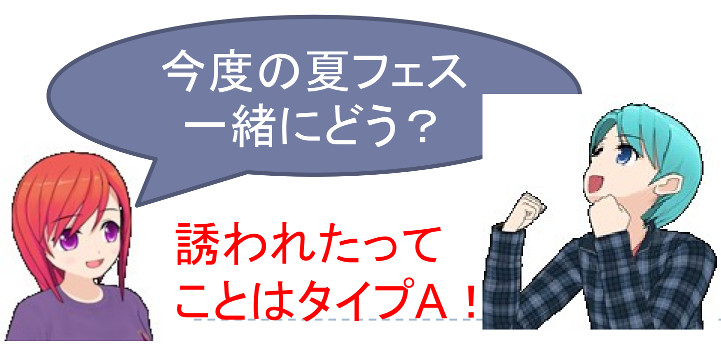
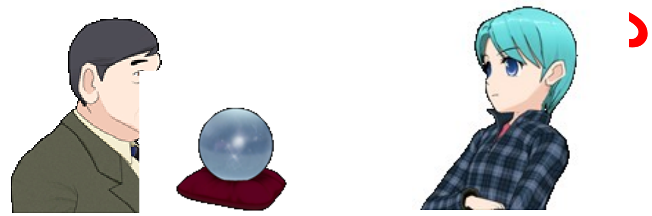
不完備情報の展開形ゲーム

不完備情報の展開形ゲーム

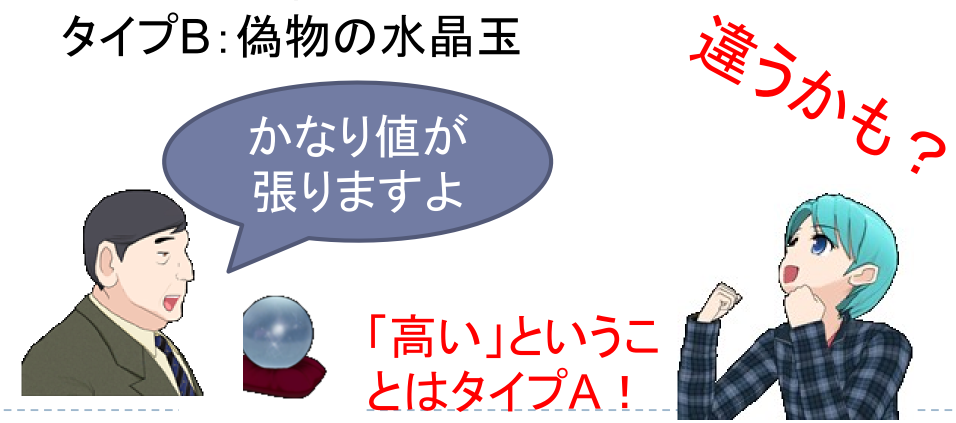
- 不完備情報(incomplete information)ゲーム
  - 相手や自分がプレイするゲーム・利得が不確実
  - プレイヤーは確率でゲーム（相手のタイプ）を推測する
- 展開形ゲームでは
  - プレイヤーの行動が，そのプレイヤーの持つ情報を示す
  - しかしプレイヤーは，それを読み込んで戦略的に行動する

タイプA：文太を好き
タイプB：文太を好きじゃない





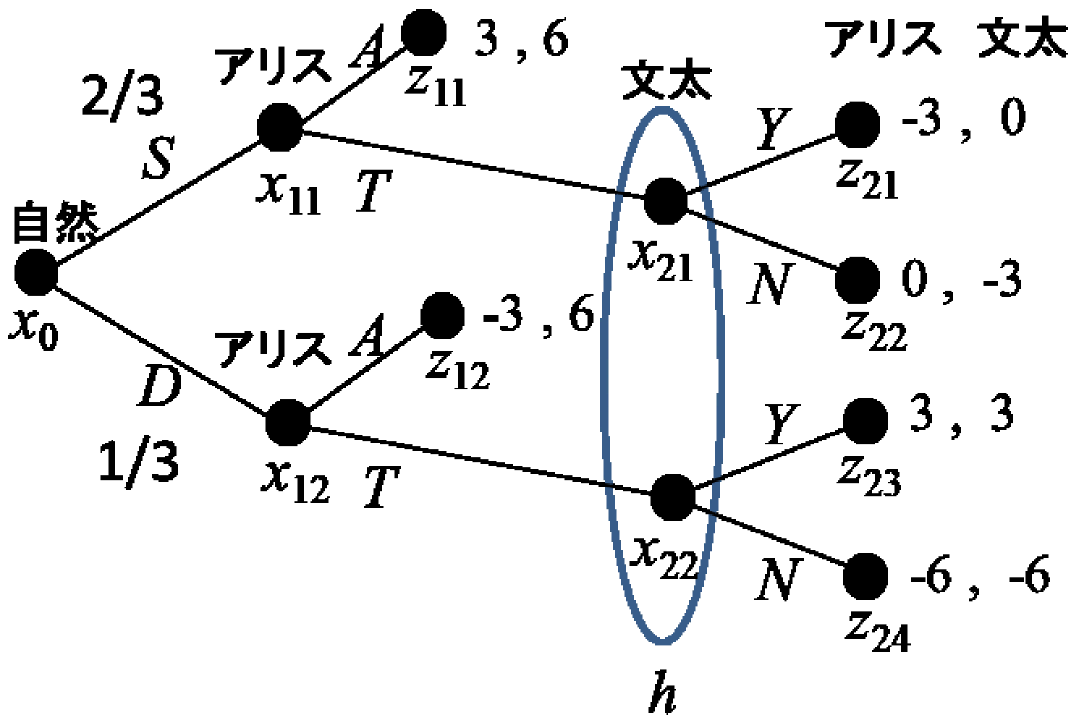
タイプA：本物の水晶玉
タイプB：偽物の水晶玉



モデル：禅は1人で？2人で？

- アリスは禅寺に，一人で行くか(A:Alone)，文太を誘おう(T:Together)か考えている．
- アリスに2つのタイプ
  - （タイプS:Solo）和尚から1人で来るように言われている
  - （タイプD：Double)和尚から文太も連れてくるように言われている
  - その確率はそれぞれ2/3，1/3
- アリスは，AかTかを決める．
  - Aを選ぶとゲームは終わり，アリスが一人で寺へ行く
  - Tを選ぶと，文太は（アリスのタイプが分からないまま）
  - 一緒に行くか(Y:Yes)，行かないか（N:No）を決める
- 利得は次図

