ゲーム理論２ 宿題解答 (第 13 回-第 22 回)

- 宿題の解答を以下に記します．問題がテキストの演習問題の場合は，解答を省略することがあります．テキストの解答については補足解説がホームページに公開されています．
- 解答には誤りがあるかもしれません．注意してください．もし不明な点があれば，メールで知らせて下さい．アドレスは hp2(at mark)nabenavi.net まで．

第 13 回宿題解答

提出課題 13.1 利得行列は以下の図 *1* のようになります．

ゲーム１

1 \ 2	x_2	y_2
(Y, x_1)	(4 , 4)	(-6 , 10)
(Y, y_1)	(10 , -6)	(0 , 0)
(N, x_1)	(2 , 2)	(2 , 2)
(N, y_1)	(2 , 2)	(2 , 2)

ゲーム２

1 \ 2	x_2	y_2
(x_1, Y)	(2 , 20)	(-6 , 10)
(x_1, N)	(4 , 4)	(-6 , 10)
(y_1, Y)	(10 , -6)	(0 , 0)
(y_1, N)	(10 , -6)	(0 , 0)

図 1: 戦略形ゲームへの変換

第 14 回宿題解答

自習課題 14.1 *(*テキスト *P.274* 演習 *7.1* の解答詳細）問 *2*，問 *3* の部分ゲーム完全均衡の求め方を図 *2*，図 *3* に示します．解答はテキストを参照のこと．

