ゼミナールゲーム理論 演習問題の解説と補足

ver.2 July 18, 2008 更新

演習 2.2

問 1 (y_1, x_2)（プレイヤー 2 の x_2 が支配戦略で、プレイヤー 1 のその最適反応戦略が y_1）

問 2 (x_1, y_2)（プレイヤー 1 の x_1 が支配戦略で、プレイヤー 2 のその最適反応戦略が y_2）

問 3 (x_1, y_2)（プレイヤー 2 の y_2 が支配戦略で、プレイヤー 1 のその最適反応戦略が x_1）

演習 2.3

問 1 (y_1, x_2, y_3)（プレイヤー 2 の x_2 と、プレイヤー 3 の y_3 が支配戦略（プレイヤー 3 は弱支配戦略）で、x_2,y_3 に対するプレイヤー 1 の最適反応戦略が y_1）

問 2 (x_1, x_2, y_3)（プレイヤー 3 の y_3 が支配戦略。プレイヤー 3 が y_3 を採るならば、プレイヤー 2 の x_2 は y_2 を支配しており、プレイヤー 2 は x_2 を選択する。x_2,y_3 に対するプレイヤー 1 の最適反応戦略は x_1）

演習 3.6 の考え方

- 2 人のプレイヤーで戦略が 2 つのとき、ナッシュ均衡が 1 つであるためには、両プレイヤーに支配戦略があるか、1 方のプレイヤーに支配戦略があるかのどちらかである。
- しかし両方のプレイヤーに支配戦略があれば、先手後手に変えてもお互いそれを選び、結果は同じになる。したがって、一方のプレイヤーに支配戦略があると場合しか、題意を満たす状態はありえない。
- この場合、同時のゲームで B に支配戦略があれば、B が後手になってもそれを選び、先手の A はそれに対する最適な戦略を選ぶため、結果は同時のゲームと同じになってしまう。
- したがって題意を満たすためには、同時のゲームで A に支配戦略があり、B は A の戦略により最適反応戦略が異なるケースである。このような状態であるためには図 1 において x_A を支配戦略と考えると、$a > c$, $b > d$ であり、B の最適反応が異なるため $e > g$,$f < h$ とした。同時ゲームの解は (x_A, x_B) としている。
- さらに結果が同時のゲームと異なるためには交互のゲームで先手の A が y_B を選ばなければならない。これは $d > a$ であれば実現する。したがって $b > d > a > c$ でなければならない。そこで $b = 4, d = 3, a = 2, c = 1$ として考えよう。
- 同時ゲームの解における B の利得は e で、これが A の利得 a より大きくなければいけない。そこで $e = 4$ と決め、$e > g$ より $g = 3$ と決める。
- 交互のゲームの解における B の利得は h で、これが A の利得 d より小さくなければいけない。これより $h = 2$ と決め、$f < h$ より $f = 1$ とする。

A \ B	x_B	y_B
x_A	(a , e)	(b , g)
y_A	(c , f)	(d , h)

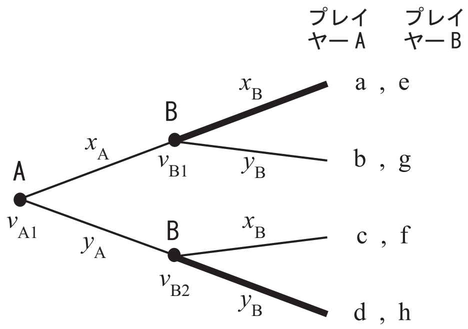

図 1: 均衡が 1 つで先手を取ると有利になるための条件

上記のように考えれば、題意を満たすゲームを作ることができる。答えは P101 に示したとおり。

演習 4.4 補足

- 問 1 の利得行列は図 2 の通り。
- 問 4 の利得行列は図 3 の通り。
- 正誤表に示したように、問 5 の答から $(200, 300)$,$(200, 400)$ が欠落している。
- 「支配された戦略を繰り返し削除」で解を求めることと、「支配されないナッシュ均衡」は微妙に違うことに注意せよ。問 6 では「支配されないナッシュ均衡」を求めよと言っており、「支配された戦略を繰り返し削除して」解を求めよ、とは言っていない。
- 問 6 でプレイヤー 1 を考えると 200 以外の戦略はすべて 200 以外に弱支配されている、またプレイヤー 2 を考えると 500 以外の戦略はすべて 500 に支配されている。「支配されないナッシュ均衡」は「支配された戦略を使わないナッシュ均衡」なので、プレイヤー 1 は 200 以外の戦略を使わないし、プレイヤー 2 は 500 以外の戦略を使わない。したがって解は $(200, 500)$ となる。
- 問 6 を「支配された戦略の繰り返し削除」で解を求めるとどうなるだろうか。「支配された戦略の繰り返し削除」は、テキストの P112 で示したように、削除する戦略の順序によって得られる結果が異なる。この場合も、