禅は1人で？2人で？ゲームの木



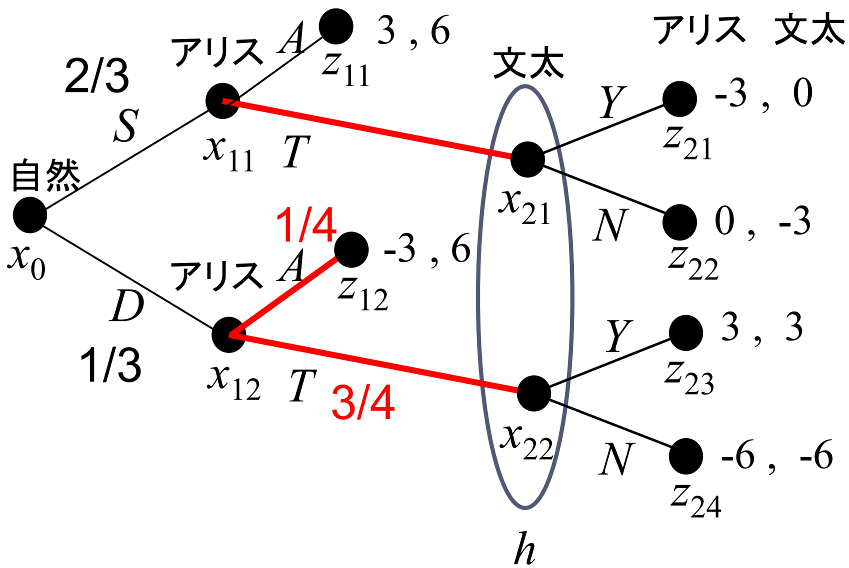
完全ベイズ均衡における整合的な信念

信念と完全ベイズ均衡

- 不完備情報の展開形ゲームの解は完全ベイズ均衡
- 信念(belief)という考え方を導入
  - 情報集合に複数の点があるとき，プレイヤーはどのような確率でその点が実現するかを推測する．
  - その推測確率を信念(belief)と呼ぶ
- 整合的な信念
  - プレイヤーは相手の戦略も推測する
  - 予想した戦略に対し，信念がベイズの定理に従うとき，その信念は(ベイズの定理に)整合的であるという

ゲーム理論講義における，
最終にして最大の山場！

整合的な信念とは？ #1



たとえば

アリスの戦略:
x_{11} では T を選ぶ, x_{12} では A を 1/4, T を3/4で選ぶ

混合戦略の方が理解しやすい

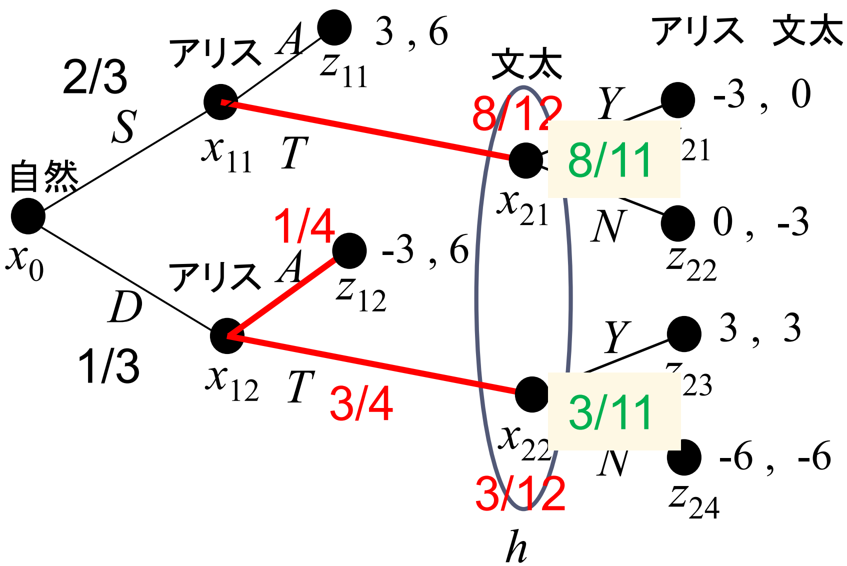
文太の情報集合 h における整合的な信念は？

まず x_{21}, x_{22}, 情報集合 h に到達する確率を求める.

$$P(x_{21}) = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3} = \frac{8}{12} \qquad P(x_{22}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

$$P(h) = P(x_{21}) + P(x_{22}) = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

整合的な信念とは？ #2



アリスの戦略：
x_{11}では Tを選ぶ
x_{12}では Tを1/4，Aを3/4で選ぶ

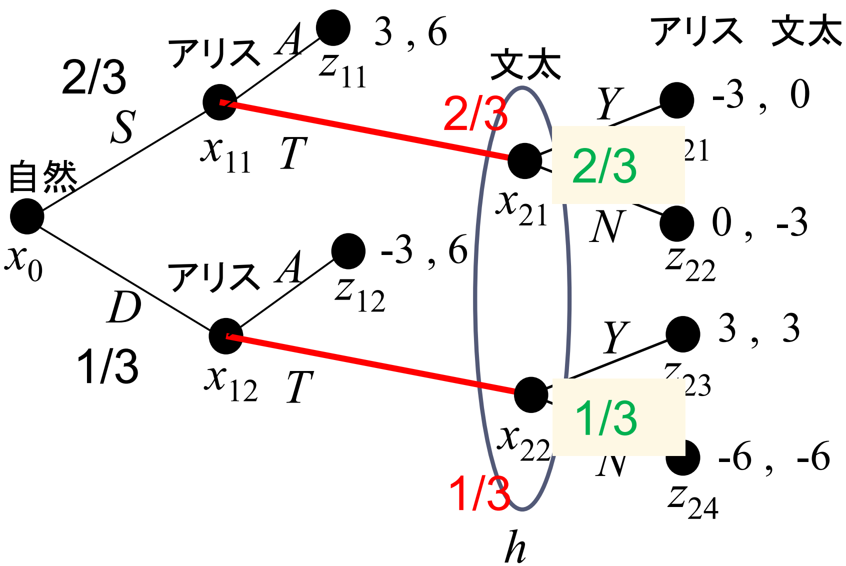
$$P(x_{21}) = \frac{8}{12}$$
$$P(x_{22}) = \frac{3}{12}$$
$$P(h) = P(x_{21}) + P(x_{22}) = \frac{11}{12}$$