自習課題 14.2 *(*テキスト *P.274* 演習 *7.2* の解答詳細）

問 *1*，問 *2* の部分ゲーム完全均衡の求め方を図 *4*，図 *5* に示します．解答はテキストを参照のこと．

自習課題 14.3 以下のとおり．

問題 1

プレイヤー１	H_{11}	Y
	H_{12}	y_1
プレイヤー２	H_{21}	x_2

問題 2

プレイヤー１	H_{11}	x_1
	H_{12}	z_1
	H_{13}	z_1
プレイヤー２	H_{21}	y_2

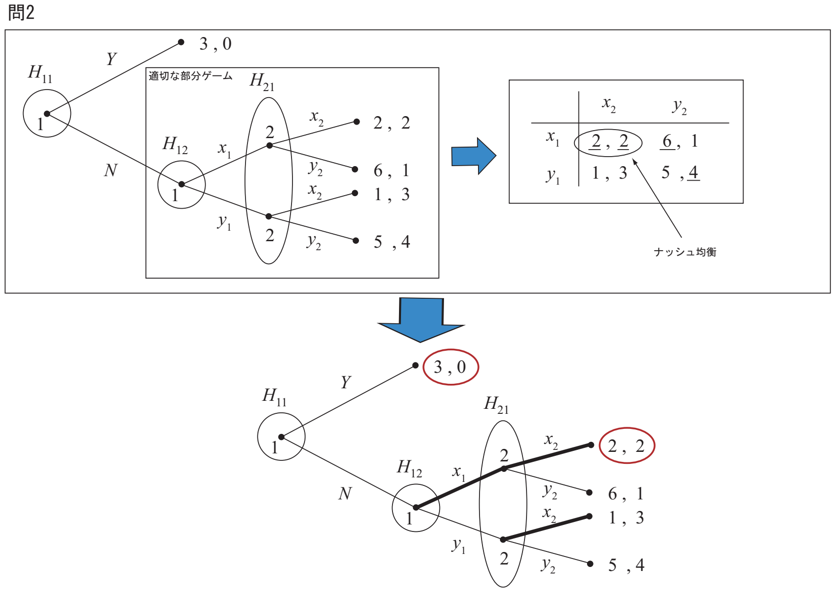

図 2: テキスト演習 7.1 問 2：部分ゲーム完全均衡の求め方

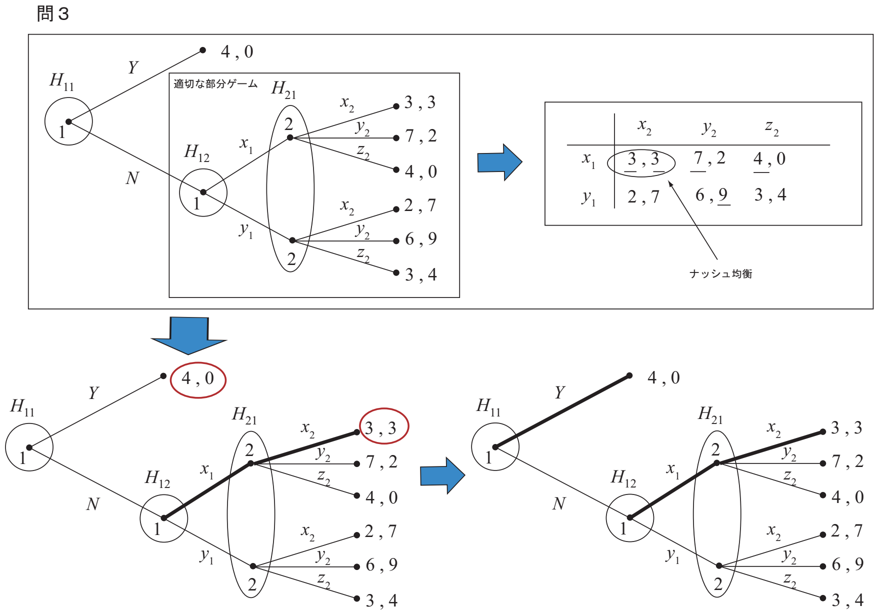

図 3: テキスト演習 7.1 問 3：部分ゲーム完全均衡の求め方

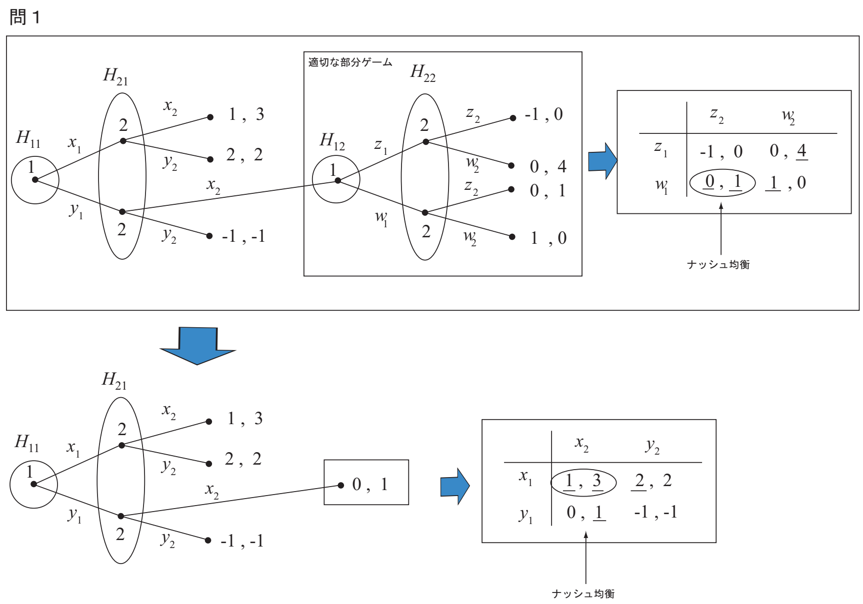

図 4: テキスト演習 7.2 問 1：部分ゲーム完全均衡の求め方

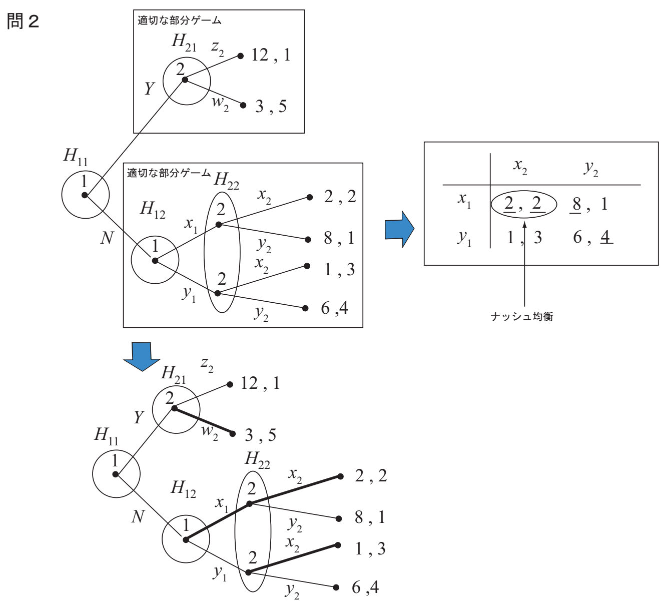

図 5: テキスト演習 7.2 問 2：部分ゲーム完全均衡の求め方

提出課題 14.1 各情報集合における選択は以下のとおり．

プレイヤー 1	H_{11}	N
	H_{12}	x_1
プレイヤー 2	H_{21}	y_2

したがって選択肢は *(F)*

自習課題 14.4 *(解説)* 問 *1,* 問 *2,* 問 *3* の戦略形ゲームを図 *6* に示す．ナッシュ均衡，支配されないナッシュ均衡はテキストに示してある．

問１

1 \ 2	x_2	y_2
Y	(2, 5)	(2, 5)
(N,x_1)	(-1, 0)	(1, 2)
(N,y_1)	(-2, 0)	(3, 2)

問２

1 \ 2	x_2	y_2
(x_1,z_1)	(4, 0)	(2, 4)
(x_1,w_1)	(1, 2)	(2, 4)
(y_1,z_1)	(3, 3)	(0, 0)
(y_1,w_1)	(3, 3)	(0, 0)

