

## 第 17 回宿題

- 提出課題を解き，kibaco に答を入力して下さい。
- 自習課題は，自分で講義の理解を深めるために自習するもので提出する必要はありません。

提出課題 17.1 (多段階交渉の新しい問題) 交渉ゲームにおいて，ここまで後手は「承諾する場合と拒否する場合で利得が同じときは拒否する」と考えてきたが，ここでは承諾すると考え，多段階の交渉問題を考察する（計算が簡単になる）．ここでは，プレイヤー 1 とプレイヤー 2 が 100 万円を分ける交渉ゲームを考える．以下の問いに答えなさい．kibaco には，各問題で kibaco が尋ねている部分だけ入力せよ．

まず 1 段階の最後通牒ゲームを考える．プレイヤー 1 が，自分の取り分  $x$  を提案し，プレイヤー 2 は承諾か拒否を選ぶ．承諾した場合は，プレイヤー 1 の配分は  $x$ ，プレイヤー 2 の配分は  $100 - x$  であり，その配分が利得となる．拒否した場合は双方 0 であるとする．その配分が利得となる．

問題 1 この問題のゲームの解をバックワードインダクションで求める．

- (1) 最終プレイヤーであるプレイヤー 2 は， $x$  がいくら以下だと承諾（いくらを超えると拒否）するか．
- (2) プレイヤー 1 が提案する  $x$  はいくつか．またプレイヤー 2 はそれを承諾するか，拒否するか．
- (3) 結果的にゲームの解では，プレイヤー 1 とプレイヤー 2 の利得はいくらになるか．

次に 2 段階の交渉ゲームを考える．第 1 段階では，プレイヤー 2 が自分の取り分  $y$  を提案し，プレイヤー 1 は承諾か拒否を選ぶ．承諾した場合は，プレイヤー 2 の配分は  $y$ ，プレイヤー 1 の配分は  $100 - y$  である．拒否した場合は第 2 段階へ移る．第 2 段階では，プレイヤー 1 が，自分の取り分  $x$  を提案し，プレイヤー 2 は承諾か拒否を選ぶ．承諾した場合は，プレイヤー 1 の配分は  $x$ ，プレイヤー 2 の配分は  $100 - x$  であり，拒否した場合は双方 0 であるとする．交渉が 1 段階遅れると，配分を割引因子  $R$  で割引かれた値が利得になると考える（配分と利得という言葉を区別する）．このゲームの解を求めたい．

問題 2 まず  $R = 0.8$  として考えてみよう．

- (1) 第 2 段階での結果は問題 1 と同じになることに注意し，バックワードインダクションで解く．まず第 1 段階でプレイヤー 1 が提案を「拒否」した場合を考える．このとき，第 2 段階でのゲームの解は問題 1 と同じになることから，プレイヤー 1 とプレイヤー 2 の（第 1 段階の価値に割引いた）利得は，それぞれいくらになるか．
- (2) このことから第 1 段階において，プレイヤー 1 は自分の配分がいくつ以上の提案を承諾し，いくつ未満の提案を拒否するか．またそれは  $y$  で考えると， $y$  がいくら以下であれば承諾することになるか？
- (3) このことから第 1 段階でプレイヤー 2 が提案する  $y$  はいくらか．プレイヤー 1 は承諾と拒否のどちらを選ぶか．（問題は続きます）
- (4) ゲームの解では結果的に第 1 段階で交渉が決着することが分かる．プレイヤー 1 と 2 の配分はどのようになるか．

問題 3 一般の  $R$  で 2 段階交渉ゲームを考えてみよう．

- (1) もし第 1 段階でプレイヤー 1 が提案を「拒否」した場合，プレイヤー 1 とプレイヤー 2 の（第 1 段階の価値に割引いた）利得は，それぞれいくらになるか．

- (2) このことから第1段階において、プレイヤー1は自分の配分がいくつ以上の提案を承諾し、いくつ未満の提案を拒否するか。またそれは  $y$  で考えると、 $y$  がいくら以下であれば承諾することになるか？
- (3) 第1段階でプレイヤー2が提案する  $y$  はいくらか。プレイヤー1は承諾と拒否のどちらを選ぶか。
- (4) ゲームの解では結果的に第1段階で交渉が決着することが分かる。プレイヤー1と2の配分は、それぞれどのようになるか。

次に3段階の交渉ゲームを考える。第1段階では、プレイヤー1が自分の取り分  $z$  を提案し、プレイヤー2は承諾か拒否を選ぶ。拒否した場合は第2段階へ移る。第2段階では、プレイヤー2が自分の取り分  $y$  を提案し、プレイヤー1は承諾か拒否を選ぶ。拒否した場合は第3段階へ移る。第3段階では、プレイヤー1が、自分の取り分  $x$  を提案し、プレイヤー2は承諾か拒否を選ぶ。拒否した場合は双方0であるとする。交渉が1段階遅れると配分は割引因子  $R$  で割り引かれた値が利得になる。

問題4 第2段階以降の結果は問題3と同じになることに注意し、バックワードインダクションで解いてみよう。

- (1) もし第1段階でプレイヤー2が提案を「拒否」した場合、ゲームの解において(第2段階以降の結果は問題3と同じになることから)、プレイヤー1とプレイヤー2の利得(第1段階の価値に割引いたもの)は、それぞれいくらになるか。
- (2) このことから第1段階において、プレイヤー2は自分の配分がいくつ以上の提案を承諾し、いくつ未満の提案を拒否するか。またそれは  $z$  で考えると、 $z$  がいくら以下であれば承諾することになるか？
- (3) 第1段階でプレイヤー1が提案する  $z$  はいくらか。プレイヤー2は承諾と拒否のどちらを選ぶか。
- (4) ゲームの解はやはり結果的に第1段階で交渉が決着することが分かる。プレイヤー1と2の配分は、それぞれどのようになるか。

以下は宿題ではないが興味があれば  $n$  段階交渉ゲームはどうなるか考察し、各プレイヤーの利得(ゲームの解はやはり結果的に第1段階で交渉が決着するので、プレイヤー1と2の第1段階での配分は、そのまま利得となる)はどうなるか求めよ。このとき  $n$  が偶数の時と奇数の時で分けて考えなければならない。以下、 $n$  が偶数で問題を考えてみよう。

- (1) この設定では、常にプレイヤー1が最後通牒権を持っているが、その利得は  $n$  が大きくなるほど減少することを示せ。
- (2)  $n \rightarrow \infty$  のとき、プレイヤーの利得はどうなるか？