文太の情報集合hにおける整合的な信念$\mu(x_{21}), \mu(x_{22})$
文太がhで行動を選ぶ（つまりアリスがTを選んだ）という条件のもとで，x_{21}とx_{22}にいる確率

$$\mu(x_{21}) = P(x_{21}|h) = \frac{P(x_{21} \cap h)}{P(h)} = \frac{P(x_{21})}{P(h)} = \frac{8/12}{11/12} = \frac{8}{11}$$
$$\mu(x_{22}) = P(x_{22}|h) = \frac{P(x_{22} \cap h)}{P(h)} = \frac{P(x_{22})}{P(h)} = \frac{3/12}{11/12} = \frac{3}{11}$$

x_{21}とx_{22}の到達確率の比になっている

純粋戦略における整合的な信念 #1



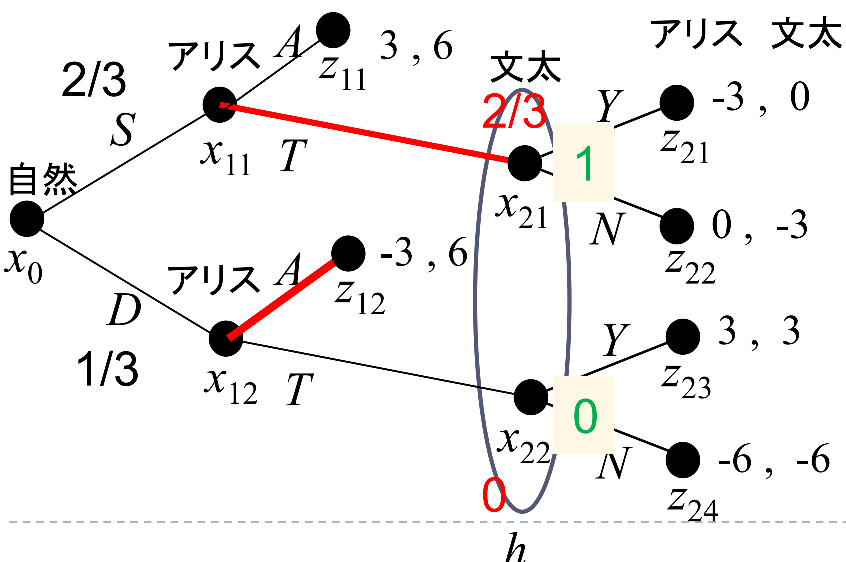
アリスの戦略：
x_{11} では T を選ぶ，x_{12} では T を選ぶ
（以下，いつものように TT と書く）

$$P(x_{21}) = \frac{2}{3} \quad P(x_{22}) = \frac{1}{3} \quad P(h) = 1$$

$$\mu(x_{21}) = P(x_{21}|h) = \frac{P(x_{21})}{P(h)} = \frac{2/3}{1} = \frac{2}{3}$$

$$\mu(x_{22}) = P(x_{22}|h) = \frac{P(x_{22})}{P(h)} = \frac{1/3}{1} = \frac{1}{3}$$

事前確率と同じ



アリスの戦略：TA

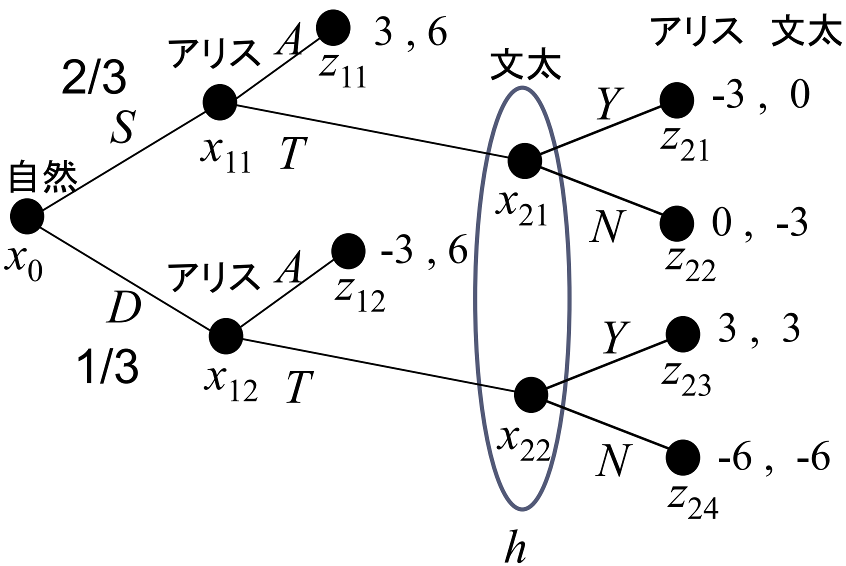
$$P(x_{21}) = \frac{2}{3} \quad P(x_{22}) = 0 \quad P(h) = \frac{2}{3}$$

