第 2 回宿題

(GRIPS 2023 年度講義)

問題 2.1

図 2.1 の利得行列におけるナッシュ均衡を求めよ．答は各プレイヤーの戦略をカッコに並べて答えなさい．

ゲーム1

1 \ 2	L	R
U	(1 , 4)	(2 , 3)
D	(0 , 2)	(3 , 0)

ゲーム2

1 \ 2	L	R
U	(2 , 4)	(4 , 3)
D	(1 , 2)	(5 , 5)

ゲーム3

1 \ 2	L	M	R
U	(6 , 1)	(0 , 1)	(-1, 0)
D	(5 , 1)	(1 , 0)	(0 , 1)

図 2.1: ナッシュ均衡を求める

問題 2.2

図 2.2 の各ゲームについて，次の問いに答えなさい（確率を用いる混合戦略は考えない）.

問 1 各ゲームの各プレイヤーに支配戦略はあるか．ある場合は (各プレイヤーごとに）その戦略を答え，ない場合は「なし」と答えよ．

問 2 各ゲームの各プレイヤーに弱支配戦略はあるか．ある場合は (各プレイヤーごとに）その戦略を答え，ない場合は「なし」と答えよ．

問 3 ナッシュ均衡を求めよ．答は各プレイヤーの戦略をカッコに並べて答えよ．

問 4 次の文章のうち正しいものをすべて選べ.

(A) ゲーム 1 において，プレイヤー 1 の支配戦略は (D, R)

(B) ゲーム 1 において，支配戦略は (D, R)

(C) ゲーム 1 において，プレイヤー 1 の支配戦略は D

(D) ゲーム 1 において，ナッシュ均衡は (D, R)

(E) ゲーム 1 において，プレイヤー 1 のナッシュ均衡は D

(F) ゲーム 1 のナッシュ均衡に対して，プレイヤー 1 の戦略は D

ゲーム1

1 \ 2	L	R
U	(3 , 5)	(-1 , 6)
D	(4 , 0)	(3 , 5)

ゲーム2

1 \ 2	L	R
U	(5 , 4)	(-3, 3)
D	(6 , 5)	(-1, 5)

ゲーム3

1 \ 2	L	M	R
U	(6 , 1)	(2 , 2)	(1 , 3)
D	(5 , 0)	(-1 , 2)	(3 , 4)

図 2.2: 2 人ゲームの支配戦略

問題 2.3

「ゲーム理論は，結果を数値に直すことが特徴」とか,「結果を利得と言う数値に直すことが難しいので使えない」などと言った誤解を良く受ける．ゲーム理論では（確率を用いない限りは）プレイヤーの結果に対する**好みの順序**が与えられていればよく，それを数値にする必要はない．

ここでは，各プレイヤーの結果に対する選好順序（好みの順序）を与えるだけで，問題が解けることを示してみよう．

図 2.3 は，プレイヤー 1 と 2 が戦略を選ぶことによって 4 つの結果が生じることを表している．以下の問 1 から問 3 では，各プレイヤーの結果に対する選好順序を与えている（結果 1$\succ$ 結果 2 は「結果 1 を結果 2 より好んでいる」ことを示している）．これを用いてゲームの解（ナッシュ均衡）を求めなさい．答は各プレイヤーの戦略をカッコに並べて答えなさい．

問 1 プレイヤー 1: 結果 1 $\succ$ 結果 2 $\succ$ 結果 3 $\succ$ 結果 4
プレイヤー 2: 結果 2 $\succ$ 結果 4 $\succ$ 結果 1 $\succ$ 結果 3

問 2 プレイヤー 1: 結果 1 $\succ$ 結果 3 $\succ$ 結果 4 $\succ$ 結果 2
プレイヤー 2: 結果 3 $\succ$ 結果 4 $\succ$ 結果 1 $\succ$ 結果 2

問 3 プレイヤー 1: 結果 3 $\succ$ 結果 2 $\succ$ 結果 1 $\succ$ 結果 4
プレイヤー 2: 結果 2 $\succ$ 結果 3 $\succ$ 結果 4 $\succ$ 結果 1

