9. 不完備情報の展開形ゲーム

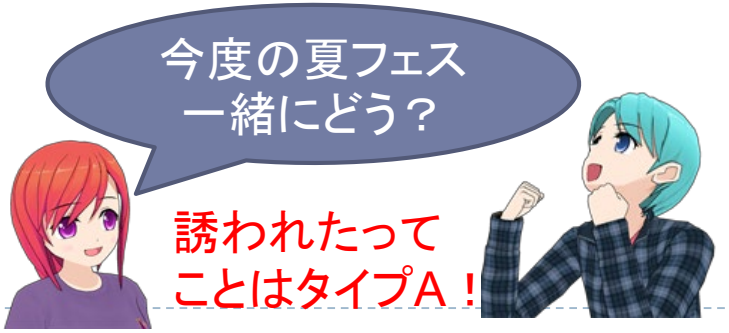
9.1 不完備情報の展開形ゲーム

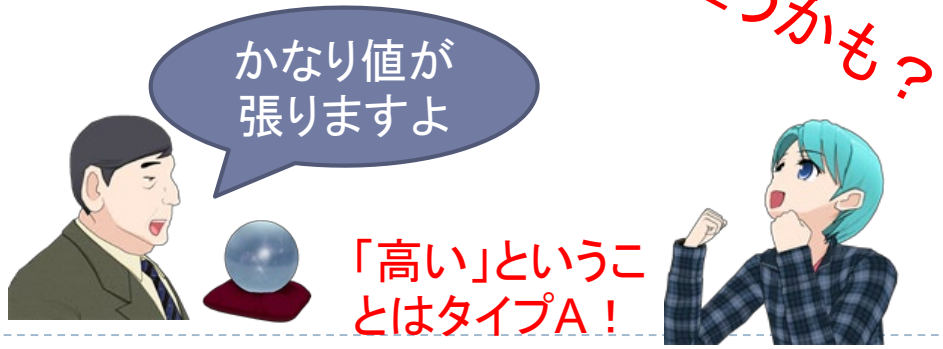
不完備情報の展開形ゲーム

- 不完備情報(incomplete information)ゲーム
  - 相手や自分がプレイするゲーム・利得が不確実
  - プレイヤーは確率でゲーム（相手のタイプ）を推測する
- 展開形ゲームでは
  - プレイヤーの行動が，そのプレイヤーの持つ情報を示す
  - しかしプレイヤーは，それを読み込んで戦略的に行動する

タイプA：文太を好き
タイプB：文太を好きじゃない

タイプA：本物の水晶玉
タイプB：偽物の水晶玉

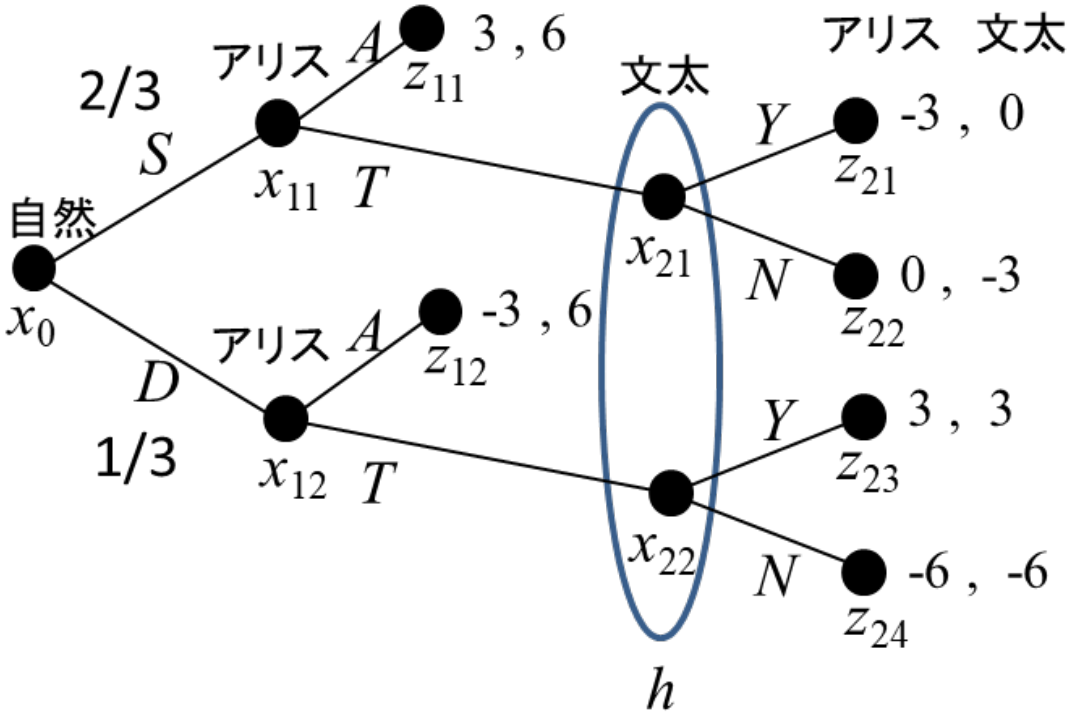




モデル：禅は1人で？2人で？

- アリスは禅寺に，一人で行くか(A:Alone)，文太を誘おう(T:Together)か考えている.
- アリスに2つのタイプ
  - （タイプS:Solo）和尚から1人で来るように言われている
  - （タイプD：Double)和尚から文太も連れてくるように言われている
  - その確率はそれぞれ2/3，1/3
- アリスは，AかTかを決める.
  - Aを選ぶとゲームは終わり，アリスが一人で寺へ行く
  - Tを選ぶと，文太は（アリスのタイプが分からないまま）
  - 一緒に行くか(Y:Yes)，行かないか（N:No）を決める
- 利得は次図

禅は1人で？2人で？ゲームの木



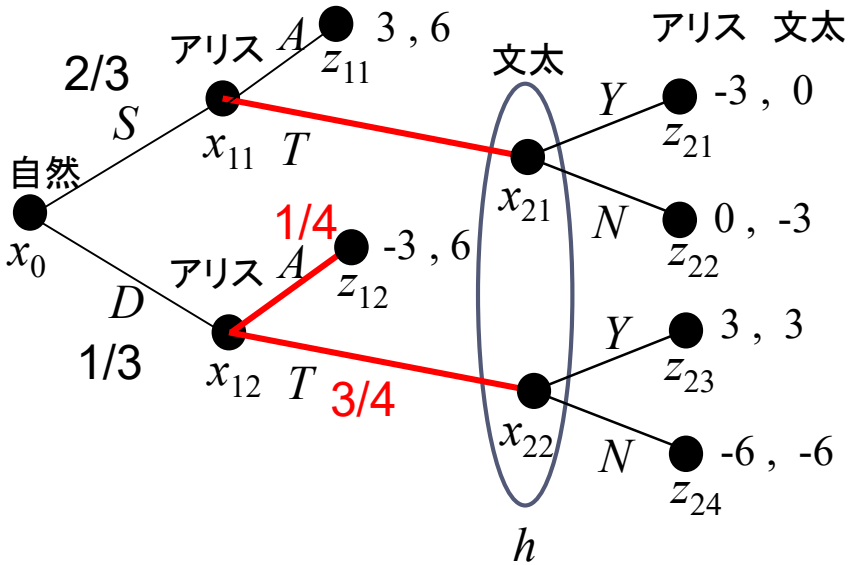
9.2 完全ベイズ均衡

信念と完全ベイズ均衡

- 不完備情報の展開形ゲームの解は完全ベイズ均衡
- 信念(belief)という考え方を導入
  - 情報集合に複数の点があるとき，プレイヤーはどのような確率でその点が実現するかを推測する.
  - その推測確率を信念(belief)と呼ぶ
- 整合的な信念
  - プレイヤーは相手の戦略も推測する
  - 予想した戦略に対し，信念がベイズの定理に従うとき，その信念は（ベイズの定理に）整合的であるという

ゲーム理論講義における，
最終にして最大の山場！

整合的な信念とは？ #1



たとえば

アリスの戦略：
x_{11}では T を選ぶ，x_{12}ではA を 1/4，Tを3/4で選ぶ

混合戦略の方が理解しやすい

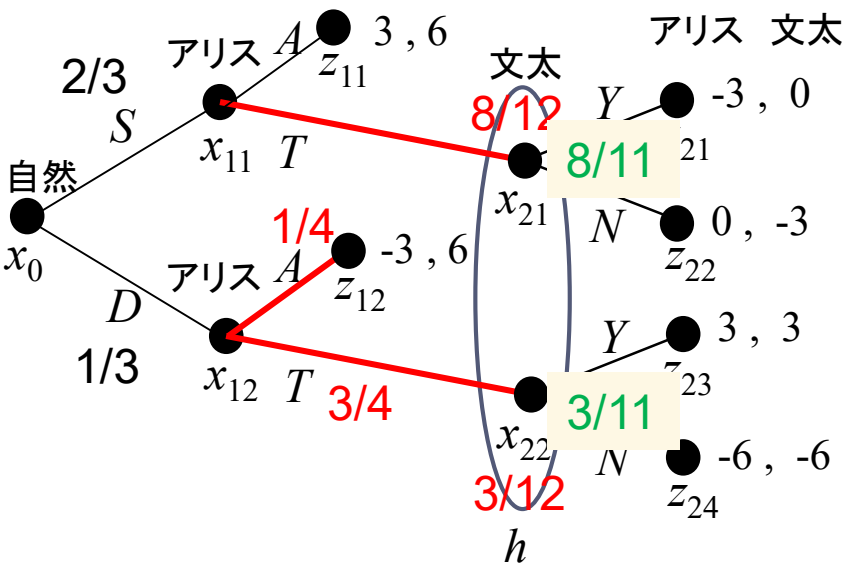
文太の情報集合hにおける整合的な信念は？

まずx_{21}，x_{22}，情報集合hに到達する確率を求める．

$$P(x_{21}) = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3} = \frac{8}{12} \qquad P(x_{22}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

$$P(h) = P(x_{21}) + P(x_{22}) = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

整合的な信念とは？ #2



アリスの戦略:
x_{11}では Tを選ぶ
x_{12}では Tを1/4, Aを3/4で選ぶ

$$P(x_{21}) = \frac{8}{12}$$

$$P(x_{22}) = \frac{3}{12}$$

$$P(h) = P(x_{21}) + P(x_{22}) = \frac{11}{12}$$

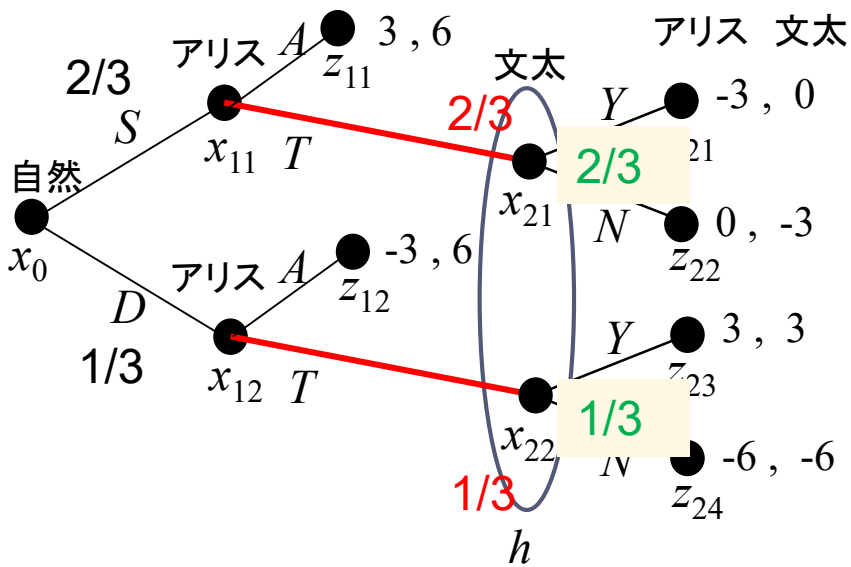
文太の情報集合hにおける整合的な信念$\mu(x_{21}), \mu(x_{22})$
文太がhで行動を選ぶ（つまりアリスがTを選んだ）という条件のもとで，x_{21}とx_{22}にいる確率

$$\mu(x_{21}) = P(x_{21}|h) = \frac{P(x_{21} \cap h)}{P(h)} = \frac{P(x_{21})}{P(h)} = \frac{8/12}{11/12} = \frac{8}{11}$$

$$\mu(x_{22}) = P(x_{22}|h) = \frac{P(x_{22} \cap h)}{P(h)} = \frac{P(x_{22})}{P(h)} = \frac{3/12}{11/12} = \frac{3}{11}$$