$$\mu(x_{21}) = P(x_{21}|h) = \frac{P(x_{21})}{P(h)} = \frac{2/3}{2/3} = 1$$

$$\mu(x_{22}) = P(x_{22}|h) = \frac{P(x_{22})}{P(h)} = \frac{0}{2/3} = 0$$

x_{21} の確率は1（x_{22} にいる確率は0）

純粋戦略における整合的な信念



アリスの純粋戦略と整合的な信念

TT $\mu(x_{21}) = \frac{2}{3}$ $\mu(x_{22}) = \frac{1}{3}$

TA $\mu(x_{21}) = 1$ $\mu(x_{22}) = 0$

AT $\mu(x_{21}) = 0$ $\mu(x_{22}) = 1$

純粋戦略のときは，ベイズの定理を使うまでもない！

アリスの戦略がAAのときは？

$P(x_{21}) = 0 \quad P(x_{22}) = 0 \quad P(h) = 0$

$$\mu(x_{21}) = P(x_{21}|h) = \frac{P(x_{21})}{P(h)}$$

$$\mu(x_{22}) = P(x_{22}|h) = \frac{P(x_{21})}{P(h)}$$

これでは計算できない

$$P(x_{21}) = P(x_{21}|h)P(h)$$
$$P(x_{22}) = P(x_{22}|h)P(h)$$

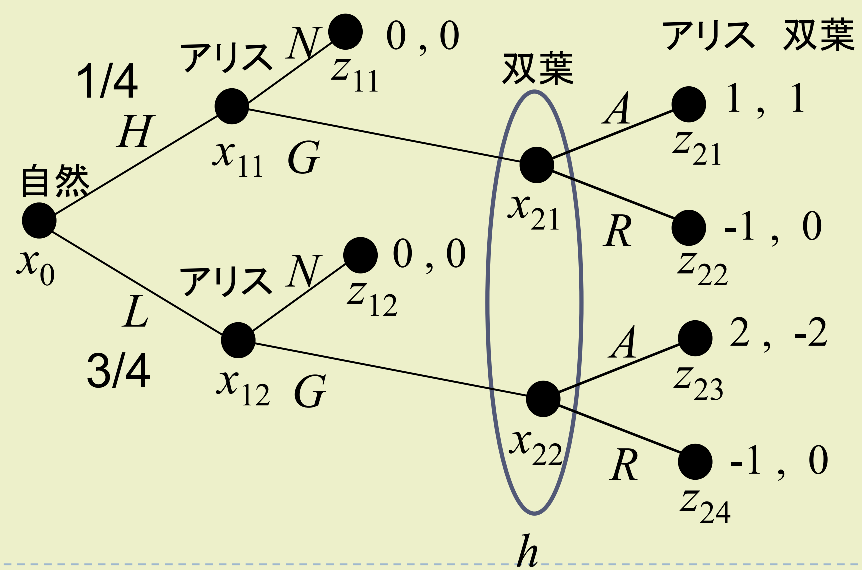
であったことを考えると，どんな$P(x_{21}|h)$と$P(x_{22}|h)$も整合的になると考えられる．

アリスの戦略がAAのときはどんな信念も整合的と考える

信念は何でも良い

演習　アリスの採用面接

- アリスは双葉という企業の採用面接に行く（G:Go）か、行かない（N:Not Go)かを決める。アリスが採用面接に来た場合、双葉は採用するか(A:Accept）、しないか(R:Reject)かを決める
- アリスは、高能力（タイプH）である確率が1/4、低能力である確率が3/4（タイプL)であると双葉は推測している。もちろんアリスは自分のタイプを知っている。
- アリスは、採用されれば高能力のとき利得は+1、低能力のとき利得は+2とする。どちらのタイプも不採用は-1、面接に行かなければ利得0とする。
- 双葉は、高能力のアリスを採用すれば利得は+1、低能力なら-2とし、不採用の場合と面接に来ない場合は共に0である。



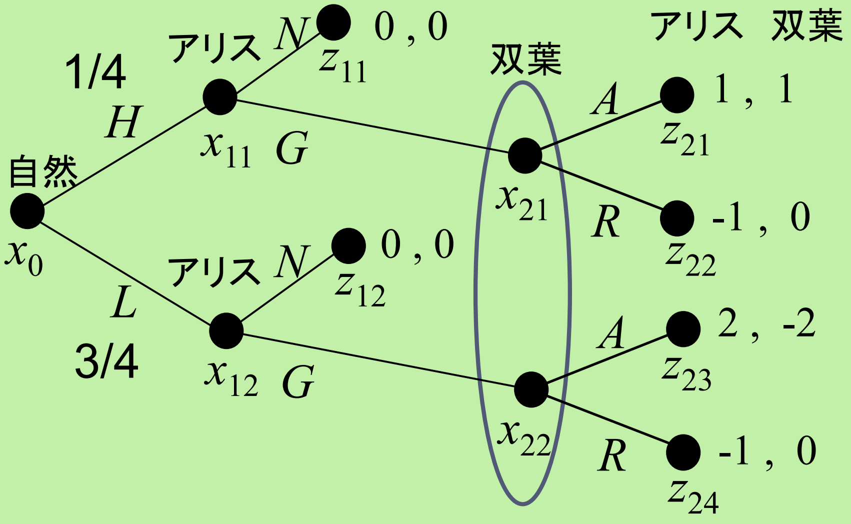
問題1:次の戦略に対して、双葉の情報集合hにおける整合的な信念を求めよ。信念を$\mu(x_{21}) = p,\ \mu(x_{22}) = 1 - p$とし、$p$の値で答えよ。

(戦略1) NG

(戦略2) GG

(戦略3) タイプHはGを選び、タイプLは確率5/6でNを、1/6でGを選ぶ

解答　アリスの採用面接



問題1：次の戦略に対して、双葉の情報集合hにおける整合的な信念を求めよ。信念を$\mu(x_{21})=p,\ \mu(x_{22})=1-p$とし、$p$の値で答えよ。

(戦略1) NG $p=0$
(戦略2) GG $p=1/4$

戦略3は計算する必要がある：
タイプHはGを選び、タイプLは確率5/6でNを、1/6でGを選ぶ

$$P(x_{21})=\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}=\frac{2}{8} \qquad P(x_{22})=\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{8}$$

$$\mu(x_{21})=P(x_{21}|h)=\frac{P(x_{21})}{P(h)}=\frac{\frac{2}{8}}{\frac{2}{8}+\frac{1}{8}}=\frac{2}{3} \qquad p=\frac{2}{3}$$

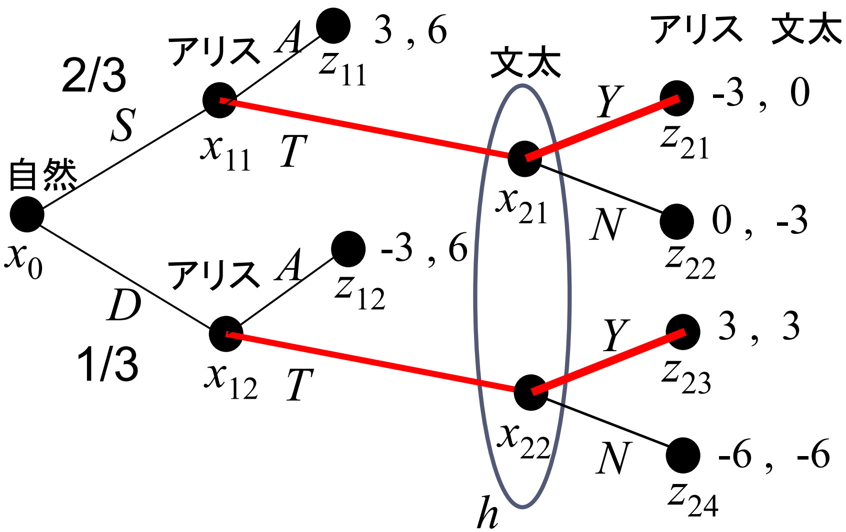
完全ベイズ均衡を求める

定義　完全ベイズ均衡

- 戦略の組と信念が完全ベイズ均衡であるとは，戦略の組と信念が以下の2つの条件を満たすことである．
- 条件1：すべての情報集合において，各プレイヤーの戦略は，その信念に対して最適反応戦略となっている．
- 条件2：すべての情報集合において，各プレイヤーの信念は，その戦略の組に対し整合的である．