問題 2.4

次のゲームにおけるゲームの解をすべて求めよ．複数あるときは複数答えよ．ナッシュ均衡

1＼2	L	R
U	結果1	結果2
D	結果3	結果4

図 2.3: 結果による選好順序で解を求める

がない場合もある，そのときは「なし」を答えよ．なお，講義の後半で学ぶ確率を用いた「混合戦略」は考えない．

問 1 部下がミスをして，上司はそれを叱るか叱らないか，部下は謝るか謝らないかを考えている．上司は部下が謝っても謝らなくても，叱らないほうが叱るより良いと考えている．部下は，上司が叱っても叱らなくても，謝るほうが謝らないより良いと考えている．

問 2 アリスと文太は，禅寺かショッピングモールへ行く．アリスは，まず禅寺に行くほうがショッピングモールに行くよりも好ましいと考えており，次に禅寺に行く（もしくはショッピングモールに行く）という条件の中で比べると，2 人が一緒に会えるほうが良いと思っている．文太は，まず 2 人が一緒に会えるほうが会えないよりも良いと考えており，次に 2 人が会える（もしくは会えない）という条件のもとで比べるとショッピングモールのほうが禅寺に行くよりも良いと考えている．

問 3 アリスと文太は，禅寺かショッピングモールへ行く．アリスも文太も，まず 2 人が一緒に会えるほうが会えないよりも良いと考えており，次に次に 2 人が会える（もしくは会えない）という条件のもとで比べると，アリスはできるなら禅寺のほうが良いと考えており，文太はショッピングモールのほうが良いと考えている．

問 4 秋葉社と馬場社の 2 つの企業が，競合する新しい製品を高価格で売るか，低価格で売るか考えている．両社とも，相手が高価格で売るならば，高価格より低価格で売ったほうが顧客が獲得できて高い利益を得ることができる．一方，相手が低価格で売ってきても，高価格より低価格で売って対抗したほうが利益が高くなる．しかしお互いが低価格で売るよりも，お互いが高価格で売ったほうが，両者ともに利益が高い．

問 5 秋葉社と馬場社の 2 つの企業が，新しい市場に参入するかどうか考えている．両社とも相手が参入しないならば，共に参入しないより参入したほうが利益が高い．しかし両社とも相手が参入した場合には，自分が参入すると市場を食い合って共に赤字になり最悪の結果となる．それよりは自分は参入しないほうが良い．

問 6 アリスと文太は，新しいゲーム機「PC9」か「SW」のどちらかを買う．一緒に遊びたいので，異なるゲーム機を買うのは最悪である．ただ「PC9」の方が面白く，二人とも一緒に「PC9」を買う方が，一緒に「SW」を買うよりも良い．

問 7 愛子と文蔵は，第 1 食堂か第 2 食堂で昼食を食べる．愛子は文蔵と一緒に会えることが会えないことより良く，同じ状態なら第 1 食堂を好む．文蔵は愛子と違う食堂行きたいと第 1 に考えており，同じ状態なら第 2 食堂で食べたい．

問題 2.5

次のゲームにおいて，選択肢の中からナッシュ均衡となるものをすべて選びなさい．複数あるときは複数答えよ．選択肢の中に 1 つもナッシュ均衡がない場合は「なし」と答えよ．

問 1 2 人でじゃんけんをする．利得は勝つと $+1$，負けると -1，あいこは 0 とする．

問 1 の選択肢

(A) なし
(B) 2 人ともにグーを出す
(C) 1 人がグー，1 人がパーを出す
(D) 1 人がチョキ，1 人がパーを出す

問 2 7 人でじゃんけんをする．利得は勝つと $+1$，負けると -1，あいこは 0 とする．

問 2 の選択肢

(A) なし
(B) 7 人ともにグーを出す
(C) 3 人がグー，4 人がパーを出す
(D) 1 人がグー，2 人がパー，4 人がチョキを出す
(E) 2 人がグー，2 人がパー，3 人がチョキを出す
(F) 3 人がグー，2 人がパー，2 人がチョキを出す

問 3 （多数が勝ち）5 人で「海」か「山」を選ぶ．多い人数が選んだ方を選ぶと勝ちで利得は $+1$，少ない人数が選んだ方を選ぶと負けで利得は -1．全員が同じものを選ぶと利得は 0 とする．

問 3 の選択肢

(A) なし
(B) 全員が「海」を選ぶ
(C) 4 人が「海」，1 人が「山」を選ぶ
(D) 3 人が「海」，2 人が「山」を選ぶ
(E) 2 人が「海」，3 人が「山」を選ぶ
(F) 1 人が「海」，4 人が「山」を選ぶ
(G) 全員が「山」を選ぶ