x_{21}とx_{22}の到達確率の比になっている

純粋戦略における整合的な信念 #1



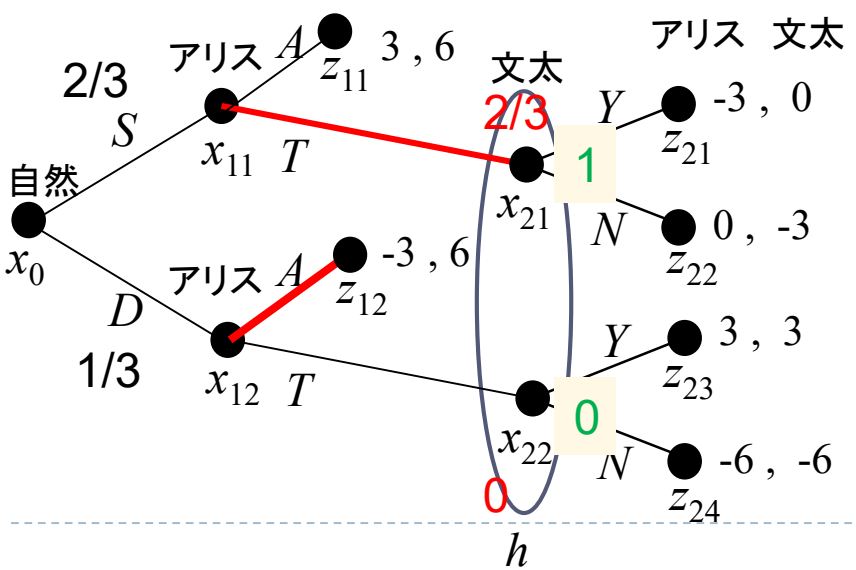
アリスの戦略:
x_{11}では T を選ぶ, x_{12}では T を選ぶ
（以下, いつものように TT と書く）

$$P(x_{21}) = \frac{2}{3} \quad P(x_{22}) = \frac{1}{3} \quad P(h) = 1$$

$$\mu(x_{21}) = P(x_{21}|h) = \frac{P(x_{21})}{P(h)} = \frac{2/3}{1} = \frac{2}{3}$$

$$\mu(x_{22}) = P(x_{22}|h) = \frac{P(x_{22})}{P(h)} = \frac{1/3}{1} = \frac{1}{3}$$

事前確率と同じ



アリスの戦略: TA

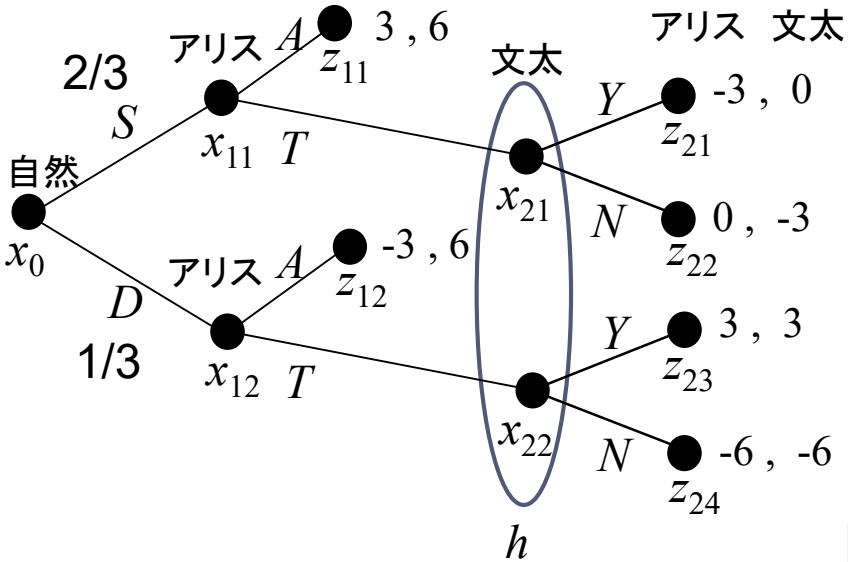
$$P(x_{21}) = \frac{2}{3} \quad P(x_{22}) = 0 \quad P(h) = \frac{2}{3}$$

$$\mu(x_{21}) = P(x_{21}|h) = \frac{P(x_{21})}{P(h)} = \frac{2/3}{2/3} = 1$$

$$\mu(x_{22}) = P(x_{22}|h) = \frac{P(x_{22})}{P(h)} = \frac{0}{2/3} = 0$$

x_{21}の確率は1（x_{22}にいる確率は0）

純粋戦略における整合的な信念



アリスの純粋戦略と整合的な信念

$TT \quad \mu(x_{21}) = \frac{2}{3} \quad \mu(x_{22}) = \frac{1}{3}$

$TA \quad \mu(x_{21}) = 1 \quad \mu(x_{22}) = 0$

$AT \quad \mu(x_{21}) = 0 \quad \mu(x_{22}) = 1$

純粋戦略のときは，ベイズの定理を使うまでもない！

アリスの戦略がAAのときは？

$P(x_{21}) = 0 \quad P(x_{22}) = 0 \quad P(h) = 0$

$$\mu(x_{21}) = P(x_{21}|h) = \frac{P(x_{21})}{P(h)}$$

$$\mu(x_{22}) = P(x_{22}|h) = \frac{P(x_{21})}{P(h)}$$

これでは計算できない

$$P(x_{21}) = P(x_{21}|h)P(h)$$
$$P(x_{22}) = P(x_{22}|h)P(h)$$

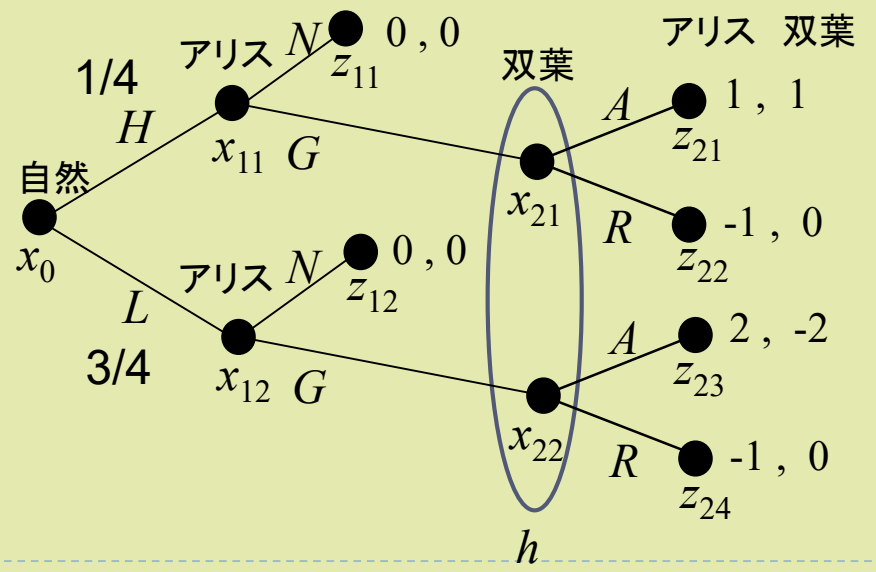
であったことを考えると，どんな$P(x_{21}|h)$と$P(x_{22}|h)$も整合的になると考えられる．

アリスの戦略がAAのときは
どんな信念も整合的と考える

信念は何でも良い

演習　アリスの採用面接

- アリスは双葉という企業の採用面接に行く（G:Go）か、行かない（N:Not Go)かを決める。アリスが採用面接に来た場合、双葉は採用するか(A:Accept)、しないか(R:Reject)かを決める
- アリスは、高能力（タイプH）である確率が1/4、低能力である確率が3/4（タイプL)であると双葉は推測している。もちろんアリスは自分のタイプを知っている。
- アリスは、採用されれば高能力のとき利得は+1、低能力のとき利得は+2とする。どちらのタイプも不採用は-1、面接に行かなければ利得0とする。
- 双葉は、高能力のアリスを採用すれば利得は+1、低能力なら-2とし、不採用の場合と面接に来ない場合は共に0である。



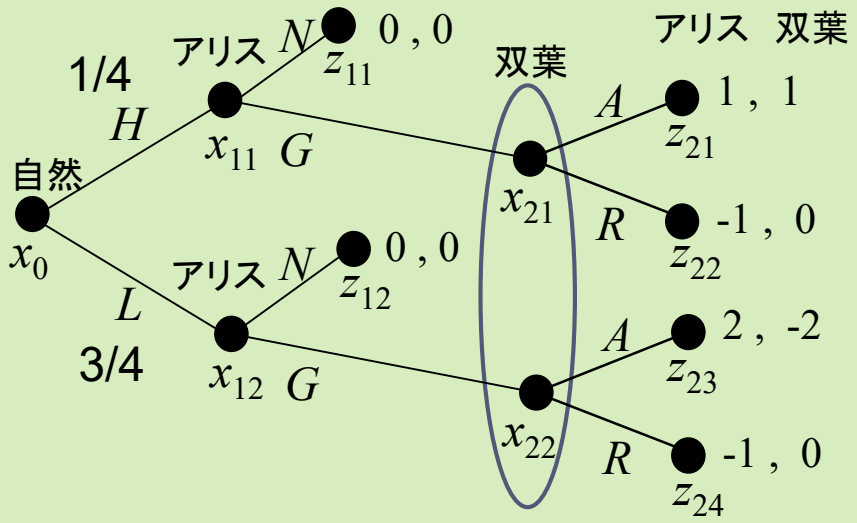
問題1：次の戦略に対して、双葉の情報集合hにおける整合的な信念を求めよ。信念を$\mu(x_{21}) = p,\ \mu(x_{22}) = 1 - p$とし、$p$の値で答えよ。

(戦略1) NG

(戦略2) GG

(戦略3) タイプHはGを選び、タイプLは確率5/6でNを、1/6でGを選ぶ

解答　アリスの採用面接



問題1：次の戦略に対して、双葉の情報集合hにおける整合的な信念を求めよ。信念を$\mu(x_{21}) = p,\ \mu(x_{22}) = 1 - p$とし、$p$の値で答えよ。

(戦略1) NG $p = 0$
(戦略2) GG $p = 1/4$

戦略3は計算する必要がある：
タイプHはGを選び、タイプLは確率5/6でNを、1/6でGを選ぶ

$$P(x_{21}) = \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4} = \frac{2}{8} \qquad P(x_{22}) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{8}$$

$$\mu(x_{21}) = P(x_{21}|h) = \frac{P(x_{21})}{P(h)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{2}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{2}{3} \qquad p = \frac{2}{3}$$

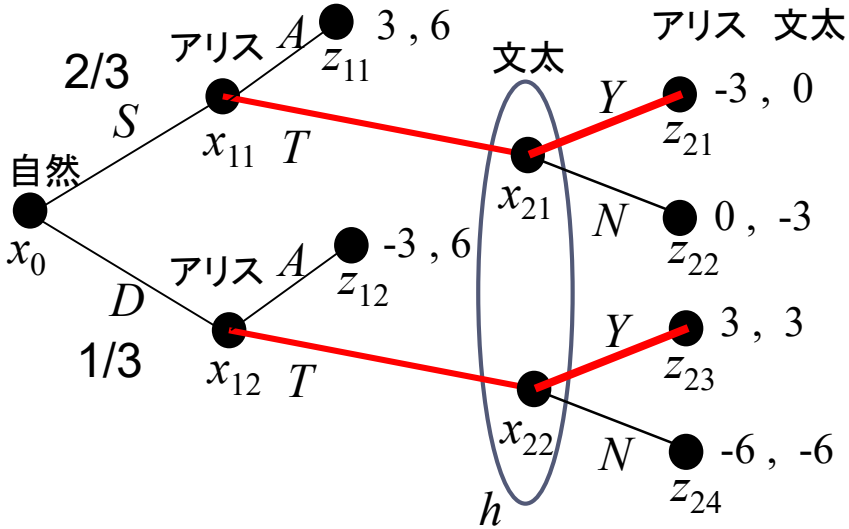
9.3 完全ベイズ均衡を求める

定義　完全ベイズ均衡

- 戦略の組と信念が完全ベイズ均衡であるとは，戦略の組と信念が以下の2つの条件を満たすことである．
- 条件1：すべての情報集合において，各プレイヤーの戦略は，その信念に対して最適反応戦略となっている．
- 条件2：すべての情報集合において，各プレイヤーの信念は，その戦略の組に対し整合的である．

- 不完備情報展開形ゲームの解は，完全ベイズ均衡であると考える．
- これまでの解との関係は，あとで．

完全ベイズ均衡かどうかを確かめる



完全ベイズ均衡か？

（例1）アリス:TT 文太:N
信念 $\mu(x_{21}) = 1$ $\mu(x_{22}) = 0$

（例1）は信念が整合的ではないからダメ

（例2）アリス:TT 文太:N
信念 $\mu(x_{21}) = 2/3$ $\mu(x_{22}) = 1/3$

信念は整合的

文太は最適反応戦略を選んでいるか？
文太の期待利得を調べる.
文太Yの期待利得:
$\mu(x_{21}) \times 0 + \mu(x_{22}) \times 3 = 1$
文太Nの期待利得:
$\mu(x_{21}) \times (-3) + \mu(x_{22}) \times (-6) = -4$