- 不完備情報展開形ゲームの解は，完全ベイズ均衡であると考える．
- これまでの解との関係は，あとで．

完全ベイズ均衡かどうかを確かめる



完全ベイズ均衡か？

（例1）アリス：TT　文太：N
信念　$\mu(x_{21}) = 1$　$\mu(x_{22}) = 0$

（例1）は信念が整合的ではないからダメ

（例2）アリス：TT　文太：N
信念　$\mu(x_{21}) = 2/3$　$\mu(x_{22}) = 1/3$

信念は整合的

文太は最適反応戦略を選んでいるか？
文太の期待利得を調べる．
文太Yの期待利得：
$\mu(x_{21}) \times 0 + \mu(x_{22}) \times 3 = 1$
文太Nの期待利得：
$\mu(x_{21}) \times (-3) + \mu(x_{22}) \times (-6) = -4$
（例2）は文太は最適反応戦略を選んでないからダメ

（例3）アリス：TT　文太：Y
信念　$\mu(x_{21}) = 2/3$　$\mu(x_{22}) = 1/3$

信念は整合的
文太も最適反応戦略を選んでいる

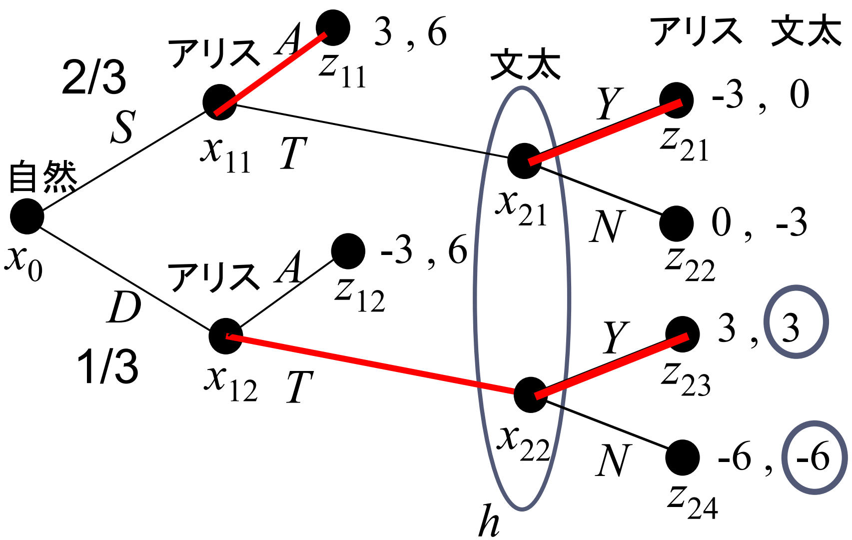
アリスは最適反応戦略か？

文太がYを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はAT

（例3）はアリスは最適反応戦略を選んでないからダメ

全部ダメじゃん！

完全ベイズ均衡かどうかを確かめる



完全ベイズ均衡か？

（例4）アリス：AT　文太：Y

信念　$\mu(x_{21}) = 0$　$\mu(x_{22}) = 1$

信念は整合的

$\mu(x_{22}) = 1$なので，期待値というよりx$_{22}$でYが良いか，Nが良いかを調べるだけ．

文太は最適反応戦略を選んでいるか？文太の期待利得を調べる．

文太Yの期待利得：$\mu(x_{21}) \times 0 + \mu(x_{22}) \times 3 = 3$

文太Nの期待利得：$\mu(x_{21}) \times (-3) + \mu(x_{22}) \times (-6) = -6$

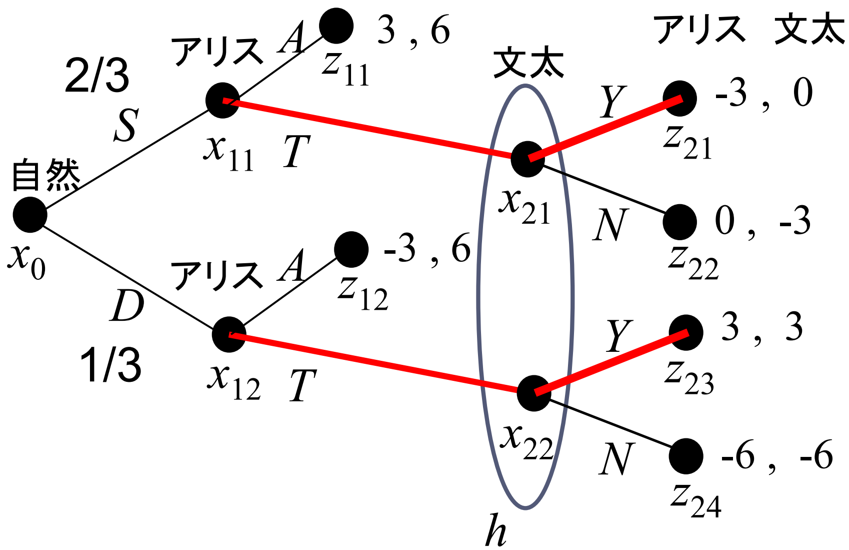
信念は整合的，文太も最適反応戦略を選んでいる

アリスは最適反応戦略か？

文太がYを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はAT

（例4）は完全ベイズ均衡！

完全ベイズ均衡をどうやって求める？



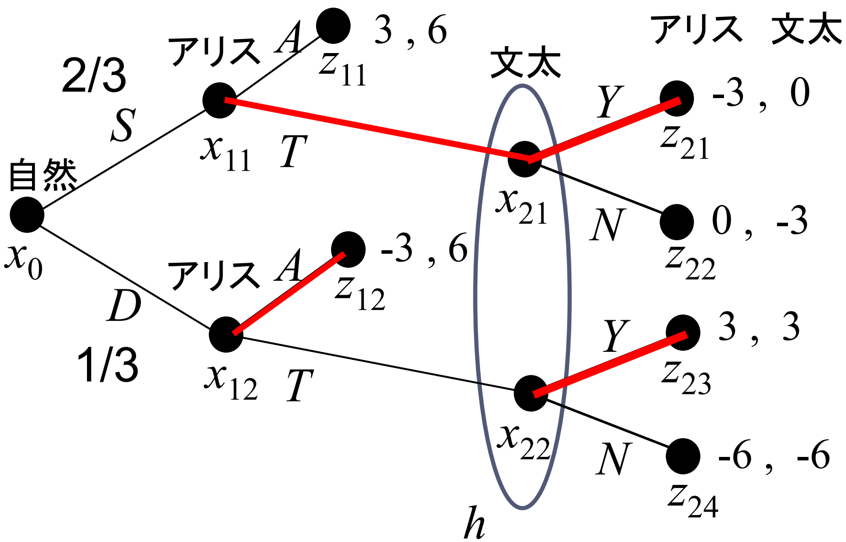
ある戦略の組と信念の組を完全ベイズ均衡か確かめる方法は分かった.
ではどうやって求める？