問 4 （奇数人の少数決） 5 人で「海」か「山」を選ぶ．少ない人数が選んだ方を選ぶと勝ちで利得は $+1$，多い人数が選んだ方を選ぶと負けで利得は -1．全員が同じものを選ぶと利得は 0 とする．

問 4 の選択肢

(A) なし
(B) 全員が「海」を選ぶ
(C) 4 人が「海」，1 人が「山」を選ぶ
(D) 3 人が「海」，2 人が「山」を選ぶ
(E) 2 人が「海」，3 人が「山」を選ぶ
(F) 1 人が「海」，4 人が「山」を選ぶ
(G) 全員が「山」を選ぶ

問 5 （偶数人の少数決） 4 人で「海」か「山」を選ぶ．少ない人数が選んだ方を選ぶと勝ちで利得は $+1$，多い人数が選んだ方を選ぶと負けで利得は -1，選んだ人数が同じ場合と，全員が同じものを選んだときは，利得は 0 とする．

問 5 の選択肢

(A) なし
(B) 全員が「海」を選ぶ
(C) 3 人が「海」，1 人が「山」を選ぶ
(D) 2 人ずつ「海」と「山」を選ぶ
(E) 1 人が「海」，3 人が「山」を選ぶ
(F) 全員が「山」を選ぶ

問題 2.6

秋葉社 (A 社）と馬場社（B 社）は，同分野ではあるが，少し差別化された製品を販売する企業である．両社は製品の次期価格を，5 千円にするか，4 千円にするか決定しようとしている．価格を高くすると，1 単位あたりの利益は増えるが，売れる製品の量が減ってしまい，相手企業に流れてしまう．つまり問題は，自社の価格だけではなく，相手の価格も以下のように販売量に影響することである．

- 両方が同じ価格だと，両社とも売れる製品の数は同じで 2 万単位．
- 一方が 5 千円でもう一方が 4 千円だと，5 千円の価格をつけた方が売れる製品数は 1 万単位，4 千円の価格をつけた方が売れる製品数は 3 万単位である．

製品の原価は 1 千円であり，企業の利益は

$$\begin{aligned}\text{(自社の利益)} &= \text{(製品の価格)} \times \text{(自社の生産量)} - \text{(製品の原価)} \times \text{(自社の生産量)} \\ &= \{\text{(製品の価格)-(製品の原価)}\} \times \text{(自社の生産量)}\end{aligned}$$

と計算する．次の問いに答えよ．

問 1 A 社と B 社の価格決定が同時に行われるとして，このゲームを戦略的ゲームで分析したい．このゲームの利得行列を図 2.4 のように定めるとき，この利得行列を完成せよ．利得の単位は千万円で表せ．

A \ B	4千円	5千円
4千円	(a , b)	(e , f)
5千円	(c , d)	(g , h)

利得の単位は千万円

図 2.4: 秋葉社と馬場社の価格競争

問 2 上記ゲームの解を求めよ．混合戦略は考えない．

問題 2.7

秋葉社 (A 社）と馬場社（B 社）は，市場に同種の製品を提供する企業である．両社は製品の次期生産量を，2 万単位にするか，1 万単位にするか決定しようとしている．ここで作られた製品はすべて売却されるものとする．多量に生産すると，売れる製品の量は増えるが，市場に製品が多くなると値崩れしてしまう．問題は，自社の生産量ではなく，相手の生産量も以下のように価格に影響することである．

- 両方が 1 万単位生産（市場の製品数は合計 2 万単位）すると，製品の価格は 6 千円．
- 一方が 1 万単位生産し，もう一方が 2 万単位生産（市場の製品数は合計 3 万単位）すると，製品の価格は 5 千円．
- 両方が 2 万単位生産（市場の製品数は合計 4 万単位）すると，製品の価格は 4 千円．

製品の原価は 1 千円であり，企業の利益は

$$\begin{aligned}\text{(自社の利益)} &= \text{(製品の価格)} \times \text{(自社の生産量)} - \text{(製品の原価)} \times \text{(自社の生産量)} \\ &= \{\text{(製品の価格)-(製品の原価)}\} \times \text{(自社の生産量)}\end{aligned}$$