（例2）は文太は最適反応戦略を選んでないからダメ

（例3）アリス:TT 文太:Y
信念 $\mu(x_{21}) = 2/3$ $\mu(x_{22}) = 1/3$

信念は整合的
文太も最適反応戦略を選んでいる

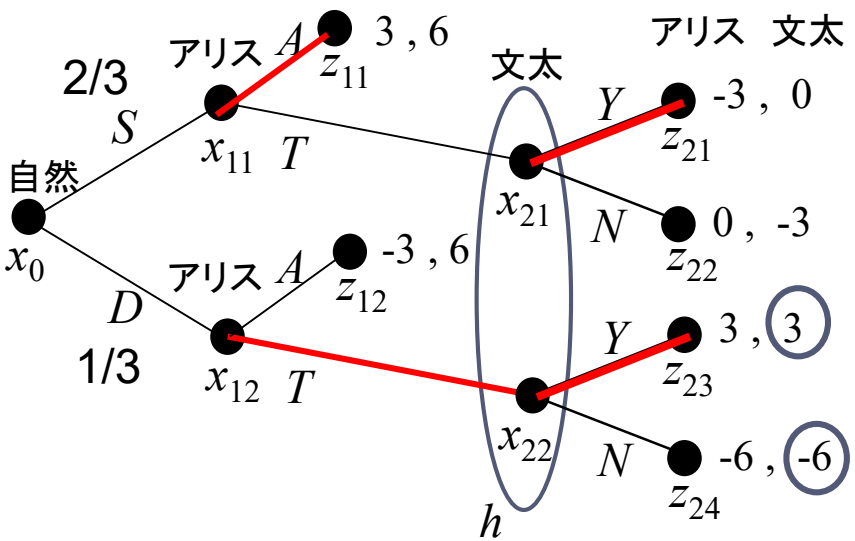
アリスは最適反応戦略か？

文太がYを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はAT

（例3）はアリスは最適反応戦略を選んでないからダメ

全部ダメじゃん！

完全ベイズ均衡かどうかを確かめる



完全ベイズ均衡か？

（例4）アリス：AT 文太：Y
信念　$\mu(x_{21}) = 0$　$\mu(x_{22}) = 1$

信念は整合的

$\mu(x_{22}) = 1$なので，期待値というよりx_{22}でYが良いか，Nが良いかを調べるだけ．

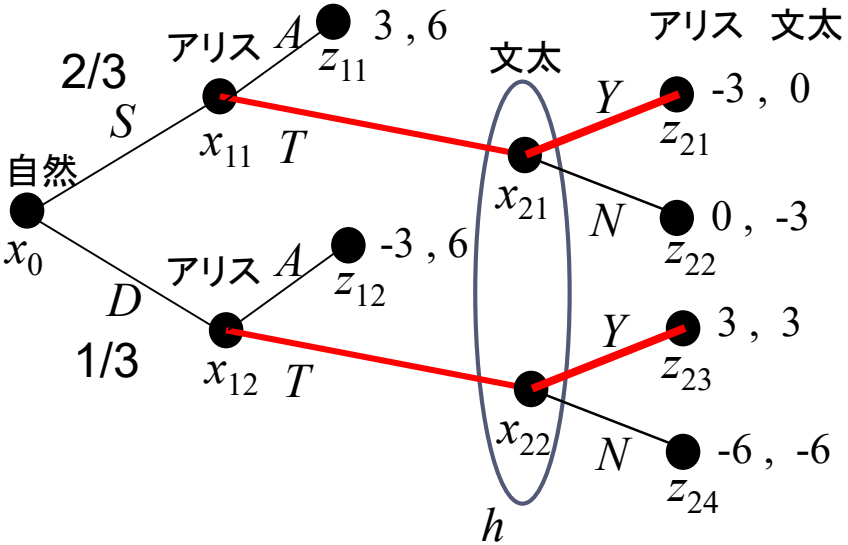
文太は最適反応戦略を選んでいるか？文太の期待利得を調べる．
文太Yの期待利得：$\mu(x_{21}) \times 0 + \mu(x_{22}) \times 3 = 3$
文太Nの期待利得：$\mu(x_{21}) \times (-3) + \mu(x_{22}) \times (-6) = -6$

信念は整合的，文太も最適反応戦略を選んでいる

アリスは最適反応戦略か？
文太がYを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はAT

（例4）は完全ベイズ均衡！

完全ベイズ均衡をどうやって求める？



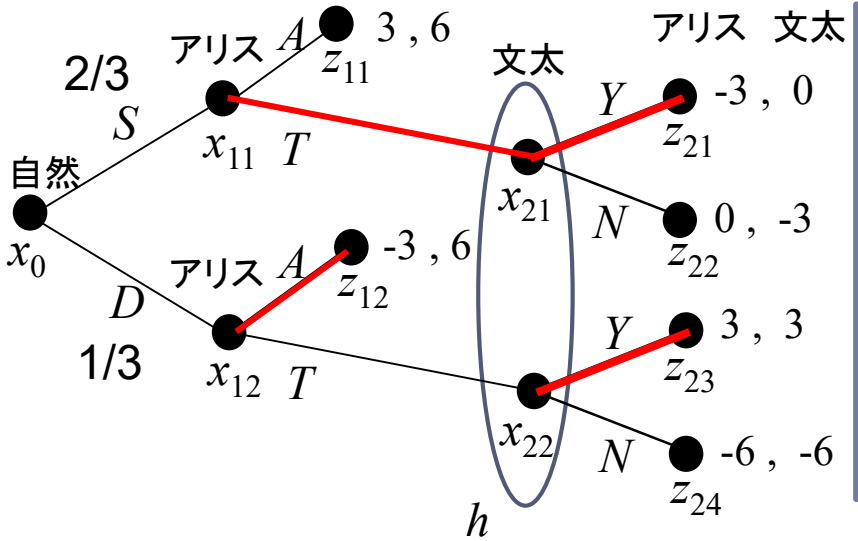
ある戦略の組と信念の組を完全ベイズ均衡か確かめる方法は分かった.
ではどうやって求める？

仮にアリスが◯◯を選ぶと仮定すると？
(1)整合的な文太のhでの信念を求める
(2)その信念に対する文太の最適反応戦略を求める
(3) その文太の最適反応戦略に対して，◯◯がアリスの最適反応戦略なら，それは完全ベイズ均衡

◯◯について，アリスのすべての戦略 TT，TA，AT，AA について調べれば，完全ベイズ均衡はすべて求められる（はず）

- 純粋戦略については．．．ね
- 混合戦略は求められない
- 純粋戦略の完全ベイズ均衡は存在しないこともある.
- 混合戦略まで考えれば，必ず存在する.

完全ベイズ均衡を求める #1



1)アリスの戦略 TT （確認済）
完全ベイズ均衡はなかった
2)アリスの戦略 AT （確認済）
整合的な信念　$\mu(x_{21}) = 0$　$\mu(x_{22}) = 1$
文太のμにおける最適反応戦略　Y
アリスの最適反応戦略はAT
したがって，
(AT, Y)と上記の信念μの組は完全ベイズ均衡

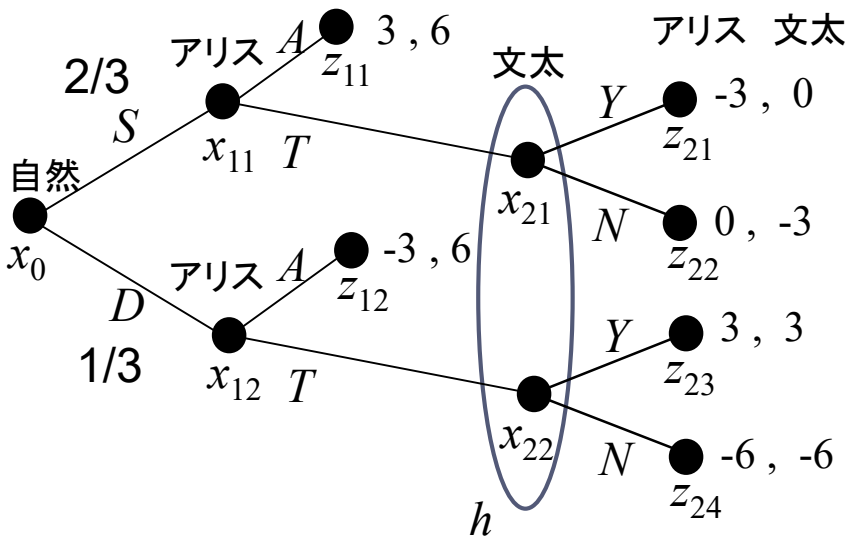
アリスの戦略がTAのとき

整合的な信念　$\mu(x_{21}) = 1$　$\mu(x_{22}) = 0$
文太Y の期待利得:0
文太N の期待利得:-3
文太の最適反応戦略 ⇒ Y

アリスは最適反応戦略か？
文太がYを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はAT

アリスの最適反応戦略はTAじゃないからダメ(アリスがTAを選ぶような完全ベイズ均衡はない)

完全ベイズ均衡を求める #2



1)アリスの戦略 TT （確認済）
完全ベイズ均衡はなかった
2)アリスの戦略 AT （確認済）
整合的な信念　$\mu(x_{21}) = 0$　$\mu(x_{22}) = 1$
文太のμにおける最適反応戦略　Y
アリスの最適反応戦略はAT
したがって，
(AT, Y)と上記の信念μの組は完全ベイズ均衡
3)アリスの戦略TA （確認済）
完全ベイズ均衡はなかった

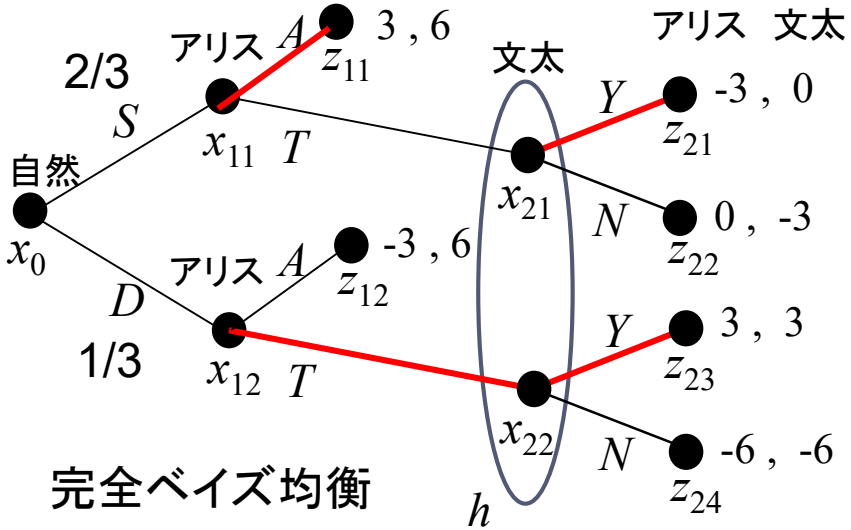
アリスの戦略がAAのとき

このときは，どんな信念も整合的⇒そこで　$\mu(x_{21}) = p$　$\mu(x_{22}) = 1 - p$ とおく
文太Y の期待利得：$\mu(x_{21}) \times 0 + \mu(x_{22}) \times 3 = 3 - 3p$
文太N の期待利得：$\mu(x_{21}) \times (-3) + \mu(x_{22}) \times (-6) = -6 + 3p$
$-6 + 3p \leq -3$　$0 \leq 3 - 3p$ なので$-6 + 3p < 3 - 3p$
どんな信念でも，文太の最適反応戦略は Y

アリスは最適反応戦略か？
文太がYを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はAT
アリスの最適反応戦略はAAじゃないからダメ
（アリスがAAを選ぶような完全ベイズ均衡はない）

通常はpの値により，選択が変わるので，それぞれの場合を分けて考える

完全ベイズ均衡　まとめ



アリスの戦略が $TT,\ TA,\ AA$ となるような完全ベイズ均衡はない

完全ベイズ均衡は
アリスの戦略 AT　文太の戦略　Y と

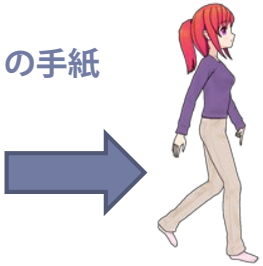
$$\mu(x_{21}) = 0 \quad \mu(x_{22}) = 1$$