問３

1 \ 2	x_2	y_2
x_1	(4, 1)	(0, 2)
y_1	(5, 1)	(0, 1)
z_1	(3, 2)	(3, 2)

図 6: テキスト演習 7.4：戦略形ゲーム

- 問 *1,* 問 *2* では支配されないナッシュ均衡と部分ゲーム完全均衡が一致している．
- 問 *3* においては，適切な部分ゲームは（全体のゲームを除いて）存在しない．すなわち「ナッシュ均衡=部分ゲーム完全均衡」となる．
- したがって問 *3* では部分ゲーム完全均衡では均衡を精緻化できない．一方，支配されないナッシュ均衡は，ナッシュ均衡を精緻化する．

自習課題 14.5 **問題 1:部分ゲーム完全均衡** $((N_1, D_1), y_2)$ *(*選択肢 ***(H))***

問題 2:戦略形ゲームとナッシュ均衡 戦略形ゲームは図 *7* に示した．ナッシュ均衡は $((U_1, M_1), x_2)$, $((U_1, D_1), x_2)$,$((N_1, D_1), y_2)$ *(*選択肢 ***(A,C,H))***

問題 3:支配されないナッシュ均衡 プレイヤー 2 の戦略 x_2 は y_2 に支配される．したがって x_2 を用いたナッシュ均衡はダメ．プレイヤー 1 の戦略 (N_1, M_1) は (U_1, M_1) 支配されるが，(N_1, M_1) を用いたナッシュ均衡はないので関係がない．したがって支配されないナッシュ均衡は $((N_1, D_1), y_2)$ のみである． *(*選択肢 ***(H))***

問題 4:繰り返し削除による解 $((N_1, D_1), y_2)$ *(*選択肢 ***(H))***

提出課題 14.2 **問題 1:部分ゲーム完全均衡** (N_1, D_2, y_3)*(*選択肢 ***(H))***

問 1

1 \ 2	x_2	y_2
(U_1, M_1)	(2, 2)	(2, 2)
(U_1, D_1)	(2, 2)	(2, 2)
(N_1, M_1)	(0, 0)	(1, 1)
(N_1, D_1)	(1, 0)	(4, 1)

問 2

3: x_3

1 \ 2	M_2	D_2
U_1	(2, 2, 0)	(2, 2, 0)
N_1	(0, 0, 2)	(1, 1, 1)

3: y_3

1 \ 2	M_2	D_2
U_1	(2, 2, 0)	(2, 2, 0)
N_1	(1, 1, 1)	(4, 4, 2)

問 2 はプレイヤーの順序を変えて以下のようにしても良いだろう

1: U_1

2 \ 3	x_3	y_3
M_2	(2, 2, 0)	(2, 2, 0)
D_2	(2, 2, 0)	(2, 2, 0)

1: N_1

2 \ 3	x_3	y_3
M_2	(0, 0, 2)	(1, 1, 1)
D_2	(1, 1, 1)	(4, 4, 2)

図 7: 問題 14.5：戦略形ゲーム

問題 2:戦略形ゲームとナッシュ均衡 戦略形ゲームは図 *7* に示した．ナッシュ均衡は (U_1, M_2, x_3), (U_1, M_2, y_3), (U_1, D_2, x_3),(N_1, D_2, y_3) ***(選択肢 (A),(B),(C),(H))***

問題 3:支配されないナッシュ均衡 プレイヤー 2 の戦略 M_2 は D_2 に支配される．したがって M_2 を用いたナッシュ均衡はダメ．プレイヤー 1 と 3 の戦略には支配関係はない．したがって支配されないナッシュ均衡は (U_1, D_2, x_3),(N_1, D_2, y_3) ***(選択肢 (C),(H))***

問題 4:繰り返し削除による解 プレイヤー 2 の戦略 M_2 は D_2 に支配されるので，プレイヤー 2 の戦略 M_2 を削除する．その削除したゲームでは，プレイヤー 3 の戦略 x_3 は y_3 に支配され削除される．そうなればプレイヤー 1 の戦略 U_1 は N_1 に支配され削除される．したがって (N_1, D_2, y_3) が解． ***(選択肢 (H))***

自習問題 *14.4* の問 *3* は，部分ゲーム完全均衡では均衡を精緻化して *1* つに絞り込めないが，支配されないナッシュ均衡が，ナッシュ均衡を精緻化し *1* つに絞り込める例であった．これに対し，この提出問題 *14.2* は，支配されないナッシュ均衡では均衡を精緻化して *1* つに絞り込めず，部分ゲーム完全均衡で *1* つに絞り込める例である．

第 15 回宿題解答

提出課題 15.1 単記投票は A 案，決戦つき単記投票は B 案，ボルダ投票は C 案．単純多数決勝者（コンドルセ勝者）とは，すべての案に多数決で勝つ案である．A 案と C 案の多数決をすると C 案が選ばれ，B 案と C 案の多数決をしても C 案が選ばれるので，C 案がコンドルセ勝者となる．