と計算する．例えば A 社が 1 万単位，B 社が 2 万単位の生産を行うと，製品価格は 5 千円となるので，A 社の利益は

$$(\text{A 社の利益}) = (5-1)\times 1 = 4(\text{千万円})$$

B 社の利益は

$$(\text{B 社の利益}) = (5-1)\times 2 = 8(\text{千万円})$$

となる．

次の問いに答えよ．

問 1 A 社と B 社の生産決定が同時に行われるとして，このゲームを戦略的ゲームで分析したい．このゲームの利得行列を**図 2.5** のように定めるとき，この利得行列を完成せよ．利得の単位は千万円で表せ．

A \ B	1万単位	2万単位
1万単位	(a , b)	(e , f)
2万単位	(c , d)	(g , h)

利得の単位は千万円

図 2.5: 秋葉社と馬場社の生産量競争

問 2 上記ゲームの解を求めよ．混合戦略は考えない．

問題 2.8

図 2.6 の問 1 , 問 2 において，(1) ナッシュ均衡をすべて列挙し，(2) その中で「支配されないナッシュ均衡」はどれか答えよ．

問1

1 \ 2	L	R
U	(4 , 5)	(2 , 6)
D	(4 , 2)	(1 , 1)

問2

1 \ 2	L	M	R
U	(6 , 1)	(2 , 3)	(3 , 3)
D	(6 , 5)	(-1 , 2)	(1 , 4)

図 2.6: 支配されないナッシュ均衡

問題 2.9

恋人同士の M ちゃんと K 君は，大のラーメン好きである．毎週，日曜日 12:00 は，こってりラーメンの「コッテリ軒」かあっさりラーメンの「あっさり亭」かどちらかにラーメンを食べに行っている．さて今週は M ちゃんの携帯が壊れてしまい，どちらの店に行くか連絡がとれなくなった．2 人は相手の行動が分からないまま，12:00 にどちらかの店の前に行って待ち合わせをしなければならない．

2 人は「コッテリ軒」か「あっさり軒」か，もしくは「家にいる」かの 3 つのうち 1 つを選ぶとする．M ちゃんはコッテリラーメンが好きで，K 君はあっさりラーメンが好きで，利得は以下のようになっている．

- 2 人が「コッテリ軒」を選べば，M ちゃんの利得は 2，K 君の利得は 1.
- 2 人が「あっさり亭」を選べば，M ちゃんの利得は 1，K 君の利得は 2.
- 2 人が会えないとき（どちらかが家にいるときを含む）は，すべて利得は 0

とする．

問 1 ゲームのナッシュ均衡をすべて求めよ．

問 2 支配されないナッシュ均衡を求めよ．

問 3 家にいると利得は 0，お店に出かけて会えないときは，その分だけ損するので利得を -1 とする．このゲームのナッシュ均衡をすべて求めよ．

問 4 問 3 での支配されないナッシュ均衡をすべて求めよ．

3	F		G	
1＼2	*D*	*E*	*D*	*E*
A	(5, 2,-1)	(3, 1, 1)	(0, 0, 0)	(-2,-1, 2)
B	(4, 3,-3)	(4, 2, 1)	(2, 3, 0)	(-1, 2, 3)
C	(3, 4,-1)	(5, 3, 1)	(1, 4, 0)	(0, 2, 2)

図 2.7: 3 人戦略形ゲーム：支配戦略を求めよ

問題 2.10

図 2.7 は 3 人のプレイヤーの利得行列である．各プレイヤーに支配戦略はあるか．あるときはその戦略を答え，ないときはなしと答えよ．

問題 2.11

図 2.8 は 3 人のプレイヤーの利得行列である．ナッシュ均衡を求めなさい．

ゲーム1

3	*A*		*B*	
1 \ 2	*L*	*R*	*L*	*R*
U	(1, 2,-1)	(3, 3, 1)	(0, 0, 0)	(2, 1, 2)
D	(0, 1,-3)	(4, 2, 1)	(2, 1, 0)	(-1, 2, 0)

ゲーム2

3	*F*		*G*	
1 \ 2	*D*	*E*	*D*	*E*
A	(5, 2,-1)	(3, 1, 1)	(0, 0, 0)	(-2,-1, 2)
B	(4, 1,-3)	(4, 2, 1)	(2, 3, 0)	(-1, 2, 0)
C	(3, 4,-1)	(1, 3, 1)	(1, 4, 0)	(0, 2, 2)

図 2.8: 3 人ゲームのナッシュ均衡を求める