブ： $\frac{1}{3} \times 750 + \frac{2}{3} \times 450 = 550$

ファミモ： $\frac{1}{3} \times 150 + \frac{2}{3} \times 450 = 350$

セレブ ＼ ファミモ	A駅	B駅
（A駅，A駅）	(550,350)	
（A駅，B駅）		
（B駅，A駅）		
（B駅，B駅）		

不完備情報ゲームの利得行列との関係



ここまでの不完備情報の利得行列との関係

セレブ：先に習った利得行列では，タイプごとに中間期の利得を並べている．つまりセレブは自分のタイプを知っている．

今回の利得行列では，事前の期待利得を用いている．セレブは自分のタイプを知らず確率で推定している．

ファミモ：同じ（事前と中間期は同じ）

中間期の利得行列（タイプごとの利得）

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
（A駅，A駅）	((750, 450), 350)	
（A駅，B駅）		
（B駅，A駅）		
（B駅，B駅）		

セレブ： $\frac{1}{3} \times 750 + \frac{2}{3} \times 450 = 550$

事前の利得行列（プレイヤーで1つの利得）

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
（A駅，A駅）	(550, 350)	
（A駅，B駅）		
（B駅，A駅）		
（B駅，B駅）		

２つの利得行列ができる

中間期の利得行列
（タイプごとの利得）

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
（A駅，A駅）	((750, 450), 350)	((600, 600), 600)
（A駅，B駅）	((750, 600), 450)	((600, 750), 300)
（B駅，A駅）	((600, 450), 500)	((450, 600), 550)
（B駅，B駅）	((600, 600), 600)	((450, 750), 250)

事前の利得行列
（プレイヤーで1つの利得）

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
（A駅，A駅）	(550, 350)	(600, 600)
（A駅，B駅）	(650, 450)	(700, 300)
（B駅，A駅）	(500, 500)	(550, 550)
（B駅，B駅）	(600, 600)	(650, 250)

2つの利得行列の解は一致する

中間期の利得行列
（タイプごとの利得）

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
（A駅，A駅）	((750, 450), 350)	((600, 600), 600)
（A駅，B駅）	((750, 600), 450)	((600, 750), 300)
（B駅，A駅）	((600, 450), 500)	((450, 600), 550)
（B駅，B駅）	((600, 600), 600)	((450, 750), 250)

ベイズナッシュ均衡は
（（A駅，B駅），A駅）

事前の利得行列
（プレイヤーで1つの利得）

セレブ＼ファミモ	A駅	B駅
（A駅，A駅）	(550, 350)	(600, 600)
（A駅，B駅）	(650, 450)	(700, 300)
（B駅，A駅）	(500, 500)	(550, 550)
（B駅，B駅）	(600, 600)	(650, 250)

ナッシュ均衡は
（（A駅，B駅），A駅）

中間期で考えたベイズナッシュ均衡と事前で考えたナッシュ均衡は（確率が0となるタイプの組がないときは）一致することが証明できる.

まとめ　不完備情報ゲームを事前確率で考察

- 不完備情報ゲームは，不確実性のある展開形ゲームとして考えることができる.
- 不確実性のある展開形ゲームと考え，戦略形ゲームに変換すると，それは事前確率の期待利得を考えた戦略形ゲームに対応する.
- すなわち「中間期で考えた戦略形ゲーム（タイプごとの利得）」と「事前で考えた戦略形ゲーム（プレイヤーごとに1つの利得」と2つの考え方がある.
- どちらの考え方をとっても解は同じになる.

どちらが良いか？
これは難しい問題だが，タイプごとに考えた中間期の考え方の方が，不完備情報ゲームの考え方に沿っているし，計算も簡単になる（事前確率で期待利得を計算する必要がない）