自習課題 15.1 問題 1 利得行列は図 8 となる．

問題 2 ナッシュ均衡は (X, X, X)，(Y, Y, Y)，(Z, Z, Z)，(X, Y, Y)，(X, X, Z) の 5 つである．ここで A 君の Y，Z，B 君の Z，C 君の X は支配される．支配されないナッシュ均衡は (X, Y, Y)，(X, X, Z) の 2 つである．

C	X			Y			Z		
A \ B	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
X	(2,1,0)	(2,1,0)	(2,1,0)	(2,1,0)	(1,2,1)	(2,1,0)	(2,1,0)	(2,1,0)	(0,0,2)
Y	(2,1,0)	(1,2,1)	(2,1,0)	(1,2,1)	(1,2,1)	(1,2,1)	(1,2,1)	(1,2,1)	(0,0,2)
Z	(2,1,0)	(0,0,2)	(0,0,2)	(0,0,2)	(1,2,1)	(0,0,2)	(0,0,2)	(0,0,2)	(0,0,2)

図 8: 単記投票ゲームの利得行列

提出課題 15.2 支配されないナッシュ均衡は (X, Y, Y)，(X, X, Z) の 2 つであり，それぞれ Y 案，X 案が選ばれるので，支配されないナッシュ均衡で選ばれる可能性のある案は X と Y．

第 16 回宿題解答

提出課題 16.1 $1-B$,$2-C$,$3-A$,$4-D$

第 17 回宿題解答

提出課題 17.1 問題 1

(1) $x \leq 100$ で承諾

(2) プレイヤー 1 は $x = 100$ を提案，プレイヤー 2 は承諾．

(3) プレイヤー 1 の利得 100，プレイヤー 2 の利得 0．

問題 2

(1) プレイヤー 1 とプレイヤー 2 の（第 1 段階の価値に割引いた）第 2 段階の利得は 80 と 0 である．

(2) 第 1 段階において，プレイヤー 1 は**自分の配分が** 80 以上だと提案を承諾し，80 未満の提案を拒否する．それは y **で考えると，**$y \leq 20$ だと承諾する．

(3) プレイヤー 2 は $y = 20$ を提案し，プレイヤー 1 は承諾する．

(4) プレイヤー 1 の利得 80，プレイヤー 2 の利得 20．

問題 3

(1) プレイヤー 1 とプレイヤー 2 の（第 1 段階の価値に割引いた）第 2 段階の利得は $100R$ と 0 である．

(2) 第 1 段階において，プレイヤー 1 は**自分の配分が** $100R$ 以上だと提案を承諾し，$100R$ 未満の提案を拒否する．それは y **で考えると** $y \leq 100(1-R)$ だと承諾する．

(3) プレイヤー 2 は $y = 100(1-R)$ を提案し，プレイヤー 1 は承諾する．

(4) プレイヤー 1 の利得 $100R$，プレイヤー 2 の利得 $100(1-R)$．

問題 4

(1) プレイヤー 1 の利得 $100R^2$，プレイヤー 2 の利得 $100R(1-R)$．

(2) 第 1 段階において，プレイヤー 2 は**自分の配分が** $100R(1-R)$ 以上だと提案を承諾し，$100R^2$ 未満の提案を拒否する．それは z **で考えると，**$z \leq 100 - 100R(1-R)$ であれば承諾する．

(3) プレイヤー 1 はが提案する $z = 100 - 100R(1-R)$ を提案し，プレイヤー 2 は承諾する．

(4) プレイヤー 1 の利得 $100 - 100R(1-R)$，プレイヤー 2 の利得 $100R(1-R)$．なおプレイヤー 1 の利得は展開すると $100 - 100R + 100R^2$ である．

n 段階交渉ゲーム　まず n 段階交渉ゲームを考える前に 4 段階交渉ゲームを考察してみよう．4 段階では，第 1 段階ではプレイヤー 2 が提案し，プレイヤー 1 が承諾か拒否を選ぶが，プレイヤー 1 は拒否すると 3 段階交渉ゲームになり，上記の問題 3(4) よりその利得を第 1 段階に換算するとプレイヤー 1 の利得 $R(100-100R+100R^2)$ である．プレイヤー 1 は自分の配分が $R(100-100R+100R^2)$ 以上だと承諾する．プレイヤー 2 は自分の取り分を $100-R(100-100R+100R^2)$，プレイヤー 1 の取り分を $R(100-100R+100R^2)$ で提案し，プレイヤー 1 はそれを承諾する．結果として，プレイヤー 1 の利得は

$$100R-100R^2+100R^3$$

であり，プレイヤー 2 の利得は

$$100-100R+100R^2-100R^3$$

となる．

プレイヤー 1 の利得は 1 段階ゲームでは 100，2 段階ゲームでは $100R$，3 段階ゲームでは $100-100R+100R^2$，4 段階ゲームでは $100R-100R^2+100R^3$ であった．このことから n 段階ゲームでのプレイヤー 1 の利得は，n が奇数の時

$$100-100R+100R^2-100R^3+100R^4+\cdots+100(-R)^{n-1}=\frac{100\{1-(-R)^n\}}{1-R}$$

n が偶数の時

$$100R-100R^2+100R^3-100R^4+\cdots+100(-R)^{n-1}=\frac{100R\{1-(-R)^{n-1}\}}{1-R}$$

