進化と学習のゲーム理論

渡辺隆裕

平成 28 年 12 月 30 日

1　はじめに

ここまで学んだゲーム理論は，

- ゲームは 1 回（繰り返しゲームを除く），
- プレイヤーの数は少数（多くの場合 2 人），
- プレイヤーは合理的でよく考え，自分の利得を最大にするように行動する．

とする考え方に基づいていた．これに対して 1990 年代から以下のような「新しいゲーム理論」が盛んに研究されつつある．

プレイヤーの学習を考慮したゲーム理論　これは，プレイヤーが最初から利得を高くする戦略を探せるわけではなく，ゲームを長期間に何度も繰り返し，自分にとって良い戦略が何かを学習してゆくと考える理論である．このような「学習理論」はゲーム理論に限らず，個人の意思決定や，人工知能や計算機科学の研究などでも盛んに行われている．学習の理論をゲーム理論に用いるときは，自分だけではなく，相手も学習してそれに応じて相手の戦略もだんだん変わってゆく点にある．人数は少数の場合（ 2 人のプレイヤーが共に学習していきながらプレイする）場合もあるが，一般には多数のプレイヤーを想定する場合が多い．そもそも自分がどのようなゲームを行っているかが分かっておらず，ゲームを何度も繰り返すうちに，それが分かってゆくような帰納的ゲーム理論と呼ばれる分野もある．

進化ゲーム理論　動物の生態や進化を理論化しようとした生物学から生まれたもので，そこでは生物の「種」がゲームをするプレイヤーだと考えた．生物の種が，種ごとに固有の戦略を取るものとして生まれて，生きているうちに他の種（同じ戦略を取るものもいれば，異なる戦略を取るものもいる）と出会いゲームを行う．このとき高い利得を得た種（適応度の高い種）が，次世代に多くの子孫を残すことができる，と考えるのが進化ゲームの出発点である．このような適応と淘汰による進化の考え方は，社会や経済のさまざまなシステムにも応用可能であろう．進化によって，どの戦略を選ぶプレイヤーが生き残ってゆくか，各戦略を選ぶプレイヤーの分布はどのように変化するかを考えるのが進化ゲーム理論である．多人数のプレイヤーを考えた場合に，どれが進化ゲームでどれが学習のゲームかの線引は難しいので，学習のゲームを含めて両方を大きく「進化ゲーム」と呼ぶときもある（その方が多い）．

行動ゲーム理論　様々なゲームを実際に人間にプレイヤーさせてみると，ゲーム理論通りにはならないことも多い．嫉妬・互恵性・羨望などの人間の行動も考慮し，実験を用いてゲーム理論を修正しようとする分野は，実験ゲーム理論や行動ゲーム理論などと呼ばれることもある．これは，ゲーム理論にかぎらずミクロ経済学で想定されているような行動を現実の人間が選ぶのかということを，実験や行動の観察で確かめようとする実験経済学や行動経済学という分野から生まれたものである．

以下では，学習を考慮したゲーム理論と進化ゲームの両方を合わせて広義の意味で「進化ゲーム」と呼ぶ．ここではその進化ゲームについて紹介していきたい．進化ゲームを説明するためにはいくつかの困難がある．１つは，これらの理論が発展途上で，なおかつ様々なバリエーションがあるので，どのような理論を選び説明するかが難しいこと．2つ目は，生物の進化を説明することは，生物を専門にしていなければ難しく，かつ興味を持ちづらいため，社会科学の文脈に合った興味ある題材を選ばなければならないが，典型的で初学者に分かりやすい例が少ないこと．そして３つ目（これがもっとも困難な点であるが）は，理論の中心となる「動学」や「安定性」という概念は「微分方程式」や「微小量の変化」などの数学的概念を用いるため，ここまでの四則演算と多項式の微分程度の数学では収まらず，社会科学分野で学ぶものには取りつきづらく敬遠されやすいということである．

ここでは進化ゲームの理論を正確に理解するよりも，分かりやすさを重視し，できるだけ単純

なモデルで，EXCEL なども用いて説明するように心がけた．入門編としては，これが良いと考えたが，更に興味を持った者は，後で挙げる文献などを参考にして，学習を深めると良いだろう．

2　進化のゲーム理論の特徴と分析

2.1　進化ゲームの例：デファクトスタンダードの進化ゲーム

まず最初は以下のモデルを考える．

モデル 46 (デファクトスタンダードの進化ゲーム)．2 つの携帯電話会社，エーウー（A 社）と BTT モコド（以下 B 社）から凄い次世代携帯電話「ウマホ」が発売され，日本人のほとんどがそれまでのスマートフォンから，このウマホに移行した．このウマホは，これまでのスマートフォンの機能に加え，同じ企業のウマホを持つ 2 人の間で凄いことができる．どんな凄いことかは，残念ながらここでは省略する．

2 社のウマホのどちらが凄いかについては，当初からいろいろ議論があったが，今は A 社のウマホの方が 2 倍凄いということが分かってきた．しかし最初に大々的に宣伝して売り出した B 社の方がシェアが現在は大きく，現在のウマホのシェアは A 社 0.3，B 社 0.7 である．

ここで，ウマホの消費者どうし 2 人が出会うと，凄いことをしようとする．これは A 社と B 社のどちらかの戦略を選んだ消費者のゲームとして考えることができる．A 社どうしの消費者が出会うと利得は 2，B 社どうしの消費者が出会うと 1 で，異なる企業の消費者が出会っても利得は 0 である．ゲームの利得行列は，図 *1* で与えられる．

消費者は既にそれぞれの企業のウマホを購入しており，なかなか買い替えない．しかし各期ごとに各企業のウマホを持つ消費者の 5% が買い換えをするとする（ここでは各期の初め（期首）に買い替えが起きると仮定する）．このとき買い換えをする**すべての**消費者は「その前の期において，消費者の平均利得が高い方の企業」のウマホに乗り換えるものとする．