の信念の組

完全ベイズ均衡

和尚から1人で来るように言われた場合
タイプS

和尚からの手紙



アリスは1人で寺へ
（Aを選択）

$\mu(x_{22}) = 1$

もともとタイプD
である確率は
1/3であるのに

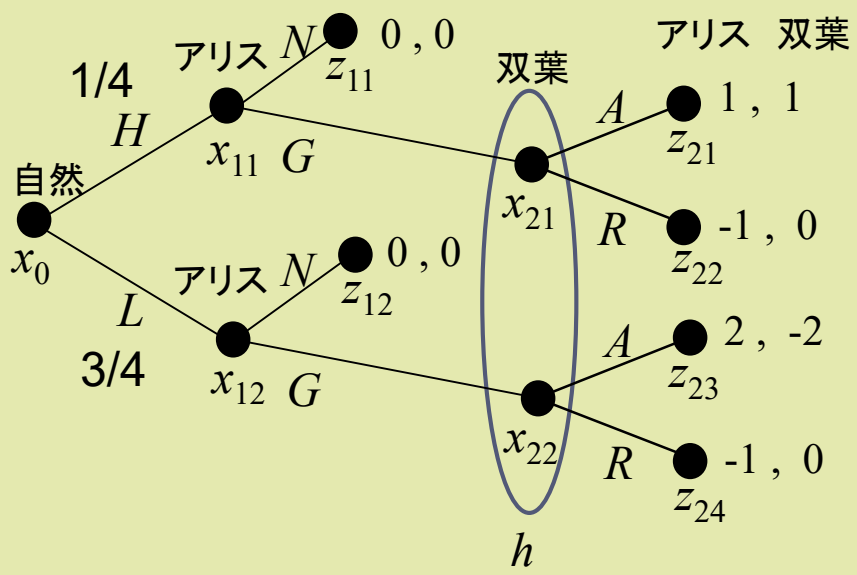
和尚から2人で来るように言われた場合
タイプD

アリスは文太を誘う
（Tを選択）

文太は一緒に行くと
答える（Yを選択）

文太は誘って
きたアリスは
100%タイプD
たと推測する

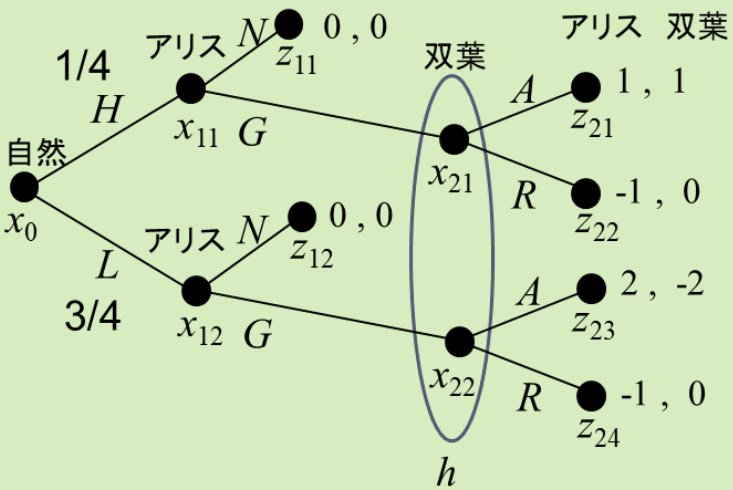
演習　アリスの採用面接:完全ベイズ均衡



左のゲームに対し、双葉の情報集合hにおける信念を$\mu(x_{21}) = p$, $\mu(x_{22}) = 1 - p$とする。

問題2:pの値で、双葉の最適反応戦略が A と R になるときを場合を分けよ。
問題3:アリスの戦略がGG、NG、GNのときは完全ベイズ均衡がないことを確かめよ。
問題4:アリスの戦略がNNとなるときを考える。双葉の最適反応戦略がAとRになるときで場合分けして、完全ベイズ均衡があるかどうか確かめよ(ある場合は整合的な信念は範囲になる)。

解答　アリスの採用面接



双葉の信念:
$\mu(x_{21}) = p,\ \mu(x_{22}) = 1 - p$とする。
問題2:
双葉A の期待利得: $p - 2(1-p) = 3p - 2$
双葉R の期待利得: $p \times 0 + (1-p) \times 0 = 0$

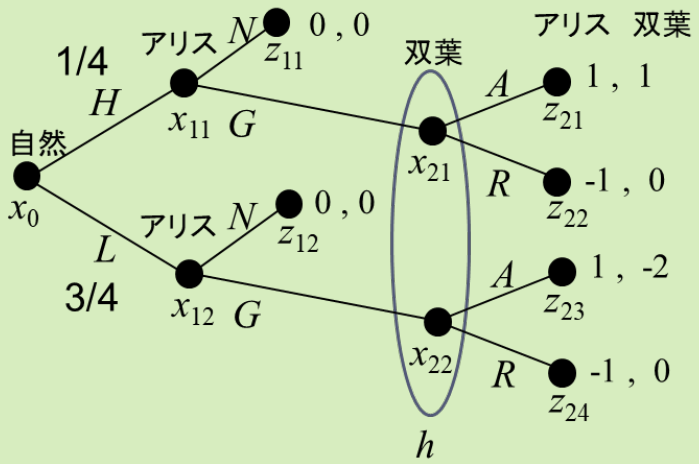
$3p - 2 \geq 0 \ \Leftrightarrow$
$p \geq 2/3$ のとき Aが最適反応戦略
（ $p \leq 2/3$ のとき Rが最適反応戦略）

問題3:
1)アリスの戦略 GG　整合的な信念 $p = 1/4 \Rightarrow R$が双葉の最適反応戦略
双葉がRを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はNN　完全ベイズ均衡ではない

2)アリスの戦略 GN　整合的な信念 $p = 1 \Rightarrow A$が双葉の最適反応戦略
双葉がAを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はGG　完全ベイズ均衡ではない

3)アリスの戦略 NG　整合的な信念 $p = 0 \Rightarrow R$が双葉の最適反応戦略
双葉がRを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はNN　完全ベイズ均衡ではない

解答　アリスの採用面接



双葉の信念:
$\mu(x_{21}) = p,\ \mu(x_{22}) = 1 - p$とする。

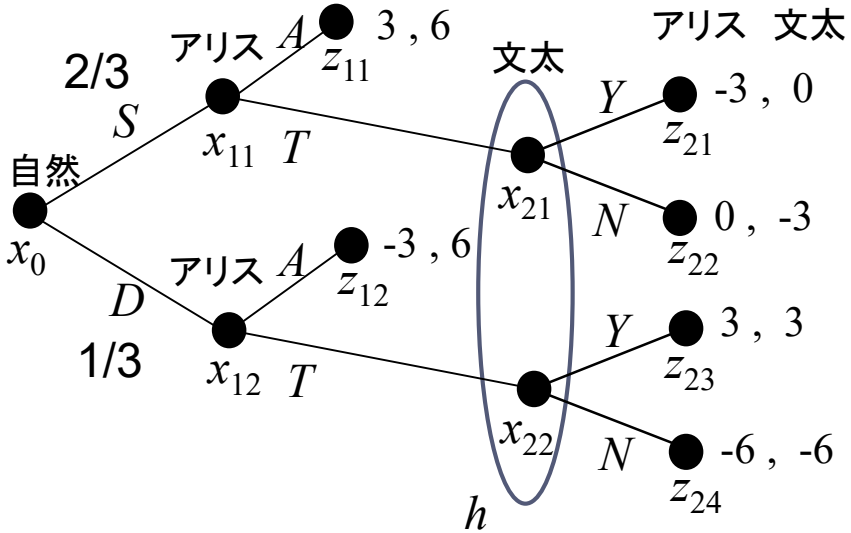
双葉A の期待利得: $p - 2(1-p) = 3p - 2$
双葉R の期待利得: $p \times 0 + (1-p) \times 0 = 0$
$3p - 2 \geq 0 \ \Leftrightarrow$
$p \geq 2/3$ のとき Aが最適反応戦略
（ $p \leq 2/3$ のとき Rが最適反応戦略）

問題4:
4)アリスの戦略 NN　どんな信念も整合的になる。

$p \geq 2/3$ のとき Aが双葉の最適反応戦略
双葉がAを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はGG　完全ベイズ均衡ではない
$p \leq 2/3$ のとき Rが双葉の最適反応戦略
双葉がRを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はNN　完全ベイズ均衡！

完全ベイズ均衡;
アリスの戦略 NN　双葉の戦略 R
信念 $0 \leq p \leq 2/3$

ナッシュ均衡との関係



アリス＼文太	Y	N
AA	(1 , 6)	(1 , 6)
AT	(3 , 5)	(0 , 2)
TA	(-3 , 2)	(-1 , 0)
TT	(-1 , 1)	(-2 ,-4)

すべての展開形ゲームは，戦略形ゲームに変換できる．不確実性のある展開形ゲームで学んだように，このゲームも戦略形ゲームに変換できる．

- このゲームを戦略形ゲームに変換すると，そのナッシュ均衡は(AA,N)と(AT,Y)
- 完全ベイズ均衡は(AT,Y)
- 文太は情報集合hでは，*Nを選ばないと考えられるので，*（AA,N)は悪いナッシュ均衡であり，完全ベイズ均衡(AT,Y)を解と考えるべき．
- 完全ベイズ均衡はナッシュ均衡の精緻化になっている．
- このゲームは部分ゲームがないので，部分ゲーム完全均衡もナッシュ均衡と同じ(AA,N)と(AT,Y)
- 今回の場合，完全ベイズ均衡は部分ゲーム完全均衡で精緻化できない解を選んでいる(部分ゲーム完全均衡より優れている)
- しかし部分ゲーム完全均衡が完全ベイズ均衡より良い場合もある．

ナッシュ均衡の精緻化

- 部分ゲーム完全均衡と完全ベイズ均衡だと優劣は必ずしもつけられない
- さらに完全ベイズ均衡を精緻化した逐次均衡（sequential equilibrium)と呼ばれる均衡概念がある.（最高峰とされる？）
  - これは部分ゲーム完全均衡や完全ベイズ均衡を精緻化していて，優れた解になっている.
  - しかし難しいので，ここではやりません！
  - 現実的には部分ゲーム完全均衡と完全ベイズ均衡を駆使すれば，ほとんどの場合十分（個人的感想）
- 戦略形ゲームの解の精緻化も，完全均衡(perfect equilibrium , Selten 1975)，強完全均衡(strictly perfect equilibrium, Okada 1981)などがある．個人的な感想では強完全均衡がもっともシンプルで使いやすく，もっとも精緻である.（数学的には存在しないことがあるが，現実的にはほとんど存在する）

まとめ　不完備情報の展開形ゲーム

- 不完備情報展開形ゲームの解は，完全ベイズ均衡で考える.
- 完全ベイズ均衡は，以下を満たす戦略の組と信念の組
  - 信念は，ベイズルールに整合的
  - 戦略は，信念のもとで最適反応戦略（期待利得を最大化）となっている
- 完全ベイズ均衡はナッシュ均衡の精緻化となっている
- 不完備情報展開形ゲームの解として，さらに良い解として逐次均衡

9.4 シグナリングゲーム

シグナリング・ゲーム

- 不完備情報展開形ゲームの最も典型的な例
- プレイヤーは先手（送り手、Sender）と後手（受け手、Receiver）

1. 先手の状態（タイプ）が確率的に決まる
2. 先手は状態（タイプ）を知った上で（私的情報）、先に行動（シグナルやメッセージと呼ばれる）を選ぶ
3. 後手は状態を知らず、先手の行動（シグナル）を見て状態を推測し行動を選ぶ
4. ２人の行動により利得が決まる

シグナリングの例

- 教育のシグナリング理論（例：大学は、本人の能力を高めるのではなく（だけではなく）、学歴によって本人の能力を示すためにある）、Spence(1973)
- 就活における資格試験のシグナリング
- 企業の情報開示とシグナリング（情報開示している企業は、それができるだけの業績がある）etc...