であると予想される．

この予想をもう少し厳密に示してみよう．n 段階交渉ゲームで n が偶数のときを考える．この時は $n=2m$ と書くことができる．$m=1$ ならば 2 段階交渉ゲーム，$m=2$ ならば 4 段階交渉ゲームである．

そこで $n=2m$ の時のゲームの解における**プレイヤー 1 の利得**を a_m とおく．ゲームが 2 段階少ない $n=2(m-1)$ 段階ゲームのプレイヤー 1 の利得 a_{m-1} と a_m にはどのような関係があるか考える．

まず $n=2(m-1)$ 段階ゲーム $(n=2m-2)$ から 1 段階増えた $n=2m-1$ 段階ゲームを考える．第 1 段階ではプレイヤー 1 が提案し，プレイヤー 2 が承諾か拒否を選ぶ．プレイヤー 2 は拒否すると $n=2(m-1)$ 段階ゲームになるが，そのときの利得は $100-a_{m-1}$ であり，第 1 段階の利得に割引くと $R(100-a_{m-1})$ である．したがってプレイヤー 2 は自分の配分が $R(100-a_{m-1})$ 以上だと承諾する．このことよりプレイヤー 1 は第 1 段階で自分の取り分を $100-R(100-a_{m-1})$ で提案し，プレイヤー 2 は承諾する．プレイヤー 1 の利得は $100-100R+a_{m-1}R$，である．

さらに 1 段階増えて $n=2m$ 段階ゲームを考える．第 1 段階ではプレイヤー 2 が提案し，プレイヤー 1 が承諾か拒否を選ぶ．プレイヤー 1 は拒否すると $n=2m-1$ 段階ゲームになるが，そのときのプレイヤー 1 の利得は $100-100R+a_{m-1}R$ であり，第 1 段階の利得に割引くと

$$R(100-100R+a_{m-1}R)=100R-100R^2+a_{m-1}R^2$$

である．プレイヤー 1 は自分の配分が $100R - 100R^2 + a_{m-1}R^2$ 以上だと承諾する．このことよりプレイヤー 2 は第 1 段階で，自分の取り分を $100 - (100R - 100R^2 + a_{m-1}R^2)$ を提案し，プレイヤー 1 は承諾する．

プレイヤー 1 の利得は $100R - 100R^2 + a_{m-1}R^2$ であるので，

$$a_m = 100R - 100R^2 + a_{m-1}R^2$$

となることが分かる．これから

$$\begin{aligned} a_m &= 100R - 100R^2 + a_{m-1}R^2 \\ &= 100R - 100R^2 + (100R - 100R^2 + a_{m-2})R^2 \\ &= (100R - 100R^2) + (100R - 100R^2)R^2 + a_{m-2}R^4 \\ &\cdots (100R - 100R^2) + (100R - 100R^2)R^2 + \cdots + (100R - 100R^2)R^{2(m-2)} + a_1R^{2(m-1)} \end{aligned}$$

を得る．a_1 は 2 段階ゲーム ($n = 2$) のプレイヤー 1 の利得であるから，$a_1 = 100R$ である．よって，

$$\begin{aligned} a_m &= (100R - 100R^2) + (100R - 100R^2)R^2 + \cdots + (100R - 100R^2)R^{2(m-2)} + 100R \cdot R^{2(m-1)} \\ &= 100R - 100R^2 + 100R^3 - 100R^4 + \cdots + 100R^{2m-3} - 100R^{2m-2} + 100R^{2m-1} \end{aligned}$$

となる．$n = 2m$ より，n 段階ゲームで n が偶数の時のプレイヤー 1 の利得は

$$100R - 100R^2 + 100R^3 - 100R^4 + \cdots + 100R^{n-3} - 100R^{n-2} + 100R^{n-1} = \frac{100R\{1 - (-R)^{n-1}\}}{1 - R}$$

であることが確かめられた．

このとき，利得は n が大きくなるほど減少することが分かる．また $n \to \infty$ のとき，プレイヤー 1 の利得は $\frac{100R}{1-R}$ となる．