ここで t 期 $(t = 0, 1, 2, \dots)$ において，A 社のシェアを x_t（B 社のシェアを $1 - x_t$）とする．$x_0 = 0.3$ である．x_t はどのようになるだろうか．また時間が長時間経つと，どちらの会社のシェアが大きくなるだろうか？

ゲームは出会った消費者 2 人の利得が対称的（消費者に区別がない）なので，2 人の利得を与えなくても，各消費者 1 人の利得を与えれば良い．そこで利得行列はあらためて図 2 で与えられる．

1 \ 2	A	B
A	(2 , 2)	(0 , 0)
B	(0 , 0)	(1 , 1)

図 1: 消費者の利得行列

1 \ 2	A	B
A	2	0
B	0	1

図 2: 消費者 1 人だけの利得で十分

問題を解くために，まず 1 期の各社のシェア x_1 はどうなるかを考えてみる．0 期において，各社のウマホを持っている消費者の平均利得を計算してみよう．A 社のウマホを持っている消費者は，A 社のウマホを使っている人と出会えば利得は 2，B 社のウマホを使っている人と出会えば利得は 0 である．どちらの人と出会うか（それは頻度とも，確率とも解釈できる）は，そのシェアによって決まるので，その平均利得は

$$2 \times 0.3 + 0 \times 0.7 = 0.6$$

であり，平均利得は 0.6 であると考えられるだろう．一方，B 社のウマホを持っている消費者は A 社のウマホを使っている人と出会えば利得は 0，B 社のウマホを使っている人と出会えば利得は 1 である．その平均利得は

$$0 \times 0.3 + 1 \times 0.7 = 0.7$$

である．A 社のウマホの方が凄いことができた時の利得が高いにも関わらず，B 社の方がシェアが高く，B 社のウマホを持っている時のほうが凄いことができる可能性が高いために B 社のウマホを持っている方が平均利得は高くなる．したがって 1 期の期首にウマホを買い換える消費者は，すべて B 社のウマホを買うことになる．

A 社の 0.3 の消費者のうち 5% である消費者（これは $0.3 \times 0.05 = 0.015$ で全体の 1.5% の消費

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_t	0.300	0.285	0.271	0.257	0.244	0.232	0.221	0.210	0.199	0.189	0.180

表 1: t 期における A 社のシェア x_t

者にあたる）と，B 社の 0.7 の消費者のうち 5% である消費者（これは $0.7 \times 0.05 = 0.035$ で全体の 3.5% の消費者にあたる）である．結局，考えてみれば全体の 5% の消費者が買い替えをする．これらのことより 1 期の A 社のシェア x_1 は $x_1 = 0.3 - 0.015 = 0.285$ である．A 社のシェアは小さくなる．

このように A 社のシェアが小さくなるので，A 社を使っている人の期待利得はますます小さくなることが分かる．したがってどの期においても，ウマホを買い換える消費者は B 社に乗り換えるだろう．一般に $t+1$ 期においては，前の期の A 社のシェアの 5% が B 社に買い替えてゆくので

$$x_t = x_{t-1} - 0.05x_{t-1} = 0.95x_{t-1} \quad t = 1, 2, \ldots$$

となる．つまり A 社のシェアは，前の期の 95% に減少してゆくことが分かる．

表 1 と図 3 は，t 期における A 社のシェア x_t を示した表とグラフである．時間が経つに連れて，A 社のシェアは単調に減少してゆくことが分かる．

時間が長く経つと A 社のシェア x_t は 0 に近づいてゆく．数学的には $t \to \infty$ のときの x_t は 0 に収束すると言える．このような点を**定常状態**（または**平衡点**）と呼ぶ．以下では定常状態（$t \to \infty$ のときの x_t）を x^* として表すことにしよう．このモデルでは $x^* = 0$ である．

興味深いのは A 社のウマホの方が凄いことができた時の利得が高い (性能が良い) にも関わらず，最終的に A 社のシェアが 0 になり，B 社のシェアが 1 になることである．これは $t = 0$ における A 社のシェア x_0 が低いことが理由であると考えられるだろう．x_0 のことを**初期状態**（もしくは初期点）と呼ぶ．

このように同じ製品を購入・利用する者が多いほど，その製品を購入した時の効用が高くなるような財は，**正の外部性**があると呼ばれる．このような商品は，その製品自身の効用だけではなく初期状態でのシェアが，最終的な商品のシェアに大きな影響を与える．1980 年代に，ビデオテープの規格に VHS と beta という 2 つの規格があり，製品としては beta の方が優れていると言われながら，最終的には VHS がシェアの殆どを占めるようになった．このため正の外部性がある財は，初期の段階での「規格争い」が激しく行われる．Mac と Windows のようなパソコンの OS，SD