  (1) 最初にプレイヤー 1 の支配された戦略だけを削除するのか

  (2) 最初にプレイヤー 2 の支配された戦略だけを削除するのか

  (3) 最初にプレイヤー 1 と 2 の支配された戦略を同時に削除するのか

  によって結果が異なることに注意する。
- (1) のように考えれば、まずプレイヤー 1 の 200 以外の戦略が削除されて、プレイヤー 1 は 200 だけが残る。これをもとにプレイヤー 2 の戦略を考えれば、100 と 200 だけが支配され、300,400, 500,600 が残る。これ以上戦略は削除できないので、$(200, 300)$,$(200, 400)$,$(200, 500)$,$(200, 600)$ が解となる。

	0	100	200	300	400	500	600
0	(100, 250)	(0 , 400)	(0 , 300)	(0 , 200)	(0 , 100)	(0 , 0)	(0 ,−100)
100	(100, 0)	(50, 200)	(0 , 300)	(0 , 200)	(0 , 100)	(0 , 0)	(0 ,−100)
200	(0 , 0)	(0 , 0)	(0 , 150)	(0 , 200)	(0 , 100)	(0 , 0)	(0 ,−100)
300	(−100, 0)	(−100, 0)	(−100, 0)	(−50, 100)	(0 , 100)	(0 , 0)	(0 ,−100)
400	(−200, 0)	(−200, 0)	(−200, 0)	(−200, 0)	(−100, 50)	(0 , 0)	(0 ,−100)
500	(−300, 0)	(−300, 0)	(−300, 0)	(−300, 0)	(−300, 0)	(−150, 0)	(0 ,−100)
600	(−400, 0)	(−400, 0)	(−400, 0)	(−400, 0)	(−400, 0)	(−400, 0)	(−200, −50)

図 2: ファーストプライスオークションの利得行列

	0	100	200	300	400	500	600
0	(100, 250)	(0 , 500)	(0 , 500)	(0 , 500)	(0 , 500)	(0 , 500)	(0 , 500)
100	(200, 0)	(50, 200)	(0 , 400)	(0 , 400)	(0 , 400)	(0 , 400)	(0 , 400)
200	(200, 0)	(100, 0)	(0 , 150)	(0 , 300)	(0 , 300)	(0 , 300)	(0 , 300)
300	(200, 0)	(100, 0)	(0 , 0)	(−50, 100)	(0 , 200)	(0 , 200)	(0 , 200)
400	(200, 0)	(100, 0)	(0 , 0)	(−100, 0)	(−100, 50)	(0 , 100)	(0 , 100)
500	(200, 0)	(100, 0)	(0 , 0)	(−100, 0)	(−200, 0)	(−150, 0)	(0 , 0)
600	(200, 0)	(100, 0)	(0 , 0)	(−100, 0)	(−200, 0)	(−300, 0)	(−200, −50)

図 3: セカンドプライスオークションの利得行列

- これに対し (2) のように考えれば、まずプレイヤー 2 の 500 以外の戦略が削除されて、プレイヤー 2 は 500 だけが残る。これをもとにプレイヤー 1 の戦略を考えれば、500 と 600 だけが支配され、、(100, 500),(200, 500),(300, 500),(400, 500) が解となる。

- (3) で考えれば、結果は (200, 500) で「支配されないナッシュ均衡」と同じになる。

- この場合はプレイヤー 1 の弱支配戦略が 200 で、プレイヤー 2 の弱支配戦略が 2 であるので (200, 500) が弱支配戦略均衡である。このような意味で (200, 500) を唯一のゲームの解と考えるべきだと思われる。

- ただし上記のような場合は、多くのナッシュ均衡と弱支配戦略に大きくずれが生じる。このような場合は人々が他人の行動を予測するのが安定ではないという主張もある。(Cason, Saijo, Sjostrom, Yamato (2006), Saijo, Sjostrom, Yamato (2007) などを参照せよ)

演習 6.6

変則じゃんけんのナッシュ均衡の求め方については、テキストに載っているのでこれに従えばよい。グミ・チョコレート・パインの利得行列は図 4 のようになる。

プレイヤー 1 の視点で考える。プレイヤー 2 はグー、チョキ、パーをそれぞれ q_1,q_2,q_3(q_1+q_2+q_3 = 1) という混合戦略を選択しているものとする。このときプレイヤー 1 が、グー、チョキ、パーという純粋戦略を選んだときの期待利得は、それぞれ $2q_2$,$6q_3$,$3q_1$ となる。