第 18 回宿題解答

自習課題 18.1

問題 1(1)	プレイヤー 1,2 の利得は共に	$4+2R+4R^2+4R^3+4R^4$
		$=\frac{4(1-R^5)}{1-R}$
問題 1(2)	プレイヤー 1,2 の利得は共に	$4+2R+4R^2+\cdots$
		$=\frac{4}{1-R}$
問題 2(1)	プレイヤー 1 の利得：	$6+0R+0R^2+0R^3+0R^4=6$
	プレイヤー 2 の利得：	$-2+0R+0R^2+0R^3+0R^4=-2$
問題 2(2)	プレイヤー 1 の利得：	$6+0R+0R^2\cdots=6$
	プレイヤー 2 の利得：	$-2+0R+0R^2\cdots=-2$

提出課題 18.1 **問題 *1*** 5 回繰り返した時の履歴は $(C,D)(D,C)(C,D)(D,C)(C,D)$ である．

問題 *2* $2m$ 回繰り返した時，履歴は $(C,D)(D,C)(C,D)(D,C)\ldots(C,D)(D,C)$ となる．プレイヤー 1 の利得は

$$
\begin{aligned}
& -2+6R-2R^2+6R^3\cdots-2R^{2m-2}+6R^{2m-1} \\
= & (-2+6R)+R^2(-2+6R)+R^4(-2+6R)\ldots R^{2m-2}(-2+6R) \\
= & (-2+6R)(1+R^2+R^4+\cdots+R^{2m-2}) \\
= & (-2+6R)(1+R^2+R^4+\cdots+R^{2(m-1)})
\end{aligned}
$$

となる．ここで $a=R^2$ とおくと上の式は，

$$(-2+6R)(1+a+a^2+a^3\cdots+a^{m-1})=\frac{(-2+6R)(1-a^m)}{1-a}$$

となる．したがって答は $\frac{(-2+6R)(1-R^{2m})}{1-R^2}$

問題 *3* 同様にプレイヤー 2 の利得は，

$$
\begin{aligned}
& 6-2R+6R^2-2R^3\cdots+6R^{2m-2}-2R^{2m-1} \\
= & (6-2R)(1+R^2+R^4+\cdots+R^{2(m-1)}) \\
= & \frac{(6-2R)(1-R^{2m})}{(1-R^2)}
\end{aligned}
$$

問題 4,5 プレイヤー 1 と 2 の利得はそれぞれ $\frac{-2+6R}{1-R^2}$ と $\frac{6-2R}{1-R^2}$

第 19 回宿題解答

提出課題 19.1 **問題 1** くじの期待金額は $\frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 54 = 36$ で 36 万円.

問題 2 くじの期待効用は

$$\frac{1}{3} \times u(0) + \frac{2}{3} \times u(100) = \frac{1}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

である．確実性同値な金額を z とすると $u(z) = \frac{2}{3}$ となる．$\left(\frac{z}{54}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$ より，$\frac{z}{54} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ となり，$z = 54 \times \frac{8}{27} = 16$. 確実性同値額は 16 万円.

問題 3 リスクプレミアムは，(期待金額) − (確実性同値額) $= 36 - 16$ なので 20 万円.

問題 4 リスク回避的

自習課題 19.1 **問題 1** 保険に入らなかった時の期待効用は，

$$0.1 \times u(0) + 0.9 \times u(20) = 0.1 \times 0 + 0.9 \times 1 = 0.9$$

なので，$u(20-x) \geq 0.9$ ならば保険に入る．$\sqrt{\frac{20-x}{20}} \geq 0.9$ を解けば良い．両辺を *2* 乗して $\frac{20-x}{20} \geq 0.81$ で，これを解いて $x \leq 3.8$ となる．3.8 万円以下なら保険に入る．

$u(20-x) = 0.9$ となる確実性同値額を求めていると考えても良い．

問題 2 問題 *1* と同様で $\left(\frac{20-x}{20}\right)^{\frac{1}{4}} \geq 0.9$ を解けば良い．両辺を *4* 乗すると $\frac{20-x}{20} \geq 0.656$ で，これを解いて $x \leq 6.9$ となる．6.9 万円以下なら保険に入る．この場合は，問題 *1* よりリスク回避的なので，問題 *1* より高い金額でも保険に入る．

問題 3 問題 *1* が 3.8，問題 *2* が 6.4 なので，5 万円で入るような効用関数は $\frac{1}{4} < z < \frac{1}{2}$ であると予想される．正確には $\left(\frac{20-5}{20}\right)^z \geq 0.9$ を解けば良い．この式は $\left(\frac{15}{20}\right)^z \geq 0.9$ であり，小数に直すと $(0.75)^z \geq 0.9$ である．

両辺の常用対数を取ると，$\log_{10}(0.75)^z \geq \log_{10} 0.9$ となる．したがって

$$z \log_{10} 0.75 \geq \log_{10} 0.9$$

を得る．$\log_{10} 0.75 = -0.12$，$\log_{10} 0.9 = -0.046$ なので，$-0.12z \geq -0.046$ を解いて $z \leq 0.37$ である．

問題 4 100 人が保険に入れば，掛け金の収入は 380 万円となる．平均で 10 人が事故を起こすので，保険金の支出は 200 万円である．従って，保険会社であるあなたは平均的には 180 万円の利益が得られる．