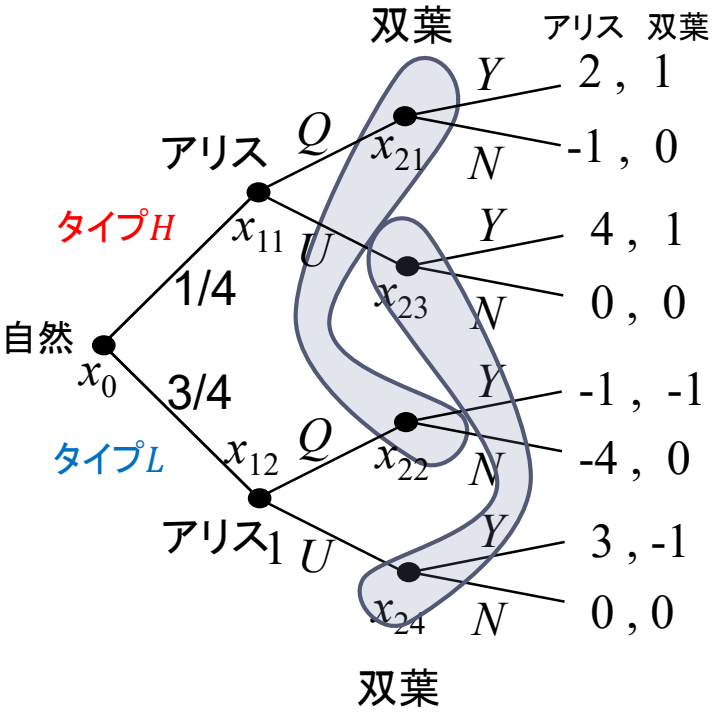
モデル　資格の役割

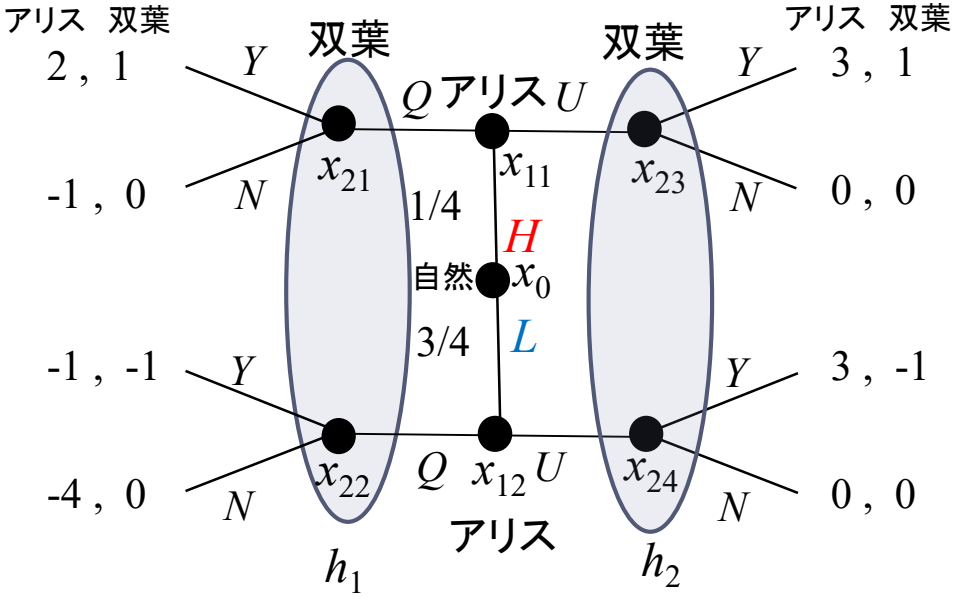
- 坐禅道場「双葉」は「座禅インストラクター」を募集、これにアリスが応募。
- アリスは、1/4の確率で高能力（タイプH）、3/4で低能力（タイプL)。アリスは自分の能力を知っている。双葉は分からない。
- アリスは座禅検定の資格を取得するか（Q: Qualified）、取得しないか（U:Unqualified）を決める。
- 双葉はアリスの能力を知らないが、資格の有無は観察でき、それを参考にして採用する（Y : Yes)か採用しない（N : No）を決める。
- 双葉の利得
  - 高能力を採用すれば+1，低能力を採用すると利得は-1、採用しない場合は0である
- アリスの利得
  - 採用されれば利得は3，されなければ0
  - 座禅検定の資格を取るには費用がかかる。費用は、高能力であれば1、低能力であれば4

ゲームの木

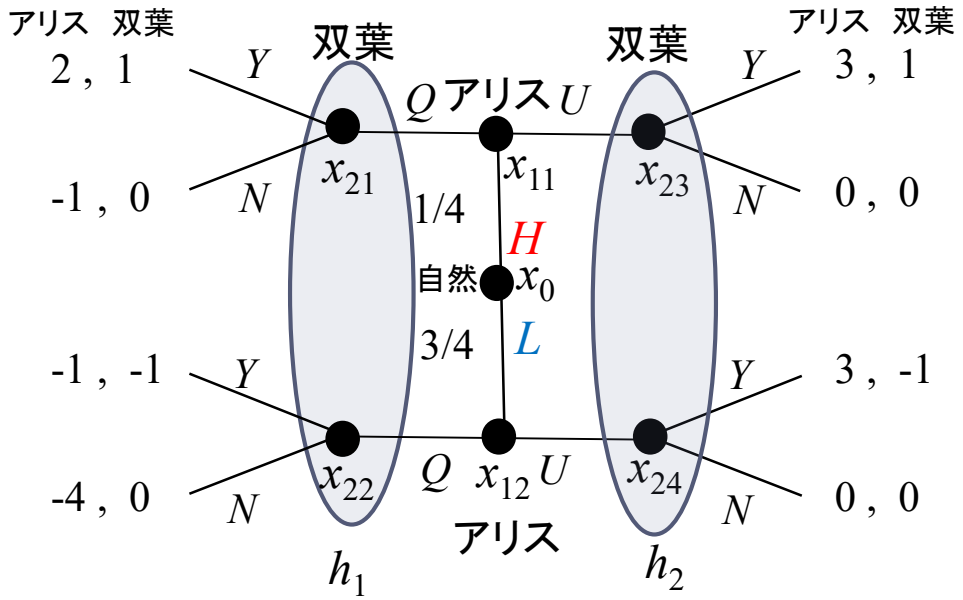
今までの書き方では
下図のようになるが…

見にくいので下のように書くことが多い





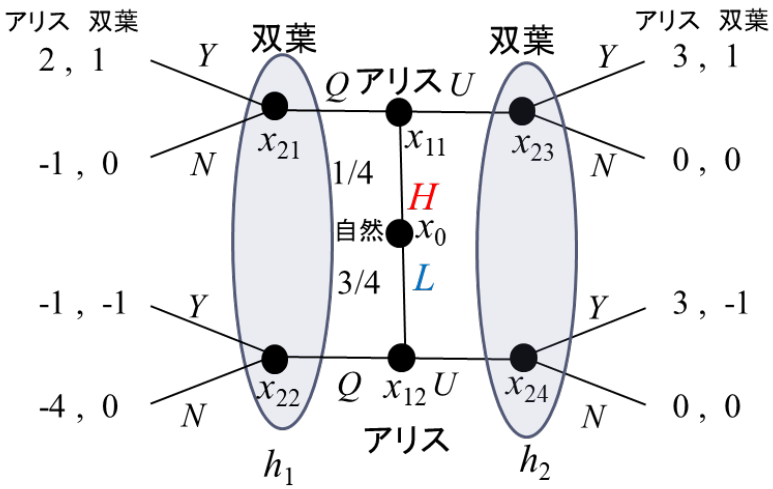
今回のゲームの特徴



- 双葉はタイプHのアリスは採用した方が良く、タイプLのアリスは採用しないほうが良い
- タイプHのアリスは、資格を取らないで採用されない(0)よりは、資格を取って採用してもらう(2)ほうが良い
- タイプLのアリスは、資格を取って採用される(-1)よりは、採用されなくても資格を取らない(0)ほうが良い
- タイプHとLの事前確率は1/4と3/4

シグナリングゲームと不完備情報ゲームのイメージ

- 既に振られたサイコロ。
- 偶数なら1万円もらい、奇数なら1万円払う、賭けに、参加する(Y)かしないか(N)？
- 既に出ている目は決まっている。しかし偶数の場合と奇数の場合を考えて、意思決定しなければならない

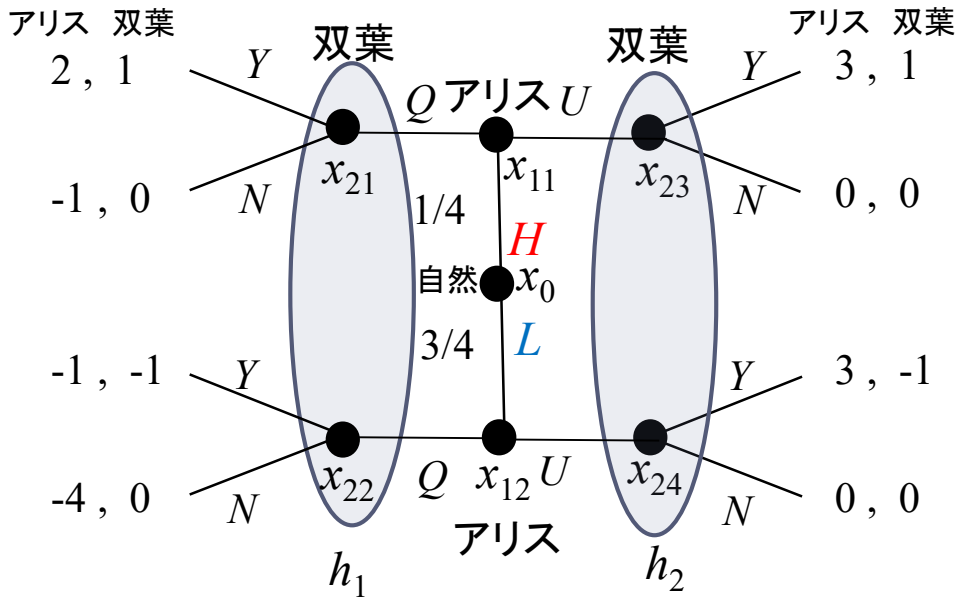


- アリスは、タイプHかタイプLかのどちらか。２人いるわけではない
- 双葉は、各タイプのアリスが、どのように行動するか想定しなければ、行動を決められない。
- タイプが決まっているアリスは、双葉の意思決定を予想しなければ行動できない。つまり、双葉の頭の中にいる、自分とは違うタイプのアリスを想像しなければならない。

シグナリングゲームの均衡を求める

分離均衡・一括均衡

完全ベイズ均衡を求める：手順

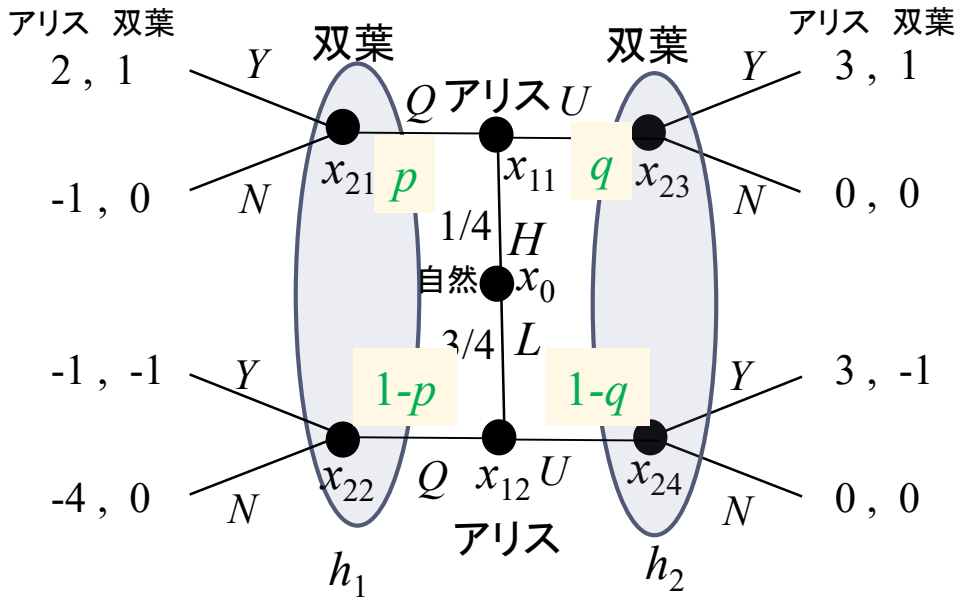


アリスの戦略：
タイプH、Lの選択を左と右に書き、
QQ, QU, UQ, UU とする。
双葉の戦略：
h_1, h_2でのの選択を左と右に書き、YY, YN, NY, NN とする。

アリスが戦略◯◯を選ぶと仮定する：
(1) h_1, h_2での整合的な双葉の信念を求める
(2)その信念に対する双葉の最適反応戦略を求める
(3) その双葉の最適反応戦略に対して，◯◯がアリスの最適反応戦略なら，完全ベイズ均衡

ここで(2)と(3)は同じような計算を繰り返すため、双葉がどのような信念を持てば、どの戦略が最適反応戦略になるかをあらかじめ計算しておく

双葉の最適反応戦略を計算しておく



双葉の信念を
$\mu(x_{21}) = p \quad (\mu(x_{22}) = 1 - p)$
$\mu(x_{23}) = q \quad (\mu(x_{24}) = 1 - q)$
とする。