ここで q_1,q_2,q_3 をプレイヤー 2 のナッシュ均衡の混合戦略であるとすれば、この変則じゃんけんでは、純粋戦略のナッシュ均衡は存在しないことから、プレイヤー 1 のグー、チョキ、パーの中のどれか 1 つの期待利得が高くなってはいけないはずである。したがって 3 つの期待利得がすべて等しく

$$2q_2 = 6q_3 = 3q_1$$

となる。この条件と $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ を合わせて解くと $q_1 = \frac{1}{3}$,$q_2 = \frac{1}{2}$,$q_3 = \frac{1}{6}$ となる。したがって答えは、グーが $\frac{1}{3}$、チョキが $\frac{1}{2}$、パーが $\frac{1}{6}$ である。

演習 7.1

一般の展開形ゲームでは、プレイヤーは各点ではなく、1 つの情報集合で 1 つの代替案を選ぶことに注意しよう。問 1 と問 2 では、プレイヤー 2 の情報集合が異なるだけで、ゲームの木は全く同じであるが、ゲームの解はプレイヤー 1 の最初の選択から逆になる。

必ずしもバックワードインダクションで後ろから順に解けるわけではなく、まとまった「適切なサブゲーム」を探し出し、標準形ゲームに直すことが必要である。

1 \ 2	グー	チョキ	パー
グー	(0, 0)	(2, 0)	(0, 3)
チョキ	(0, 2)	(0, 0)	(6, 0)
パー	(3, 0)	(0, 6)	(0, 0)

図 4: グミ・チョコレート・パイン

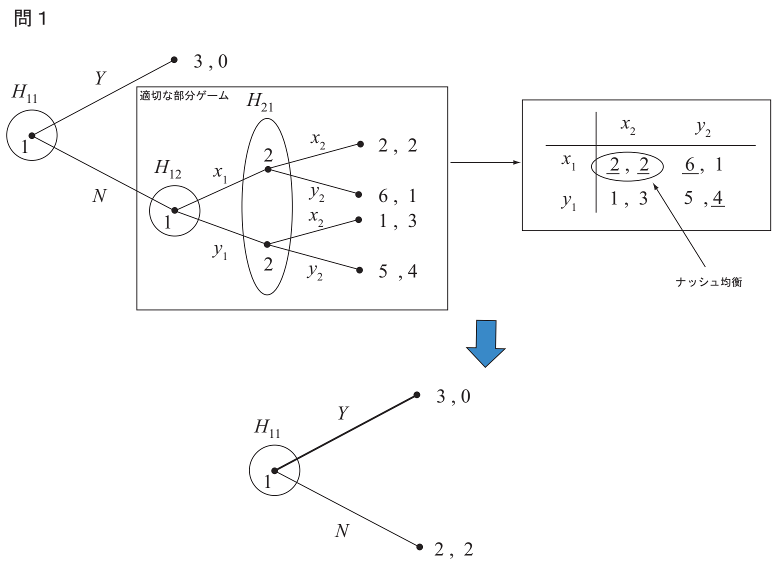

図 5: 問 2 の部分ゲーム完全均衡の求め方

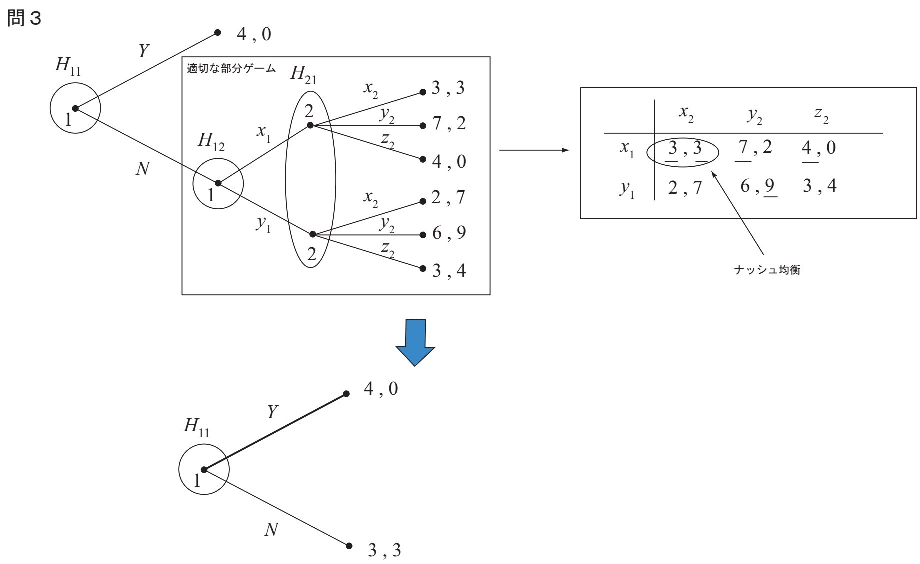

図 6: 問 3 の部分ゲーム完全均衡の求め方