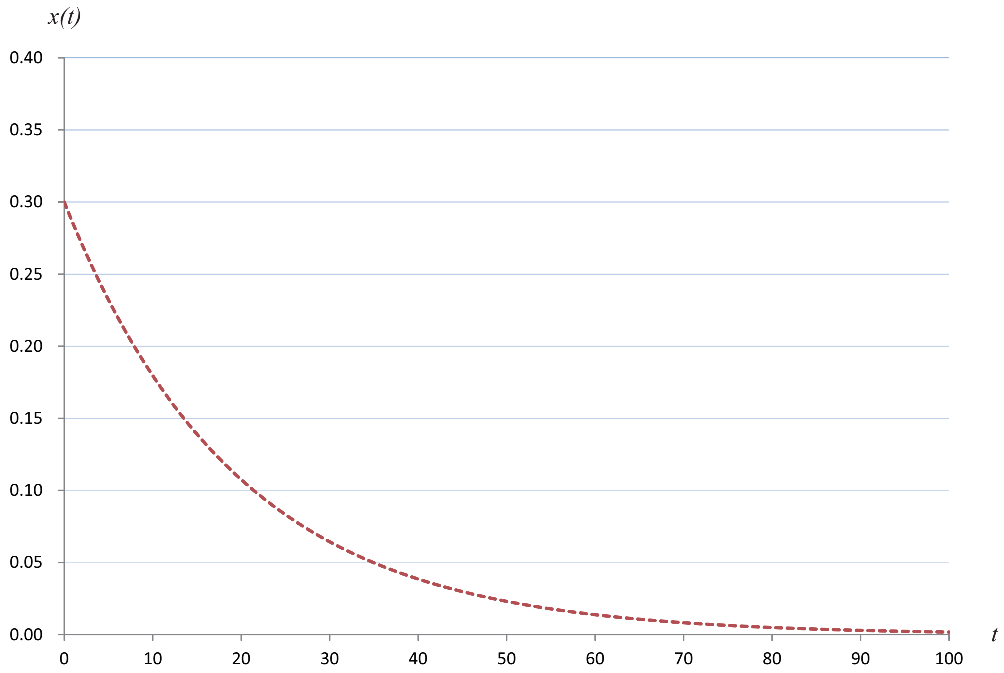

図 3: t と x_t のグラフ

カードとメモリスティックなどのメモリカード，Blu-ray Disc と HD DVD のような次世代 DVD 規格の例は有名である．

またインターネット上のサービスで，多くの人が集う方が効用が高くなるようなサービスも同様の特徴を持っており，こちらは**ネットワーク外部性**のあるサービスなどと呼ばれる．日本のネットオークションは，初期にはアメリカで成功を収めた e-bay と Yahoo!が競い合っていたが，Yahoo のオークションのシェアが大きくなり，e-bay は撤退している．他にも mixi，gree，facebook のような SNS の競争など，こちらも多くの例がある．

2.2 初期状態と定常状態の関係，およびダイナミクス

前の節の例において，A 社のウマホの方が利得が高いにも関わらず，定常状態では A 社のシェアが 0 になり，B 社のシェアが 1 になるのは，初期状態 x_0 で A 社のシェアが低く，B 社のシェアが高いことによる．では，

- 初期状態が異なり A 社のシェアが高ければ，定常状態では A 社のシェアが 1 になるのか？
- そうだとすると初期状態 x_0 のどこが境界となるのか．

ということが問題となる．これについて考えてみよう．

分析を行うために x_t と x_{t-1} との関係を式で表す．A 社のウマホを持っている消費者の平均利得は

$$2 \times x_{t-1} + 0 \times (1 - x_{t-1}) = 2x_{t-1}$$

であり，B 社のウマホを持っている消費者の平均利得は

$$0 \times x_{t-1} + 1 \times (1 - x_{t-1}) = 1 - x_{t-1}$$

である．t 期においてウマホを買い換えるすべての消費者は，$t-1$ 期の期待利得が高いウマホに買い換えるので，$2x_{t-1} > 1 - x_{t-1}$ であれば，全員が A 社のウマホに乗り換える．$2x_{t-1} > 1 - x_{t-1}$ を解くと $x_t > 1/3$ となる．

t 期に全員が A 社のウマホに乗り換えるときの x_t と x_{t-1} との関係は，

$$x_t = x_{t-1} + 0.05(1 - x_{t-1})$$

となる．なぜなら $t-1$ 期に A 社のウマホを使っていた消費者 x_{t-1} は t 期においても全員が A 社のウマホを使い，さらに B 社のウマホから乗り換える $0.05(1 - x_{t-1})$ の消費者が新たに A 社のウマホを使うからである．式を読み替えると，A 社の t 期のシェアは，$t-1$ 期の B 社のシェア（$1 - x_{t-1}$）の 5% を奪い単調に増加してゆくと言える．言い換えれば，B 社のシェアが前の期の 95% に単調に減少して行くとも言えるだろう．

反対に $x_t < 1/3$ であれば，$t-1$ 期に A 社のウマホを使っていた消費者の 5% は B 社のウマホに乗り換える（シェアは 95% に減少する）ことから，

$$x_t = 0.95x_{t-1}$$

となる．A 社のシェアは，前の期から 95% ずつに単調に減少してゆく．

$t-1$ 期のシェアが与えられた時の t 期のシェアの関係は

$$x_t = \begin{cases} 0.95x_{t-1} & x_{t-1} < 1/3 \\ x_{t-1} + 0.05(1 - x_{t-1}) & x_{t-1} > 1/3 \end{cases} \tag{1}$$

となる．式 (2.3) は，このモデルの**動学方程式**とか**ダイナミクス**などと呼ばれる．なお $x_{t-1} = 1/3$ の場合については後ほど検討する．

図 4 は，$x_0 = 0.15$ から $x_0 = 0.90$ までの異なるいくつかの初期状態 x_0 に応じた x_t の変化を $t = 0$ から $t = 1000$ までグラフに描いたものである．$x_0 < 1/3$ では t が増加すると x_t は 0 に近づき，$x_0 > 1/3$ では t が増加すると x_t は 1 に近づいてゆくことが分かる．