仮にアリスが◯◯を選ぶと仮定すると？
(1)整合的な文太のhでの信念を求める
(2)その信念に対する文太の最適反応戦略を求める
(3) その文太の最適反応戦略に対して，◯◯がアリスの最適反応戦略なら，それは完全ベイズ均衡

◯◯について，アリスのすべての戦略 TT , TA, AT, AA について調べれば，完全ベイズ均衡はすべて求められる（はず）

- 純粋戦略については．．．ね
  混合戦略は求められない
  純粋戦略の完全ベイズ均衡は存在しないこともある.
  混合戦略まで考えれば，必ず存在する.

完全ベイズ均衡を求める #1



1)アリスの戦略 TT （確認済）
完全ベイズ均衡はなかった
2)アリスの戦略 AT （確認済）
整合的な信念 $\mu(x_{21}) = 0$ $\mu(x_{22}) = 1$
文太のμにおける最適反応戦略 Y
アリスの最適反応戦略はAT
したがって，
(AT, Y)と上記の信念μの組は完全ベイズ均衡

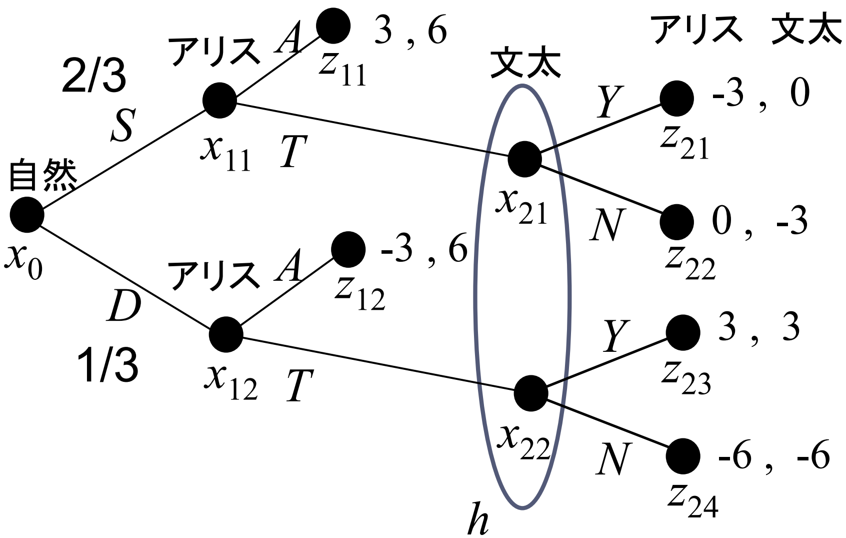
アリスの戦略がTAのとき

整合的な信念 $\mu(x_{21}) = 1$ $\mu(x_{22}) = 0$
文太Y の期待利得：0
文太N の期待利得：-3
文太の最適反応戦略 ⇒ Y

アリスは最適反応戦略か？
文太がYを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はAT

アリスの最適反応戦略はTAじゃないからダメ（アリスがTAを選ぶような完全ベイズ均衡はない）

完全ベイズ均衡を求める #2



1)アリスの戦略 TT （確認済）
完全ベイズ均衡はなかった
2)アリスの戦略 AT （確認済）
整合的な信念 $\mu(x_{21}) = 0$ $\mu(x_{22}) = 1$
文太のμにおける最適反応戦略 Y
アリスの最適反応戦略はAT
したがって，
(AT, Y)と上記の信念μの組は完全ベイズ均衡
3)アリスの戦略TA （確認済）
完全ベイズ均衡はなかった

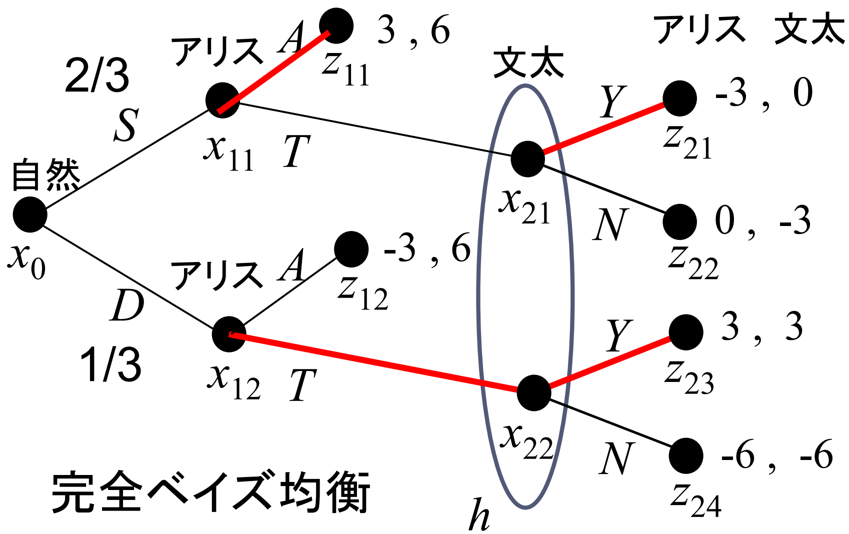
アリスの戦略がAAのとき

このときは，どんな信念も整合的⇒そこで $\mu(x_{21}) = p$ $\mu(x_{22}) = 1 - p$ とおく
文太Yの期待利得：$\mu(x_{21}) \times 0 + \mu(x_{22}) \times 3 = 3 - 3p$
文太Nの期待利得：$\mu(x_{21}) \times (-3) + \mu(x_{22}) \times (-6) = -6 + 3p$
$-6 + 3p \leq -3$ $0 \leq 3 - 3p$ なので$-6 + 3p < 3 - 3p$
どんな信念でも，文太の最適反応戦略は Y