問題 5 17 人が事故を起こすので，保険金の支出は 340 万円である．従って，保険会社であるあなたは 99% の確率で 40 万円の利益が得られる．

問題 6 p の確率で事故が起き，$1-p$ の確率で事故が起きないとき，n 人の人間のうち x 人が事故を起こす確率は $B(n,p)$ の二項分布で与えられる．n 人の人間のうち x 人が事故を起こす確率は $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ である．*EXCEL* では，`@BINOM.DIST(y,n,p,TRUE)` という関数で事故が y 人以下である確率を求めることができる．`1-@BINOM.DIST(17,100,0.1,TRUE)` を計算すると 0.989 となり，*17* 人以下の事故が起きる確率が約 99% であることが分かる．

古典的な統計学のテキストでは，二項分布は簡単には計算出来ないため，正規分布で近似を行う．n が十分大きい時には，x 人が事故を起こす確率は平均 np，分散 $np(1-p)$ の正規分布で近似できる．

X 人が事故を起こすとき，$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ は標準正規分布 $N(0,1)$ で近似できる．$n=100$,$p=0.1$,$X=17$ とすると $\frac{X-np}{np(1-p)}=7.37$ である．正規分布表では 3 を超える数字が起きる確率はほぼ 0 であり，*17* 人以下の事故が起きる確率はほぼ 100% である．

第 20 回宿題解答

提出課題 20.1 不完備情報ゲームの利得行列と最適反応戦略は図 *9* の通り．ベイズナッシュ均衡は「プレイヤー 1 のタイプ A が D，プレイヤー 1 のタイプ B が U，プレイヤー 2 が L を選択する」となる．($((D,U),L)$ と書いて良い）

1 \ 2	L	R
(U , U)	$((0, \underline{3}), 9)$	$((\underline{4}, 0), \underline{12})$
(U , D)	$((0, 1), \underline{5})$	$((\underline{4}, \underline{2}), 4)$
(D , U)	$((\underline{3}, \underline{3}), \underline{10})$	$((1, 0), 8)$
(D , D)	$((\underline{3}, 1), \underline{6})$	$((1, \underline{2}), 0)$

図 9: 不完備情報ゲームの利得行列

第 21 回宿題解答

自習課題 21.1 *19.1*

問題 1 企業 1 高費用タイプの最適反応関数は

$$x_{1H}=-\frac{1}{2}x_2+36,$$

企業 1 低費用タイプの最適反応関数は

$$x_{1L}=-\frac{1}{2}x_2+48,$$

企業 2 の最適反応関数は

$$x_2=-\frac{1}{8}x_{1H}-\frac{3}{8}x_{1L}+48$$

である．

問題 2 ベイズナッシュ均衡における企業 1 高費用タイプ，企業 2 低費用タイプ，企業 2 の生産量は，それぞれ $x_{1H}=19$，$x_{1L}=31$，$x_2=34$ である．

問題 3 ベイズナッシュ均衡において，企業 1 が高費用タイプの場合の財の価格は 67 である．

提出課題 21.1 不完備情報におけるベルトラン競争についてはテキストにも載っていないので，簡単な解説を加えて解答する．

企業 1 高費用タイプの利益を π_{1H} とする．企業 1 高費用タイプは自分の製品の価格は p_{1H} で，相手の企業 2 の製品の価格は p_2 であることを知っている．したがって需要量は $q_1=108-p_{1H}+p_2$ であることが分かるので，π_{1H} は

$$\begin{aligned}\pi_{1H} &= p_{1H}(108-p_{1H}+p_2)-48(108-p_{1H}+p_2)\\ &= -p_{1H}^2+(156+p_2)p_{1H}-48p_2-5184\end{aligned}$$

である．これを p_{1H} で偏微分すると，

$$\frac{\partial \pi_{1H}}{\partial p_{1H}}=-2p_{1H}+156+p_2$$

となる．$\frac{\partial \pi_{1H}}{\partial p_{1H}}=0$ を解くことにより，企業 1 高費用タイプの最適反応関数は

$$p_{1H}=\frac{1}{2}p_2+78 \tag{1}$$

である．同様に企業 1 低費用タイプのの利益を π_{1L} とすると，

$$\begin{aligned}\pi_{1L} &= p_{1L}(108-p_{1L}+p_2)-24(108-p_{1L}+p_2)\\ &= -p_{1L}^2+(132+p_2)p_{1L}-24p_2-2592\end{aligned}$$