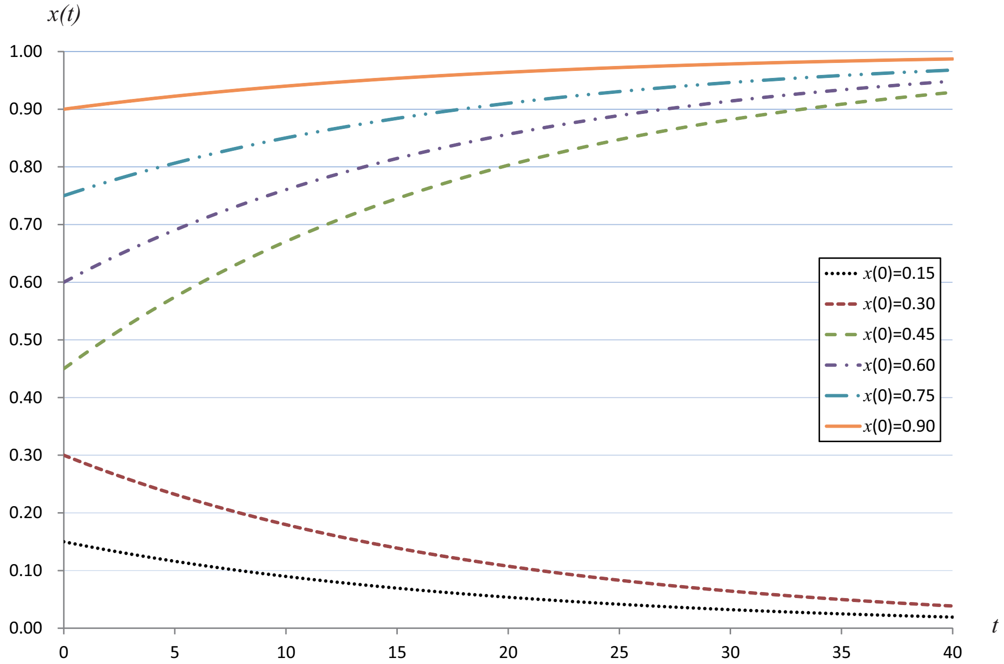

図 4: 異なる初期状態による t と x_t の関係

このことから定常状態は $x_0 > 1/3$ ならば 1（つまり $t \to \infty$ のとき $x_t \to 1$），$x_0 > 1/3$ ならば 0（$t \to \infty$ のとき $x_t \to 0$）となることが分かる．初期状態によって定常状態は異なるのである．

注記 2.1. x_t を x_0 の式で表すこともでき，そうすると一層明確になる．

まず $x_t < 1/3$ では

$$x_{t-1} + 0.05(1 - x_{t-1})$$

$$x_t = 0.95x_{t-1} = 0.95^2 x_{t-2} \cdots = 0.95^t x_0$$

となる．これより $x_0 < 1/3$ ならば，t を大きすると x_0 は減少し，どんな t でも $x_t < 1/3$ であることが分かる．

次に $x_t > 1/3$ では

$$x_{t-1} + 0.05(1 - x_{t-1})$$

であった． この式は $x_t = 0.95x_{t-1} + 0.05$ であるが，うまく変形すると

$$1 - x_t = 0.95(1 - x_{t-1})$$

となる（B 社のシェアが前の期の 95% に単調に減少して行くことを意味している）．したがって，

$$1 - x_t = 0.95(1 - x_{t-1}) = 0.95^2(1 - x_{t-2}) = \cdots = 0.95^t(1 - x_0)$$

であり，$1 - x_t = 0.95^t(1 - x_0)$ である．これより $x_0 > 1/3$ ならば，t を大きくすると x_t は増加し，どんな t でも $x_t > 1/3$ であることが分かる．式を変形すると $x_t = 0.95^t(x_0 - 1) + 1$ となる．

まとめると，

$$x_t = \begin{cases} 0.95^t x_0 & x_0 < 1/3 \\ 0.95^t(x_0 - 1) + 1 & x_0 > 1/3 \end{cases}$$

である．定常状態 x^* は $x_0 > 1/3$ ならば $x^* = 1$，$x_0 > 1/3$ ならば，$x^* = 0$ となることが分かる．

なお $x_0 = 1/3$ の場合については後ほど検討する．

2.3 さまざまな動学と安定な定常状態

ここまでのモデルでは，毎期に消費者の 5% がウマホを買い換えて，

(仮定 (A)) 買い換えをするすべての消費者はその前の期において，消費者の平均利得が高い方の企業のウマホに乗り換える

とした．この仮定は極端なものであり，実際には，このようなことは起きないだろう．しかしこの仮定を若干変更しても，前期の結論にはあまり関係がない．例えば，

(仮定 (B)) 買い換えをする 5% の消費者のうち，平均利得が低い方の企業の消費者の 20% は，そのままその企業のウマホを使い続ける．

(仮定 (C)) 買い換えをする消費者は，その前の期の平均利得の比率に応じて企業に乗り換える

とする．

(仮定 (B)) は,「平均利得が低い方の企業の消費者の 4% が高い方に乗り換える」とした場合と同じである．動学方程式は，

$$x_t = \begin{cases} 0.96x_{t-1} & x_t < 1/3 \\ x_{t-1} + 0.04(1 - x_{t-1}) & x_t > 1/3 \end{cases}$$

となる．

一方,（仮定 (C)）は乗り換える消費者の比率が毎期変化するので少し複雑である．A 社の平均利得は $2x_{t-1}$，B 社の平均利得は $1-x_{t-1}$ であったから，買い替えの時に A 社のスマホに買い換える消費者の比率は

$$0.05x_{t-1} \times \frac{2x_{t-1}}{2x_{t-1}+1-x_{t-1}} = \frac{0.1(x_{t-1})^2}{x_{t-1}+1}.$$

動学方程式は

$$x_t = 0.95x_{t-1} + \frac{0.1(x_{t-1})^2}{x_{t-1}+1}$$

となる．

図 5 は，初期状態 $x_0 = 0.30$ に対して，仮定 (A)，(B)，(C) のダイナミクスにおける $t=0$ から $t=40$ までの x_t をグラフに表している．このように異なる仮定であっても，t が増加するに従ってシェアは $x^* = 0$ に近づいてゆく．