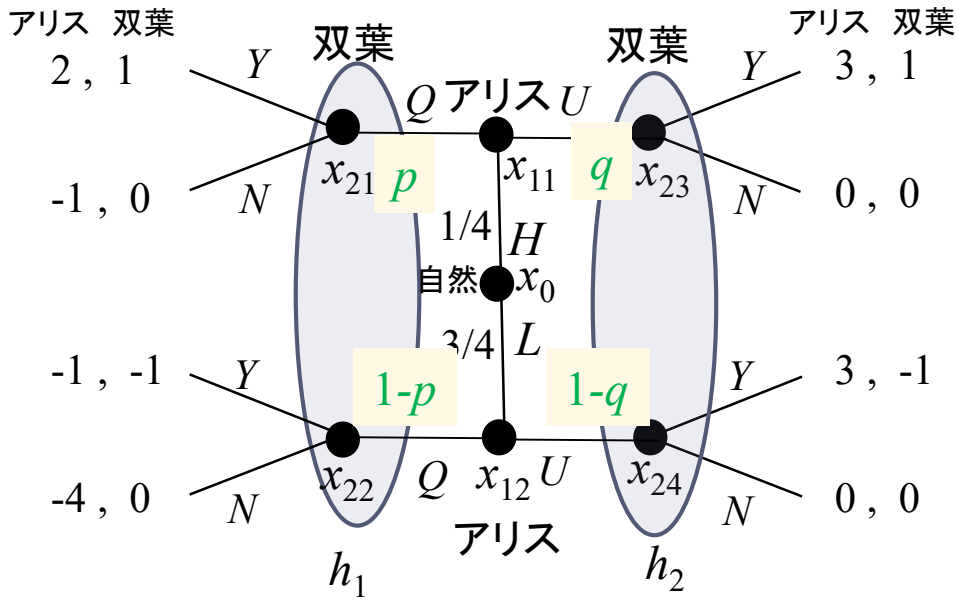
双葉の最適反応戦略

h_1 \ h_2	$0 \le q \le 1/2$	$1/2 \le q \le 1$
$0 \le p \le 1/2$	NN	NY
$1/2 \le p \le 1$	YN	YY

h_1における双葉の最適反応戦略
双葉Y の期待利得: $\mu(x_{21}) \times 1 + \mu(x_{22}) \times (-1) = p - (1 - p) = 2p - 1$
双葉N の期待利得: $\mu(x_{21}) \times 0 + \mu(x_{22}) \times 0 = 0$
$2p - 1 \ge 0$なら双葉の最適反応戦略はY $(2p - 1 \le 0$なら$N)$
$p \ge 1/2$ならY $p \le 1/2$ならN

h_2における双葉の最適反応戦略
双葉Y の期待利得: $\mu(x_{21}) \times 1 + \mu(x_{22}) \times (-1) = p - (1 - p) = 2q - 1$
双葉N の期待利得: $\mu(x_{21}) \times 0 + \mu(x_{22}) \times 0 = 0$
$2q - 1 \ge 0$なら双葉の最適反応戦略はY $(2q - 1 \le 0$なら$N)$
$q \ge 1/2$ならY $q \le 1/2$ならN

完全ベイズ均衡を求める #1



双葉の信念を
$\mu(x_{21}) = p \quad (\mu(x_{22}) = 1 - p)$
$\mu(x_{23}) = q \quad (\mu(x_{24}) = 1 - q)$
とする。

双葉の最適反応戦略

h_1 \ h_2	$0 \le q \le 1/2$	$1/2 \le q \le 1$
$0 \le p \le 1/2$	NN	NY
$1/2 \le p \le 1$	YN	YY

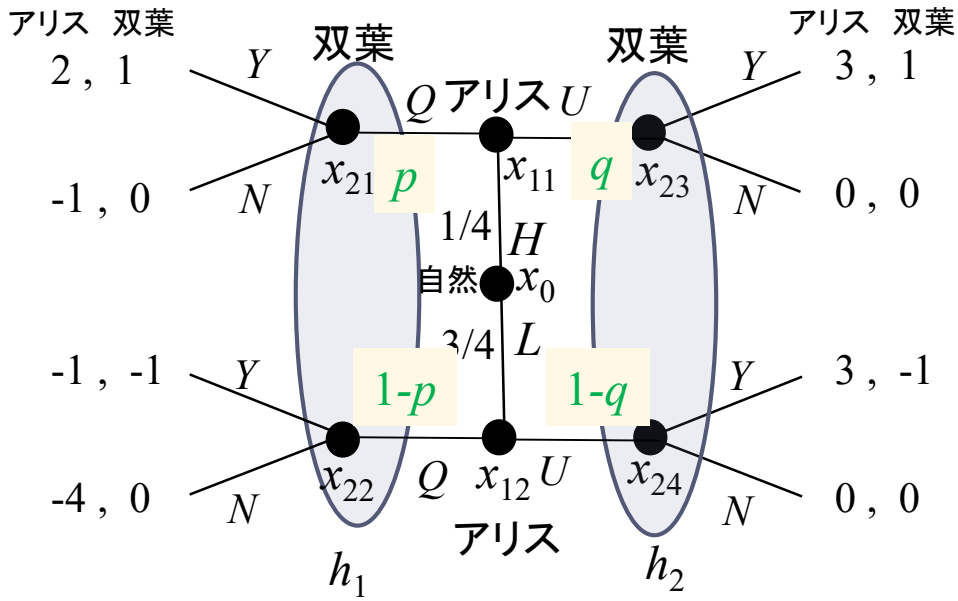
(1)アリスの戦略がQUのとき
双葉の整合的な信念: $p = 1 \quad q = 0$
表より、双葉の最適反応戦略はYN
このときアリスの最適反応戦略はQU
⇒**完全ベイズ均衡**

(2)アリスの戦略がUQのとき
双葉の整合的な信念: $p = 0 \quad q = 1$
表より、双葉の最適反応戦略はNY
このときアリスの最適反応戦略はUU
⇒完全ベイズ均衡にはならない

(3)アリスの戦略がQQのとき
双葉の整合的な信念: $p = 1/4$
qは何でも良い
双葉の最適反応戦略NNかNY

NNのときアリスの最適反応戦略はUU
⇒完全ベイズ均衡にはならい
NYのときアリスの最適反応戦略はUU
⇒完全ベイズ均衡にはならない

完全ベイズ均衡を求める #2



双葉の信念を
$\mu(x_{21}) = p \quad (\mu(x_{22}) = 1 - p)$
$\mu(x_{23}) = q \quad (\mu(x_{24}) = 1 - q)$
とする。

双葉の最適反応戦略

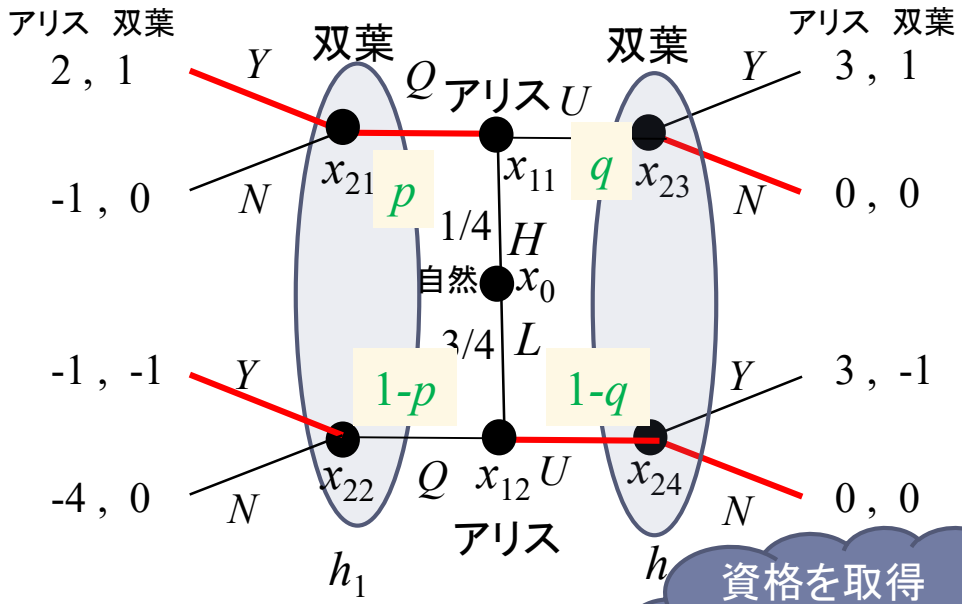
h_1 \ h_2	$0 \le q \le 1/2$	$1/2 \le q \le 1$
$0 \le p \le 1/2$	NN	NY
$1/2 \le p \le 1$	YN	YY

(4)アリスの戦略がUUのとき
双葉の整合的な信念： $q = 1/4$
pは何でも良い
双葉の最適反応戦略NNかYN

NNのときアリスの最適反応戦略はUUとなる
⇒完全ベイズ均衡
なおこのとき整合的な信念は$0 \le p \le 1/2$
でなければならない。

YNのときアリスの最適反応戦略QU
⇒完全ベイズ均衡にはならない

完全ベイズ均衡：均衡1　分離均衡



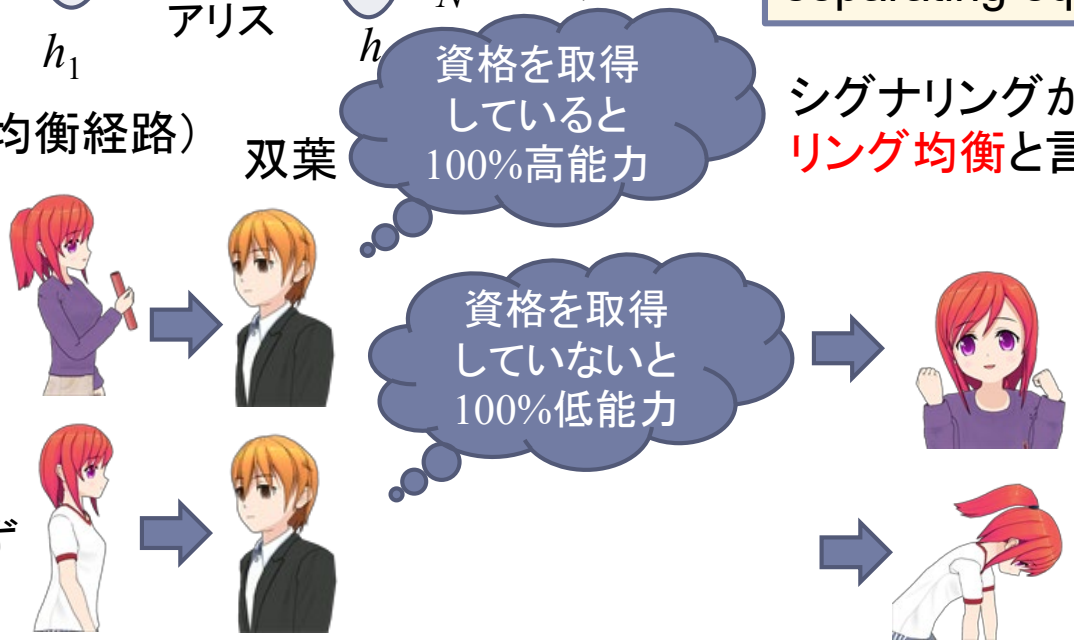
完全ベイズ均衡まとめ

均衡1：アリスの戦略：QU
双葉の戦略：YN
信念：　$p = 1$　　$q = 0$

後手は、先手の行動を見ると、先手のタイプが完全に分かる。このような均衡を分離均衡 separating equilibrium と言う

シグナリングがうまく機能⇒シグナリング均衡と言うときもある

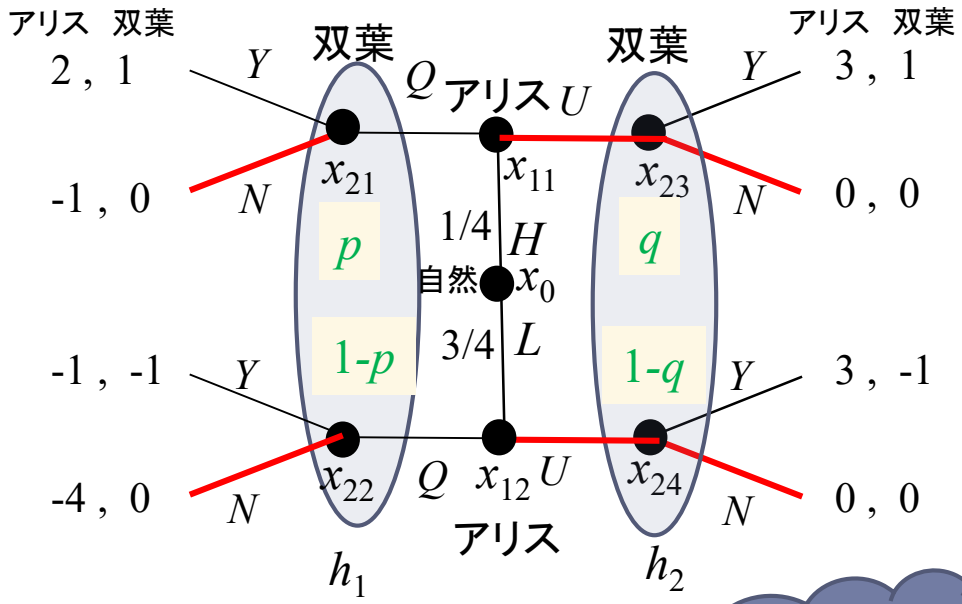
均衡1の結果（均衡経路）



高能力のとき
資格を取得

低能力のとき
資格を取得せず

完全ベイズ均衡：均衡2　一括均衡



完全ベイズ均衡まとめ

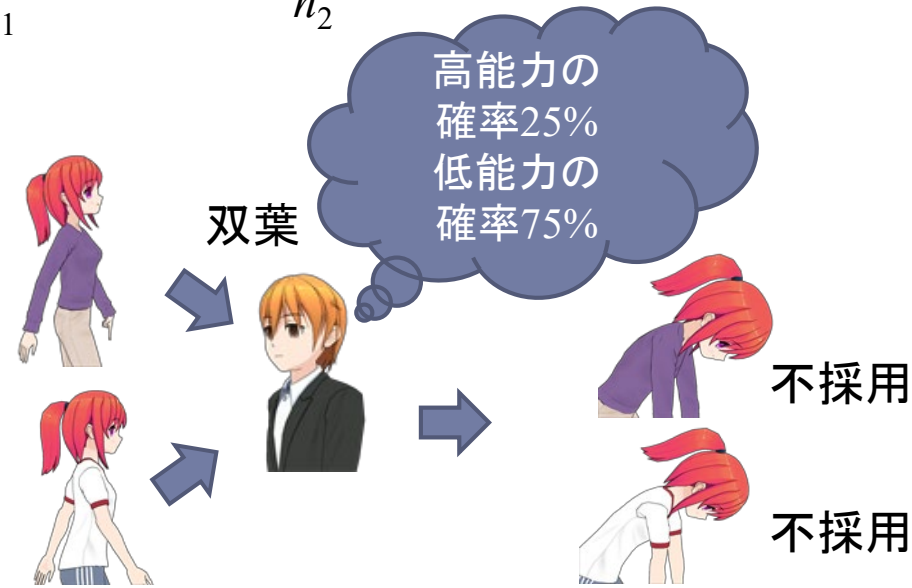
均衡2：アリスの戦略：UU
双葉の戦略：NN
信念：$0 \leq p \leq 1/2$　　$q = 1/4$