アリスは最適反応戦略か？
文太がYを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はAT
アリスの最適反応戦略はAAじゃないからダメ
（アリスがAAを選ぶような完全ベイズ均衡はない）

通常はpの値により，選択が変わるので，それぞれの場合を分けて考える

完全ベイズ均衡　まとめ



完全ベイズ均衡

アリスの戦略が *TT, TA, AA* となるような完全ベイズ均衡はない

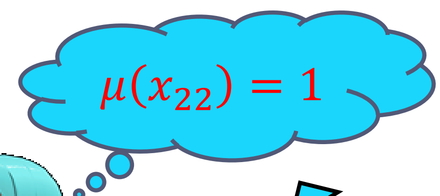
完全ベイズ均衡は
アリスの戦略 *AT*　文太の戦略　*Y* と

$$\mu(x_{21}) = 0 \quad \mu(x_{22}) = 1$$

の信念の組

和尚から1人で来るように言われた場合
タイプ*S*

アリスは1人で寺へ
（*A*を選択）



もともとタイプDである確率は1/3であるのに

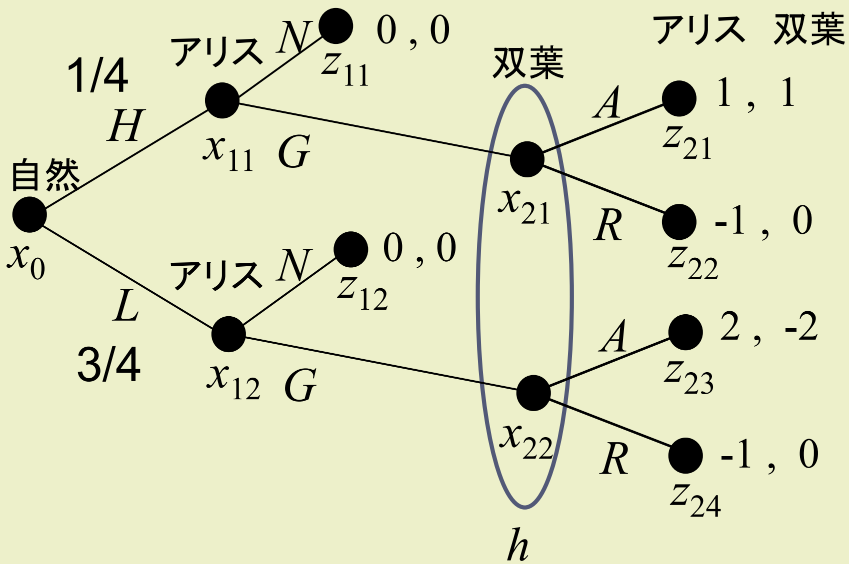
和尚から2人で来るように言われた場合
タイプ*D*

アリスは文太を誘う（*T*を選択）

文太は一緒に行くと答える（*Y*を選択）

文太は誘ってきたアリスは100%タイプ*D*たと推測する

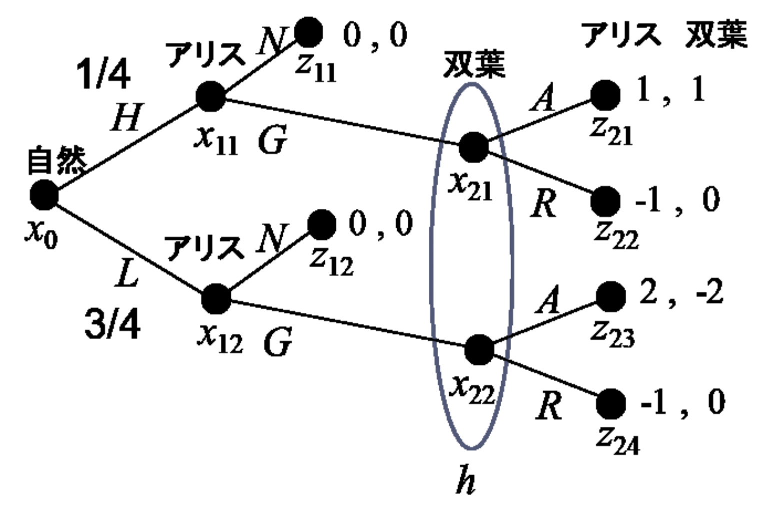
演習　アリスの採用面接:完全ベイズ均衡



左のゲームに対し、双葉の情報集合hにおける信念を$\mu(x_{21}) = p$, $\mu(x_{22}) = 1 - p$とする。

問題2:pの値で、双葉の最適反応戦略が A と R になるときを場合を分けよ。
問題3:アリスの戦略がGG、NG、GNのときは完全ベイズ均衡がないことを確かめよ。
問題4:アリスの戦略がNNとなるときを考える。双葉の最適反応戦略がAとRになるときで場合分けして、完全ベイズ均衡があるかどうか確かめよ(ある場合は整合的な信念は範囲になる)。

解答　アリスの採用面接



双葉の信念：
$\mu(x_{21}) = p,\ \mu(x_{22}) = 1 - p$とする。
問題2：
双葉A の期待利得：$p - 2(1-p) = 3p - 2$
双葉R の期待利得：$p \times 0 + (1-p) \times 0 = 0$

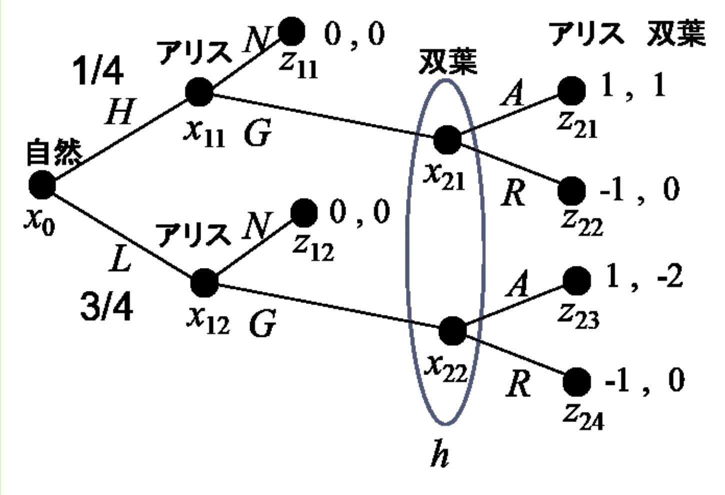
$3p - 2 \geq 0 \iff$
$p \geq 2/3$ のとき Aが最適反応戦略
（$p \leq 2/3$ のとき Rが最適反応戦略）