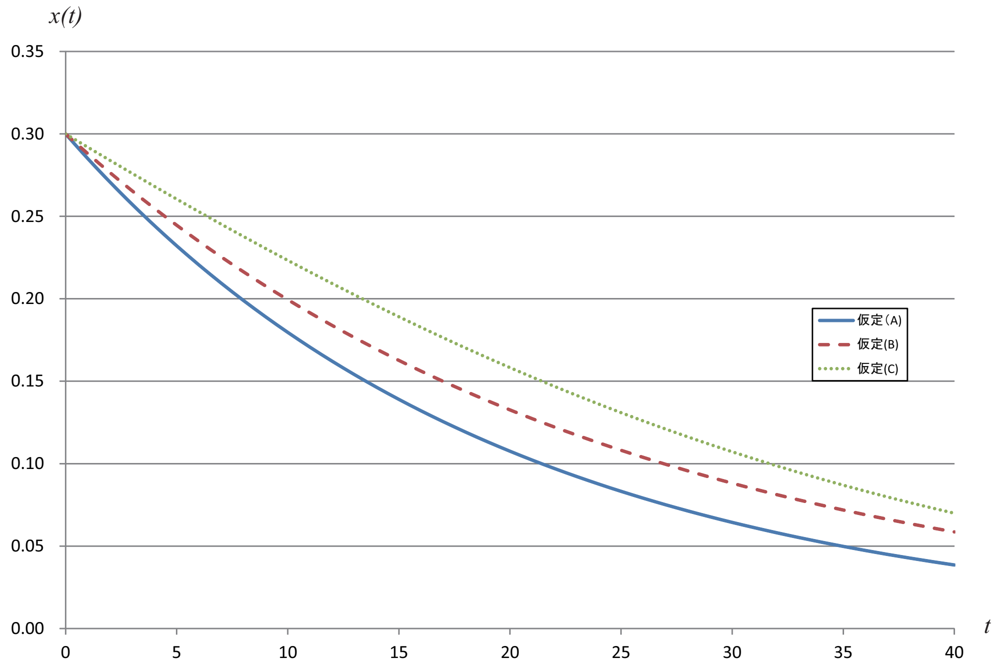

図 5: 異なる動学による t と x_t の関係

一般的には前の期の平均利得が高い方が，買い換える消費者の比率が高いような動学であれば，定常状態は $x_0 > 1/3$ ならば $t \to \infty$ のとき $x_t \to 1$，$x_0 < 1/3$ ならば，$t \to \infty$ のとき $x_t \to 0$ となる．つまり，動学を変化させると，途中経過は変化するが定常状態は変化しない．

実際には「どのくらいの消費者が買い替えをするのか」「どのように買い替えをするのか」は様々な設定が考えられる．この設定に応じて，動学と途中経過は変化する．これに対して，定常状態は動学や設定の少々の変化では変わらない．このことから定常状態を考えることこそが重要であると言える．

さて上記の例では，定常状態は $x_0 > 1/3$ ならば 1，$x_0 < 1/3$ ならば 0 であった．では $x_0 = 1/3$ の時はどうなるのか，という問題が残っている．

$x_0 = 1/3$ の時は，A 社の平均利得と B 社の平均利得は等しい．ここで「平均利得が等しい時は，消費者は前の期と同じ携帯を買う」と仮定すると消費者の比率は次の期も同じままである．一般的には $x_{t-1} = 1/3$ のとき，$x_t = 1/3$ となる．この場合は，$t \to \infty$ のとき $x_t \to 1/3$ となるから，1/3 は定常状態であると言えそうである．前述の仮定（B) や仮定 (C) でも，やはり定常状態にはなる．

しかし，たとえ定常状態であっても，この状態は**不安定**であると言われる．それは，この定常状態が消費者の初期状態が厳密に 1/3 でなければ成り立たないからである．少しでも初期状態がずれれば，定常状態にはならない．これに対して，0 や 1 の定常状態は**安定**であると呼ばれる．この定常状態は，ある程度の「幅」や「領域」を持った初期状態に対して定常状態となる[1]．

安定か不安定かは，その定常状態に至るための初期状態がある程度の幅や領域を持っているかどうかによって定義されるが，これは言い換えると**安定な定常状態とは，その定常状態になっている時に，僅かな変化ではその定常状態から違う定常状態に移らない**ということを意味している．定常状態が一旦 1 のとき（全員が A 社のウマホを使っているとき），僅かな消費者が何らかの理由で突然 B 社のウマホを使ったとしても，それ以降，買い換える消費者はやはり A 社のウマホを使うであろう．定常状態が 0 の場合も同様である．

上記の安定・不安定の考え方は，進化ゲームにおける**進化的安定戦略 (ESS: Evolutionary Stable Strategy)** と呼ばれる考え方につながっている．

---

[1]正確には「局所的安定」と呼ばれる．これに対しどんな初期状態でもすべて 1 つの定常状態に収束するときは，その定常状態は「大域的安定」と呼ばれる．大域的安定であれば局所的安定である．

2.4　ナッシュ均衡との関係

さてここで改めて，定常状態とナッシュ均衡の関係について見てみよう．元のゲームの利得行列は図 1 で表現されたが，このゲームのナッシュ均衡は以下の 3 つである．

均衡 1 両プレイヤーが共に A を選ぶ

均衡 2 両プレイヤーが共に B を選ぶ

均衡 3 両プレイヤーが A を 1/3 で選び，B を 2/3 で選ぶ

均衡 1, 均衡 2 は確率を使わないナッシュ均衡（純粋戦略のナッシュ均衡）であり，均衡 3 は確率を使うナッシュ均衡（混合戦略のナッシュ均衡）である．ここで均衡 1 は $x^* = 1$ となる定常状態に対応し，均衡 2 は $x^* = 0$ となる定常状態に対応する．均衡 1 と均衡 2 は安定な定常状態に対応しているのに対し，均衡 3 は $x^* = 1/3$ の不安定な定常状態に対応している．つまり**ナッシュ均衡は，進化ゲームの定常状態である．**