後手は、先手の行動からは、
先手のタイプは分からない。
このような均衡を一括均衡
pooling equilibrium と言う

均衡2の結果

高能力のとき
資格を取得せず

低能力のとき
資格を取得せず



定義　分離均衡・一括均衡

- シグナリングゲームにおいて
  - タイプごとに異なる行動を選ぶ均衡を分離均衡と呼ぶ
  - すべてのタイプが同じ行動を選ぶ均衡を一括均衡と呼ぶ

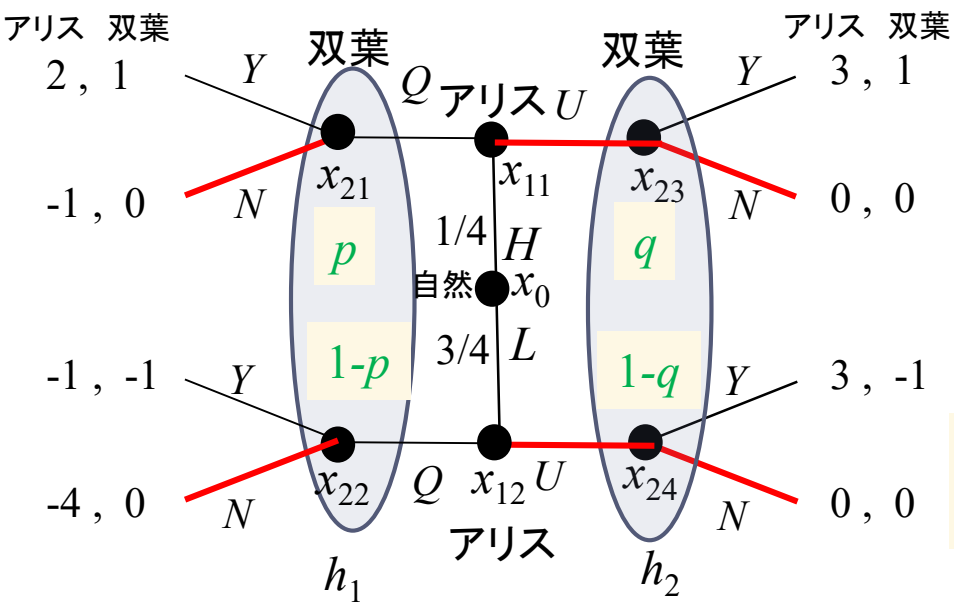
- 分離均衡はシグナリング均衡と言われるときもある。
- 分離均衡では、後手は行動を見て相手のタイプ（情報）を完全に推測することができる。シグナリングが機能している。
- 一括均衡では、後手は行動を見て相手のタイプ（情報）を完全に推測できない。（事前確率で判断）
- 混合戦略まで考えると、あるタイプが混合戦略を選ぶことがあるこれを混成均衡(hybrid equilibrium)と呼ぶ

シグナリングゲーム－直観的基準

直観的基準:”悪い”一括均衡を除く

- 先のモデルでは、分離均衡と一括均衡の2つの均衡があった
- しかし、この一括均衡(均衡2)には問題がある

均衡2:アリスの戦略:UU
双葉の戦略:NN
信念:$0 \leq p \leq 1/2 \quad q = 1/4$



- 両プレイヤーが、上記の均衡を予測するならば情報集合h_1は起きない(どちらの能力であっても資格を取得してくることはないはず)
- したがって信念は何であっても整合的

どちらの能力のアリスも、この予測に本当に従うだろうか?

- 低能力のアリスが、この予測から逸脱し、Qを選んだとする。
- 双葉は予測と違うことが起きたので、もはや均衡2のように予測しないかもしれないが
- そうだとして、双葉がh_1でYとNのどちらを選んでも、アリスはQに逸脱するより(利得は-1か-4)、Uの方が(利得は0)良い⇒低能力のアリスは決してQに逸脱しないと分かる
- そうすると情報集合h_1が起きる(資格を取得してくる人がいたら)、それは高能力のアリスでしかありえない。つまり信念は$p = 1$と考えるべきで、双葉はYを選ぶ。
- 高能力のアリスは、上記を推測するとQではなくUを選ぶ方(逸脱する)が良い

定義　直観的基準

先手のタイプが2つのみのシグナリングゲームの一括均衡において、両タイプが選ばない行動をa、aを選んだときに実現する情報集合をhとする

(1) 情報集合hにおいて、後手はどれかの信念で最適反応戦略となりうる行動を選ぶと仮定（どんな信念にも最適反応戦略とならない行動は選ばないとする）

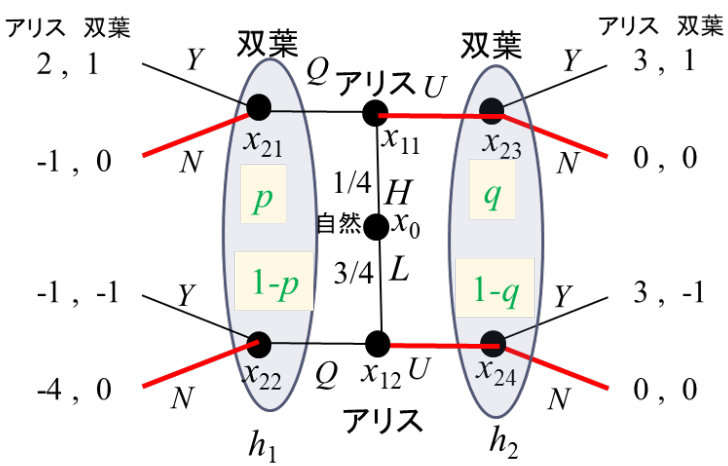
(2) 先手の一方のタイプは、後手が(1)のどの戦略を選んだとしても、一括均衡の行動を選んでいたほうが利得が高い

(3) 先手のもう一方のタイプは、後手が情報集合hにおいて、そのタイプがaを選んだという信念を確率1で持つときの最適反応を選ぶとしたときに、一括均衡の行動を選ぶよりもaを選んだ（逸脱した）方が利得が高くなる

このとき、その一括均衡は直観的基準を満たさないと呼ぶ。

- Cho and Kreps (1987)
- タイプが3つ以上の場合の定義は複雑
- 直観的基準を満たす完全ベイズ均衡は（混合戦略まで含めると）必ず存在

確認：均衡2は直観的基準を満たさない



均衡の問題：起こり得ない情報集合の信念をどのように持つか？という点にある。$0 \le p \le 1/2$ という信念は適切な信念ではなかった

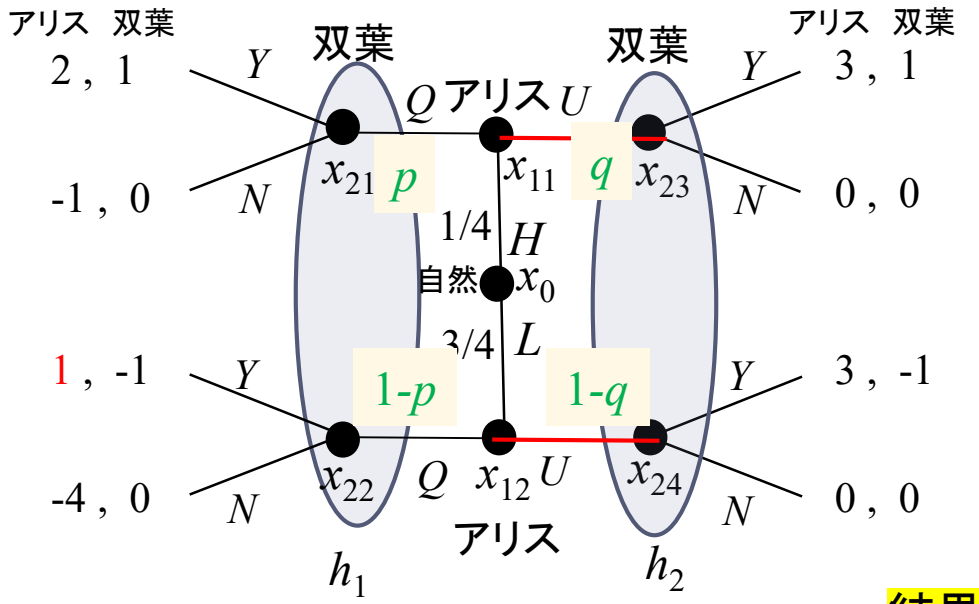
均衡2：アリスの戦略：UU　双葉の戦略：NN
信念：$0 \le p \le 1/2$　　$q = 1/4$

両タイプが選ばない行動Q　その情報集合h_1
(1)　h_1で双葉はYもNも最適反応として選びうる
(2)　低能力のアリスは、双葉がYとNのどちらを選んでも、一括均衡の戦略Uの方が良い
(3)　高能力のアリスは、双葉が（$\mu(x_{21}) = 1$であるとしてその最適反応戦略である）Yを選ぶなら、UよりQを選んだほうが良い
⇒一括均衡（均衡2）は直観的基準を満たさない