問題3：
1)アリスの戦略 GG　整合的な信念 $p = 1/4 \Rightarrow R$が双葉の最適反応戦略
双葉がRを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はNN　完全ベイズ均衡ではない

2)アリスの戦略 GN　整合的な信念 $p = 1 \Rightarrow A$が双葉の最適反応戦略
双葉がAを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はGG　完全ベイズ均衡ではない

3)アリスの戦略 NG　整合的な信念 $p = 0 \Rightarrow R$が双葉の最適反応戦略
双葉がRを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はNN　完全ベイズ均衡ではない

解答　アリスの採用面接



双葉の信念:
$\mu(x_{21}) = p,\ \mu(x_{22}) = 1 - p$とする。

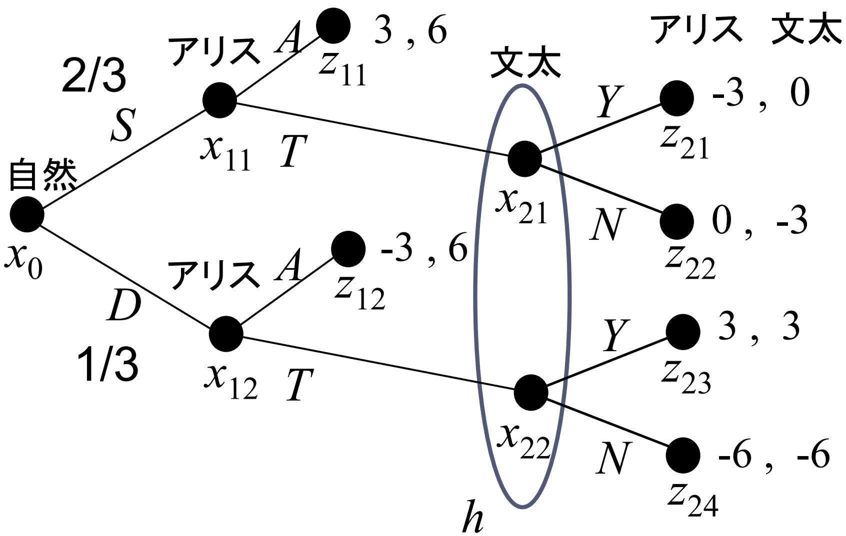
双葉A の期待利得: $p - 2(1 - p) = 3p - 2$
双葉R の期待利得: $p \times 0 + (1 - p) \times 0 = 0$
$3p - 2 \geq 0 \iff$
$p \geq 2/3$ のとき Aが最適反応戦略
（ $p \leq 2/3$ のとき Rが最適反応戦略）

問題4:
4)アリスの戦略 NN　どんな信念も整合的になる。

$p \geq 2/3$ のとき Aが双葉の最適反応戦略
双葉がAを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はGG　完全ベイズ均衡ではない
$p \leq 2/3$ のとき Rが双葉の最適反応戦略
双葉がRを選ぶなら，アリスの最適反応戦略はNN　完全ベイズ均衡！

完全ベイズ均衡;
アリスの戦略 NN　双葉の戦略 R
信念 $0 \leq p \leq 2/3$

ナッシュ均衡との関係



アリス＼文太	Y	N
AA	(1 , 6)	(1 , 6)
AT	(3 , 5)	(0 , 2)
TA	(-3 , 2)	(-1 , 0)
TT	(-1 , 1)	(-2 ,-4)

すべての展開形ゲームは，戦略形ゲームに変換できる．不確実性のある展開形ゲームで学んだように，このゲームも戦略形ゲームに変換できる．

- このゲームを戦略形ゲームに変換すると，そのナッシュ均衡は(AA,N)と(AT,Y)
- 完全ベイズ均衡は(AT,Y)
- 文太は情報集合hでは，*Nを選ばないと考えられるので，*(AA,N)は悪いナッシュ均衡であり，完全ベイズ均衡(AT,Y)を解と考えるべき．
- 完全ベイズ均衡はナッシュ均衡の精緻化になっている．
- このゲームは部分ゲームがないので，部分ゲーム完全均衡もナッシュ均衡と同じ(AA,N)と(AT,Y)
- 今回の場合，完全ベイズ均衡は部分ゲーム完全均衡で精緻化できない解を選んでいる（部分ゲーム完全均衡より優れている）
- しかし部分ゲーム完全均衡が完全ベイズ均衡より良い場合もある．

ナッシュ均衡の精緻化

- 部分ゲーム完全均衡と完全ベイズ均衡だと優劣は必ずしもつけられない
- さらに完全ベイズ均衡を精緻化した逐次均衡（sequential equilibrium)と呼ばれる均衡概念がある．（最高峰とされる？）
  - これは部分ゲーム完全均衡や完全ベイズ均衡を精緻化していて，優れた解になっている．
  - しかし難しいので，ここではやりません！
  - 現実的には部分ゲーム完全均衡と完全ベイズ均衡を駆使すれば，ほとんどの場合十分（個人的感想）
- 戦略形ゲームの解の精緻化も，完全均衡(perfect equilibrium , Selten 1975)，強完全均衡(strictly perfect equilibrium, Okada 1981)などがある．個人的な感想では強完全均衡がもっともシンプルで使いやすく，もっとも精緻である．（数学的には存在しないことがあるが，現実的にはほとんど存在する）

まとめ 不完備情報の展開形ゲーム

- 不完備情報展開形ゲームの解は，完全ベイズ均衡で考える．
- 完全ベイズ均衡は，以下を満たす戦略の組と信念の組
  - 信念は，ベイズルールに整合的
  - 戦略は，信念のもとで最適反応戦略（期待利得を最大化）となっている
- 完全ベイズ均衡はナッシュ均衡の精緻化となっている
- 不完備情報展開形ゲームの解として，さらに良い解として逐次均衡