これは一般に成立し，ナッシュ均衡がゲームの解であるということに対して，合理的なプレイヤーがゲームをすること以外の解釈を与えるのである．

ナッシュ均衡と定常状態は対応するが，前の章で見たように，その中には安定な定常状態と不安定な定常状態がある．したがって進化ゲームの定常状態において安定性を考えると，もとのゲームのナッシュ均衡を良いナッシュ均衡と悪いナッシュ均衡に選別する均衡の精緻化になっている．ここでは混合戦略のナッシュ均衡が不安定であったが，必ずしも混合戦略のナッシュ均衡が不安定になるわけではなく，混合戦略のナッシュ均衡が安定で，純粋戦略のナッシュ均衡が不安定になる場合もある（その例は次章で示される）．

2.5　まとめ

進化ゲームの「例」を示した．その特徴は以下のようなものであった．

- 進化ゲームでは，ゲームが**長期間**に**多数**のプレイヤーにプレイされる
- プレイヤーは，これまでのように各期間に利得を良くしようと戦略を選択する訳ではなく，**プレイヤーごとに選ぶ戦略が固定**されている

- 各期間に**僅かな比率のプレイヤーが戦略を変更**する機会を持つ
- 戦略を変更するプレイヤーは，**平均利得が高い戦略に変更する**者が多い（ここではすべてが平均利得の高いプレイヤーに変更するとした）

進化ゲームでは，時間の経過に伴いプレイヤーの「シェア」（プレイヤーが選んでいる戦略の比率）がどうなるかを問題とする．それは，以下のような特徴を持つ．

- $t-1$ 期から t 期へのプレイヤーの選ぶ戦略の比率の変化を表す式を**動学方程式** (またはダイナミクス) と呼ぶ．
- $t \to \infty$ のときの x_t の収束先を**定常状態**と呼ぶ．
- 動学方程式は，ストーリーを変更すると少しずつ異なったものになる．このため途中の時間経過によるシェアの変化は，さまざまなものが考えられるが，どれも定常状態は同じである．したがって，途中経過より定常状態を考察することが重要である．
- 初期状態によって，異なる定常状態へ到達することがある．
- 定常状態には安定なものと不安定なものがある．定常状態に到達するための初期状態の領域がある 1 点である定常状態は不安定である．
- 元のゲームのナッシュ均衡と定常状態は対応している．
- しかし，元のゲームのナッシュ均衡には不安定な定常状態に対応しているものと安定な定常状態に対応しているものがある．

3　戦略が 2 つの進化ゲームと定常状態

3.1　戦略が 2 つの進化ゲーム

前章のモデル「デファクトスタンダードの進化ゲーム」は，戦略が 2 つのゲームである．戦略が 2 つのゲームは，ゲームの中で最も単純なものであるが，このゲームは以下のような 3 種類のゲームに（だいたい）分類できる．

(1) 支配戦略があるゲーム (相手が A を選んでも，B を選んでも，自分の一方の戦略が，もう一方の戦略より利得が高い).

(2) 支配戦略がなく，自分は相手と同じ戦略を選ぶほうが利得が高い (相手が A を選ぶと自分は A を選んだほうが利得が高く，B を選ぶと自分も B を選んだほうが利得が高い).

(3) 支配戦略がなく，自分は相手と異なる戦略を選ぶほうが利得が高い (相手が A を選ぶと自分は B を選んだほうが利得が高く，B を選ぶと自分も A を選んだほうが利得が高い).

(1) は囚人のジレンマなどを含むゲームである．(2) は**調整ゲーム**などと呼ばれる種類のゲームで,「デファクトスタンダードの進化ゲーム」は，この種類のゲームになる．(3) は**反調整ゲーム**，または**タカーハトゲーム**，**チキンゲーム（弱虫ゲーム）**などと呼ばれる．

調整ゲームについて，その定常状態と安定性について考えたが，他の 2 種類のゲームではどうなっているのであろうか．ここでは簡単なストーリーを考えながら，他の 2 種類のゲームについて見ていこうと思う．

3.2 反調整ゲームの進化ゲーム

社会にはいつも攻撃的な人と温和な人がいる．様々な生物においても，同じ生物でありながら，攻撃的な戦略と穏健な戦略を取る 2 つのタイプの戦略が棲み分けていることが知られている．このような状況は，**反調整ゲーム**または**タカーハトゲーム**，と呼ばれる進化ゲームによって考察できる．以下のモデルによって，この例を考えてみよう．

モデル 47 (タカーハトゲームの進化ゲーム)**.** 社会にたくさんの人がいて，そこから 2 人が出会いゲームを行う．ここでは出会うたびに，お金を分け合う交渉のゲームを考える．ここでは計算を簡単にするため，出会うたびに 6 万円を分け合うような交渉を行うとしよう．

交渉において，強硬な戦略，攻撃的な戦略をタカ（*Hawk*）戦略 H，温和な戦略，穏健な戦略をハト（*Dove*）戦略 D と呼ぶ．出会った 2 人が選んでいる戦略によって 2 人の利得が以下のように決まる．

- お互いに温和なハト戦略 D を選ぶ 2 人が交渉をすると，3 万円ずつを仲良く分け合う結果になる．

- 一方が攻撃的なタカ戦略 H，一方が穏健なハト戦略 D の 2 人が交渉をすると，攻撃的なタカ戦略 H を選んだ方は 4 万円，穏健なハト戦略 D を選んだ方は 2 万円を得る．