直観的基準を満たす完全ベイズ均衡は以下の分離均衡だけ

均衡1：アリスの戦略：QU
双葉の戦略：YN
信念：　$p = 1$　　$q = 0$

シグナリングゲーム:条件の変化　PART1



資格取得の費用の変化

低能力のアリスの資格取得費用を4から2に変えてみると？

↓

タイプLのアリス

「資格を取らないで採用されない(0)より資格を取って採用してもらう(1)ほうが良い」に状況が変わる

このとき均衡は、以下の組だけ

均衡:アリスの戦略:UU

双葉の戦略:NN

信念:$0 \leq p \leq 1/2$　　$q = 1/4$

分離均衡はない

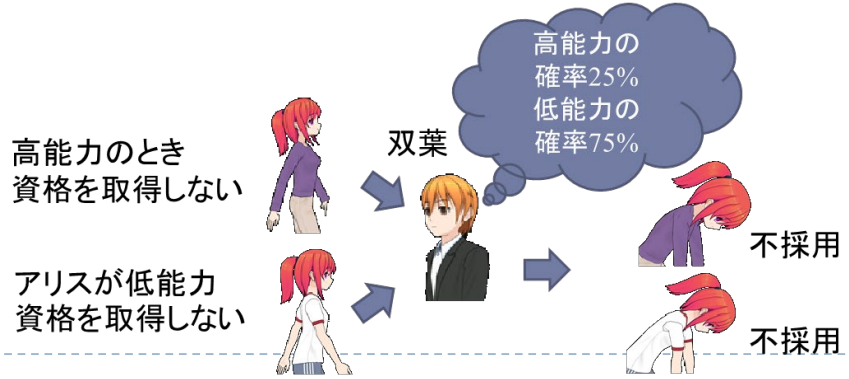
一括均衡は直観的基準を満たす

※低能力タイプは、今回はQに逸脱することがありうる。

結果

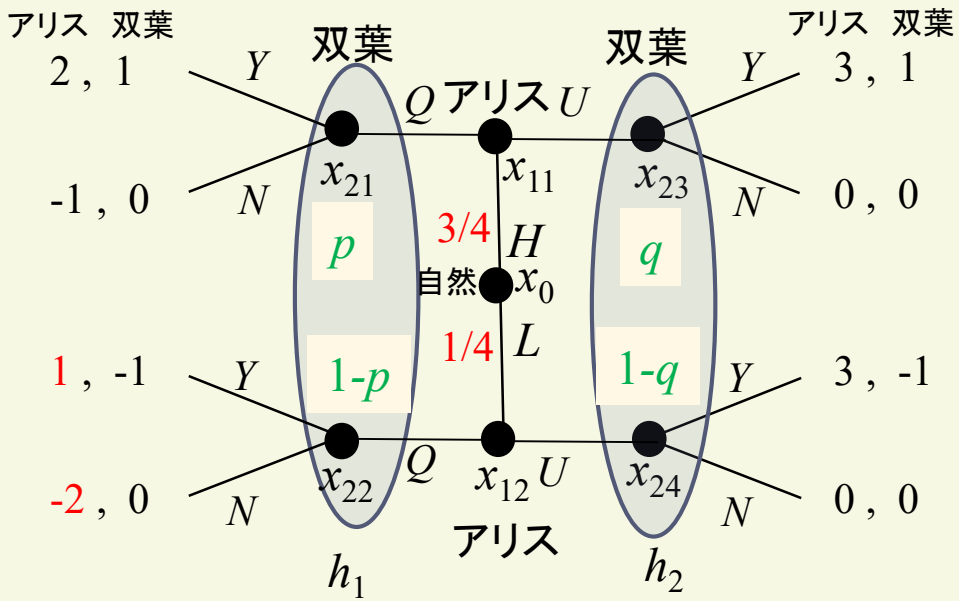
どちらのタイプも資格を取らず、不採用になる

⇒低能力タイプが、簡単に資格を取れる(費用が低い)とシグナリングはうまく働かない。



演習★ シグナリングゲーム：条件の変化 PART2

■ 演習5.2



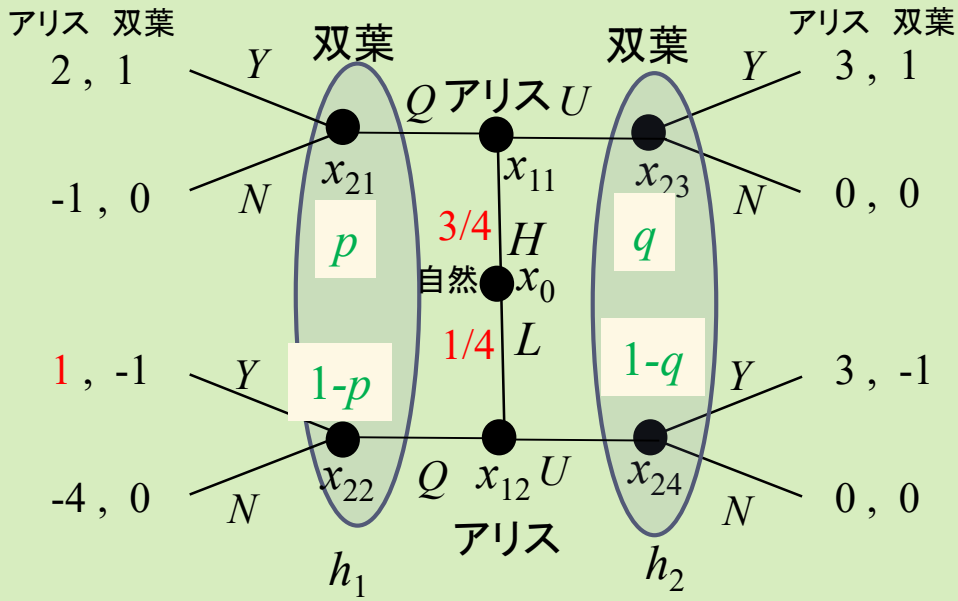
資格取得の費用の変化
＋事前確率の変化

低能力のアリスの資格取得費用を4から2に変える
＋事前確率を高能力3/4、低能力1/4に変える

このとき
問題1：完全ベイズ均衡をすべて求め、そのときの均衡経路（結果）を示せ
問題2：直観的基準を満たす完全ベイズ均衡を求め、そのときの均衡経路（結果）を示せ

ヒント：(1)双葉の利得は変わっていない
⇒信念が与えられたときの双葉の最適反応戦略は変化しないので、それを使うと良い
（各戦略に関する）整合的な信念は変化するので、そこに注意する
(2)複数の（たくさんの）直観的基準を満たす均衡がある（これまでと違う）

解答　シグナリングゲーム：条件の変化PART2



双葉の信念を
$\mu(x_{21}) = p \quad (\mu(x_{22}) = 1 - p)$
$\mu(x_{23}) = q \quad (\mu(x_{24}) = 1 - q)$
とする。

双葉の最適反応戦略

h_1 \ h_2	$0 \le q \le 1/2$	$1/2 \le q \le 1$
$0 \le p \le 1/2$	NN	NY
$1/2 \le p \le 1$	YN	YY

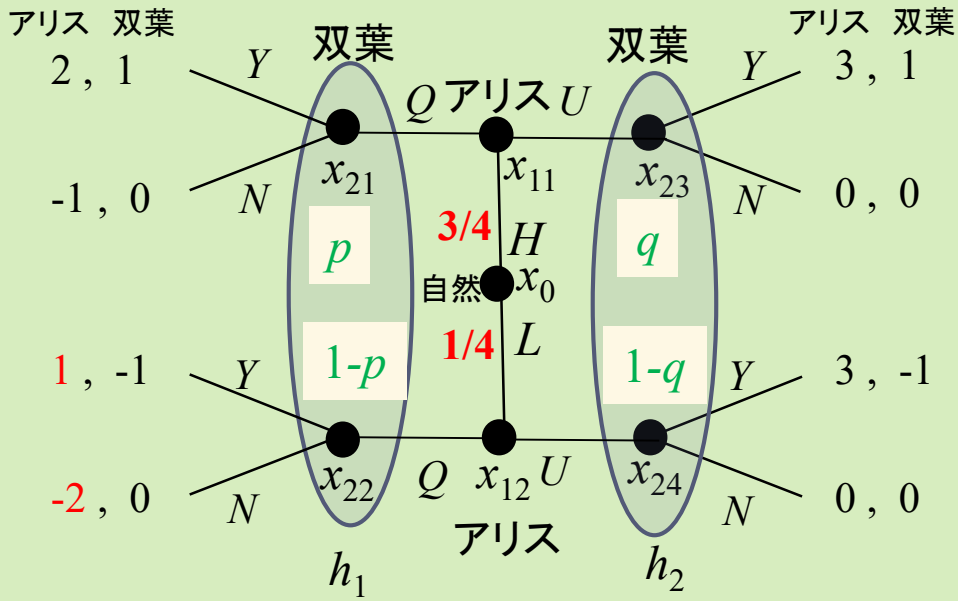
(1)アリスの戦略がQUのとき
双葉の整合的な信念：$p = 1 \quad q = 0$
表より、双葉の最適反応戦略はYN
このときアリスの最適反応戦略はQQ
⇒完全ベイズ均衡にならない

(2)アリスの戦略がUQのとき
双葉の整合的な信念：$p = 0 \quad q = 1$
表より、双葉の最適反応戦略はNY
このときアリスの最適反応戦略はUU
⇒完全ベイズ均衡にはならない

(3)アリスの戦略がQQのとき
双葉の整合的な信念：$p = 3/4$
qは何でも良い
双葉の最適反応戦略YNかYY

YNのときアリスの最適反応戦略はQQ
⇒完全ベイズ均衡
このとき整合的な信念は$0 \le q \le 1/2$
YYのときアリスの最適反応戦略はUU
⇒完全ベイズ均衡にはならない

解答　シグナリングゲーム：条件の変化PART2



双葉の信念を
$\mu(x_{21}) = p \quad (\mu(x_{22}) = 1 - p)$
$\mu(x_{23}) = q \quad (\mu(x_{24}) = 1 - q)$
とする。

双葉の最適反応戦略

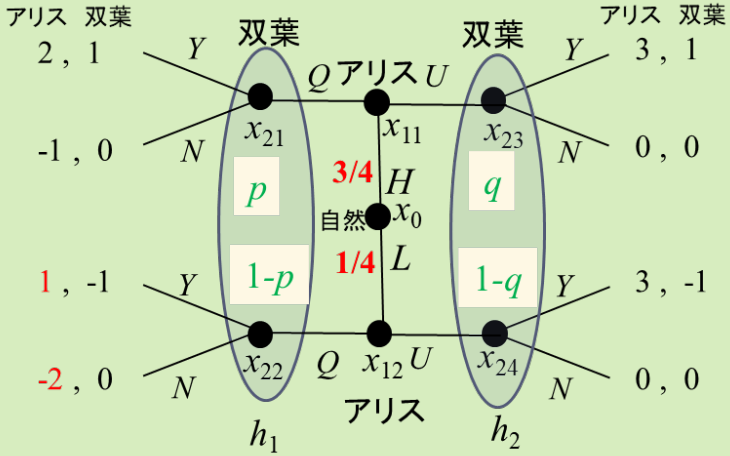
h_1 \ h_2	$0 \le q \le 1/2$	$1/2 \le q \le 1$
$0 \le p \le 1/2$	NN	NY
$1/2 \le p \le 1$	YN	YY

(4)アリスの戦略がUUのとき
双葉の整合的な信念：$q = 3/4$
pは何でも良い
双葉の最適反応戦略NYかYY

NYのときアリスの最適反応戦略はUUとなる
⇒完全ベイズ均衡
このとき整合的な信念は$0 \le p \le 1/2$

YYのときアリスの最適反応戦略UU
⇒完全ベイズ均衡
このとき整合的な信念は$1/2 \le p \le 1$

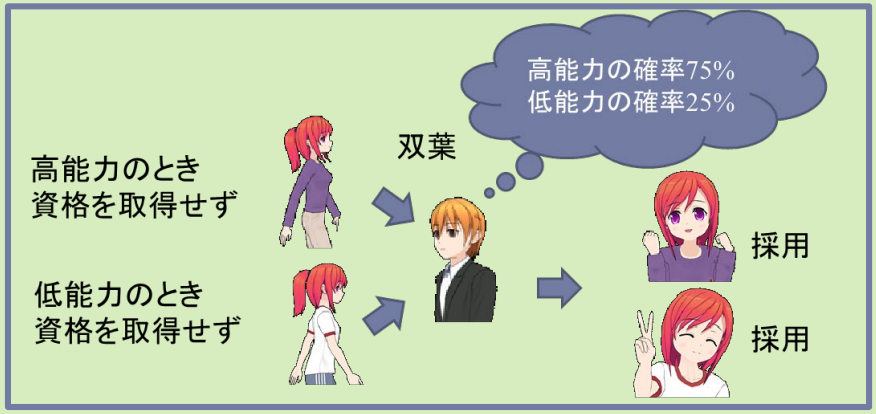
解答　完全ベイズ均衡：条件の変化PART2



均衡1：アリスの戦略：QQ　双葉の戦略：YN
信念：$p = 3/4$、$0 \leq q \leq 1/2$
均衡2：アリスの戦略：UU　双葉の戦略：NY
信念：$0 \leq p \leq 1/2,\ q = 3/4$
均衡2'：アリスの戦略：UU　双葉の戦略：YY
信念：$\frac{1}{2} \leq p \leq 1, q = 3/4$

均衡1：アリスは能力に関わらず
資格を取得し採用される

均衡2：アリスは能力に関わらず
資格を取得しないで採用される



分析から分かること

- 高能力の人と低能力の人の資格取得の費用差が必要
- 費用差がない場合
  - 事前確率（シグナルを出す前の属性の比率）の影響
  - 高能力の人の比率が高いと、すべてのタイプが採用されるので、どのタイプも資格を取得しない
  - 低能力の比率が高いと、すべてのタイプが採用されないので、どのタイプも資格を取得しない

シグナル（行動・資格）が、その人の正しい属性（能力・業績）を表すためには？

その属性を持たない人が、シグナルを出さない条件が必要
- シグナルを出すための費用差がある
- 正確には「ベネフィット－コスト」の差が必要

あなたが知っているシグナリングの例は？
情報開示：企業・自治体・大学、資格や学歴の取得
身体を張ったプロポーズ？

まとめ シグナリングゲーム

- シグナリングゲームでは、情報を持つ先手（送り手）がシグナルと呼ばれるを送り、後手（受け手）がそのシグナルから状態を推測し行動を選ぶ
- シグナリングゲームの解は完全ベイズ均衡で考える。
- 均衡には、分離均衡（タイプごとに異なるシグナルを選ぶ）と一括均衡（すべてのタイプが同じシグナルを選ぶ）がある。
- 一括均衡の中には、直観的基準を満たさないと呼ばれる良くない均衡がある。
- シグナルが本人の能力を表す