である．これを p_{1L} で偏微分すると，

$$\frac{\partial \pi_{1L}}{\partial p_{1L}}=-2p_{1L}+132+p_2$$

となる．$\frac{\partial \pi_{1L}}{\partial p_{1L}}=0$ を解くことにより，企業 1 高費用タイプの最適反応関数は

$$p_{1L}=\frac{1}{2}p_2+66 \tag{2}$$

である．

企業 2 の利益を π_2 とする．企業 2 は自分の製品の価格は p_2 であることが分かるが，相手企業の製品価格は確実には分からず，p_{1H} である確率が $\frac{1}{4}$，p_{1L} である確率が $\frac{3}{4}$ であると予想していることになる．そこで π_2 は，需要量が $q_2=72-p_2+p_{1H}$ であるような利益である確率が $\frac{1}{4}$，$q_2=72-p_2+p_{1H}$ であるような利益である確率が $\frac{3}{4}$ と考えた期待値となるので，

$$\begin{aligned}\pi_2 &= \frac{1}{4}\left\{p_2(72-p_2+p_{1H})-24(72-p_2+p_{1H})\right\} \qquad (3)\\ &+ \frac{3}{4}\left\{p_2(72-p_2+p_{1L})-24(72-p_2+p_{1L})\right\}\end{aligned}$$

となる．この式は変形すると

$$\pi_2 \quad = \quad p_2\left(72-p_2+\frac{1}{4}p_{1H}+\frac{3}{4}p_{1L}\right)-24\left(72-p_2+\frac{1}{4}p_{1H}+\frac{3}{4}p_{1L}\right) \tag{4}$$

となる．

もし不完備情報ではなく企業 1 の決定する価格が p_1 であるとすると，企業 2 の利益は

$$\pi_2 \quad = \quad p_2(72-p_2+p_1)-24(72-p_2+p_1) \tag{5}$$

となる．式 (4) は，式 (5) の p_1 が価格の期待値 $\frac{1}{4}p_{1H}+\frac{3}{4}p_{1L}$ に置き換わったものと解釈することができるだろう．

式 (4) を計算すると（式 (4) を計算しても同じ），

$$\pi_2=-p_2^2+\left\{96+\left(\frac{1}{4}p_{1H}+\frac{3}{4}p_{1L}\right)\right\}-24\left(\frac{1}{4}p_{1H}+\frac{3}{4}p_{1L}\right)-1728$$

p_2 で偏微分すると，

$$\frac{\partial\pi_2}{\partial p_2}=-2p_2+96+\left(\frac{1}{4}p_{1H}+\frac{3}{4}p_{1L}\right)$$

となる．$\frac{\partial\pi_2}{\partial p_2}=0$ を解くと，企業 2 の最適反応関数は

$$p_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}p_{1H}+\frac{3}{4}p_{1L}\right)+48$$

である．このままでも良いが計算すると

$$p_2=\frac{1}{8}p_{1H}+\frac{3}{8}p_{1L}+48 \tag{6}$$

である．

問題 *1* ベイズナッシュ均衡は，式 (1)，式 (2) と式 (2) を同時に満たす p_{1H}，p_{1L}，p_2 である．式 (6) に，式 (1) と式 (2) を代入し計算すると $p_2=110$ を得る．これを式 (1) と式 (2) に代入して $p_{1H}=133$ と $p_{1L}=121$ を得る．イズナッシュ均衡における企業 1 高費用タイプの需要量は 85，企業 1 低費用タイプの価格は 121，企業 2 の価格は 110.

問題 *2* 企業 1 が高費用タイプであった場合，$q_1=108-p_1+p_2$ より企業 1 の需要量は 85，企業 2 の需要量は $q_1=72-p_2+p_1$ より企業 2 の需要量は 95 である．

第22回宿題解答

自習課題 22.1 **問題 1** **ゲーム 1** $1/4 < x(t-1) \leq 1$

ゲーム 2 $0 \leq x(t-1) < 3/4$

ゲーム 3 戦略 A を選ぶことはない

問題 2 **ゲーム 1** *(均衡 1)* プレイヤー 1 も 2 も A を選ぶ，*(均衡 2)* プレイヤー 1 も 2 も B を選ぶ，*(均衡 3)* 各プレイヤーが A を 1/4，B を 3/4 で選ぶ，の 3 つ．

ゲーム 2 *(均衡 1)* プレイヤー 1 が A，プレイヤー 2 が B を選ぶ，*(均衡 2)* プレイヤー 1 が B，プレイヤー 2 が A を選ぶ，*(均衡 3)* 各プレイヤーが A を 3/4，B を 1/4 で選ぶ，の 3 つ．

ゲーム 3 （均衡 *1*）全員が B を選ぶ，の 1 つ．

問題 3 **ゲーム 1** （均衡 *1*）と（均衡 *2*）

ゲーム 2 （均衡 *3*）

ゲーム 3 （均衡 *1*）

提出課題 22.1 **問題 1** **ゲーム 1** $x^* = 0$

ゲーム 2 $x^* = 3/4$

ゲーム 3 $x^* = 0$

問題 2 **ゲーム 1** $x^* = 1$

ゲーム 2 $x^* = 3/4$

ゲーム 3 $x^* = 0$

疑問等は hp2(at mark)nabenavi.net までメールをください．