- お互いに攻撃的なタカ戦略 H を選ぶ 2 人が交渉をすると，交渉は決裂し，何も獲得できない（利得は 0）

先の章で示したように，このゲームでは，ある個人をプレイヤー 1 と考えると，プレイヤー 1 の利得だけあれば済む．それは以下の図 6 のようにで書ける．

1 \ 2	D	H
D	3	2
H	4	0

図 6: 交渉におけるプレイヤー 1 の利得

個人は，ハト戦略 D を取るか，タカ戦略 H を取るかが，性格によってあらかじめ決まっていて，ほとんど変わることはないとする（利得が大きくなるように戦略を選ぶわけではない）．しかしながら，各期ごとに個人の 5% だけが戦略を変えるとする．このとき戦略を変えるすべての個人は「その前の期において，個人の平均利得が高い方の戦略」に変えるものとする．

現時点でハト戦略 D を選ぶ人の比率が 0.3，タカ戦略 H を選ぶ人の比率が 0.7 であるとする．

時間が長時間経つと，戦略を選ぶ人の比率はどのようになるだろうか．

ここで興味があるのは，長時間が経過した時の定常状態であり，特に

- デファクトスタンダードの進化ゲームのように，全員が戦略 H や戦略 D を選ぶようになるのだろうか，それとも両方の戦略がある比率で棲み分けるのだろうか？

- 初期の戦略の比率によって，定常状態は変化するのであろうか？（デファクトスタンダードの進化ゲームでは，定常状態は初期状態によって変化）

- 安定な定常状態と不安定な定常状態はあるのか？

- ナッシュ均衡との関係は？

という点が問題となる．以下，これらについて観察していく．

動学方程式と定常状態　ここで t 期 $(t = 0, 1, 2, \dots)$ において，ハト戦略 D を選ぶ個人の比率を x_t（戦略 H を選ぶ比率を $1 - x_t$）とする．$x_0 = 0.3$ である．

モデルの動学方程式を導こう．$t - 1$ 期の各戦略を選んでいる個人の平均利得が，どうなっているかを計算する．戦略 D を選ぶ個人の平均利得は

$$3 \times x_{t-1} + 2 \times (1 - x_{t-1}) = x_{t-1} + 2$$

であり，戦略 H を選ぶ個人の平均利得は

$$4 \times x_{t-1} + 0 \times (1 - x_{t-1}) = 4x_{t-1}$$

である．$x_{t-1} + 2 > 4x_{t-1}$ であれば，戦略を変更する個人は全員が戦略 D に変更する．これを解くと $x_t < 2/3$ となる．

t 期に全員が戦略 D に変えるとすると x_t と x_{t-1} との関係は，

$$x_t = x_{t-1} + 0.05(1 - x_{t-1})$$

となる．つまり戦略 D の比率は，前の期に戦略 D を選んでいた人に加えて，戦略 H を選んでいた人（比率 $1 - x_{t-1}$）の 5% が新たに戦略 D を選ぶことになる．

反対に $x_t > 1/3$ であれば，$t - 1$ 期に戦略 D を選んでいた人の 5% が戦略 H に変える．したがって

$$x_t = 0.95x_{t-1}$$

となる．

動学方程式は

$$x_t = \begin{cases} x_{t-1} + 0.05(1 - x_{t-1}) & x_{t-1} < 2/3 \\ 0.95x_{t-1} & x_{t-1} > 2/3 \end{cases} \tag{2}$$

となる．

図 7 は t 期におけるハト戦略 D の比率 x_t を示したものである．時間の経過で戦略 D を選ぶ個人の比率は 2/3 に近づく．ただ 2/3 で振動してしまう．

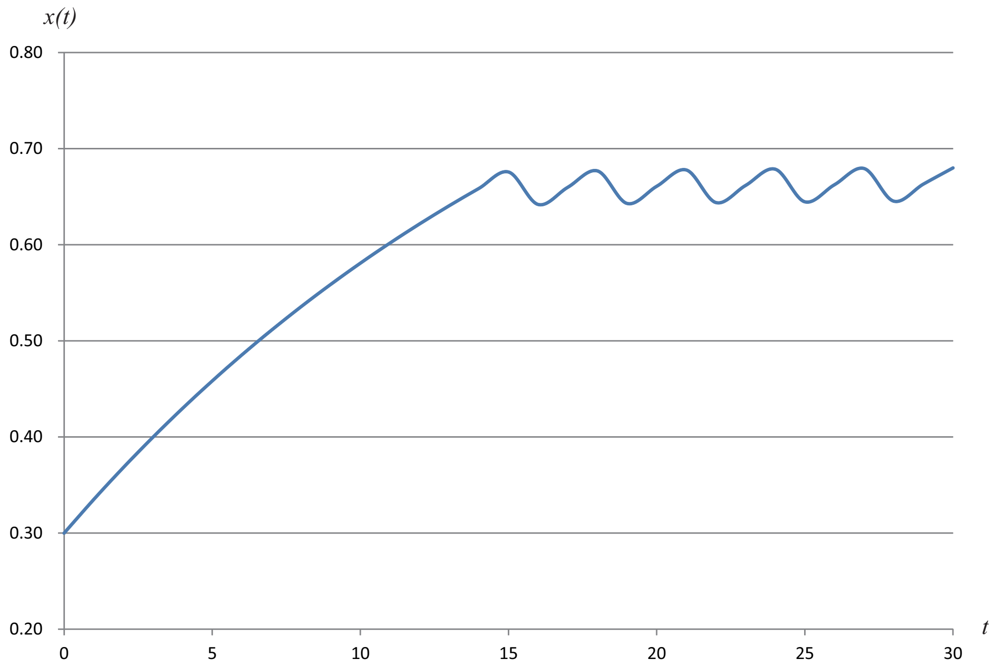

図 7: タカ-ハト進化ゲームにおける x_t の変化

2/3 で振動してしまうのは，t 期において戦略を変化させる個人の数が大きいからである．x_t が 2/3 より少し小さいところ（例えば $x_t = 0.62$）では，戦略を変える個人はハト戦略 D に変えるほうが良いので，5% の個人全員が戦略 D に戦略を変えるが，そうすると x_t が 2/3 を超える（$x_t = 0.67$）．この場合は，戦略を変える個人はタカ戦略 H に変えるほうが良いので，今度は 5% の個人全員が戦略 D に戦略を変え，x_t は元に戻って（$x_t = 0.62$）しまい，振動が起きる．

正確な進化ゲームの理論では，微小な時間 Δt の間に微小な比率の個人 Δx が変化すると考え，Δt と Δx を 0 に近づけた微分方程式のモデルを作成する．このようなモデルでは x_t は時間の経過とともに収束するのであるが，ここでは微分方程式による表現を避け，時間も変化する個人も 2/3 付近で振動してしまうことは避けられない．

しかしながら，正確ではないながらも，このモデルでもハト戦略 D の比率 x_t が定常状態 $x^* = 2/3$ に近づいている様子は伝わる．まとめると**タカーハトゲームの進化ゲームでは，定常状態ではデファクトスタンダードの進化ゲームのように，全員が戦略 H や戦略 D を選ぶようになるわけではなく，両方の戦略が比率 2/3 で棲み分けることが定常状態になるのである．**

各期に戦略を変化させる個人の比率を小さくすれば，振動は小さくなるので，見かけ上 $x^* = 2/3$ に収束しているように見える．そこで以下では，各期に戦略を変化させる個人の比率を 5% から

0.5% に変える．

初期状態の違いと定常状態　ここで初期状態の違いによる定常状態の違いも観察してみよう．

図 8 は，$x_0 = 0.15$ から 0.90 に対して $t = 0$ から $t = 200$ までの x_t をグラフに表しているすべての x_0 に対して，t が増加すると x_t は $2/3$ に近づいてゆくことが分かる．(各期に戦略を変化させる個人の比率は 0.5% としているので，振動は小さく，見かけ上収束しているように見える．)

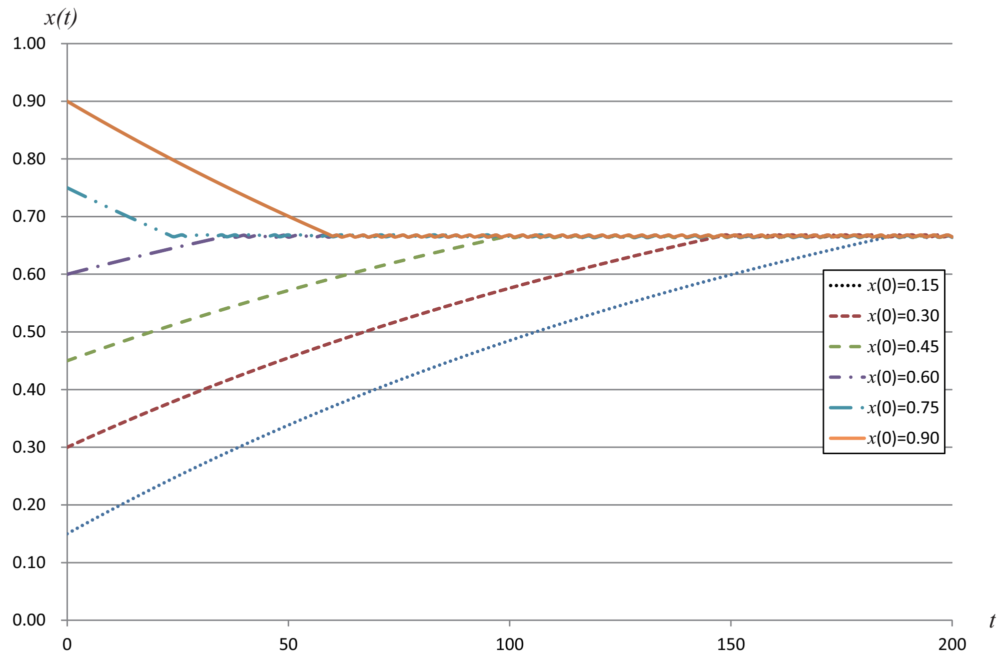

図 8: 異なる初期状態による t と x_t の関係

既に見たように，x_t が $2/3$ より小さいところでは，ハト戦略 D が増え，x_t が $2/3$ を超えるところでは，タカ戦略が増えてハト戦略が減少する．したがって，どんな初期状態でも時間の経過によって $x_t = 2/3$ に近づいて行くのである．

結論としてデファクトスタンダードの進化ゲームでは，初期状態によって定常状態は異なるが，タカーハトゲームの進化ゲームでは，初期状態が異なっても，定常状態は同じであると言える．

安定な定常状態とナッシュ均衡との関係　タカーハトゲームの進化ゲームでは，初期状態が異なっても，定常状態は同じであるとしたが，その中で初期状態が $x_0 = 0$ と $x_0 = 1$ の場合は，微妙である．

$x_0 = 0$ と言う状態は，そもそもハト戦略が存在しない状態であり，このような社会からハト戦略が生まれてくるかどうかは，どのような動学を設定するかに依存する．$x_0 = 1$ も同様である．先の章のデファクトスタンダードの進化ゲームにおける $x_0 = 1/3$ と同じように $x_0 = 0$ と $x_0 = 1$ も，動学の設定によっては定常状態になることがある．

しかしたとえ $x_0 = 0$ と $x_0 = 1$ が定常状態であったと考えても，デファクトスタンダードの進化ゲームと同じように，この状態は不安定である．なぜならば，$x_0 = 0$ と $x_0 = 1$ はその状態から少しでもずれると，定常状態にはならないからである．

最後にナッシュ均衡との関係について考える．このゲームの利得行列は図 9 で表わされ，ナッシュ均衡は以下の 3 つである．

均衡 1 プレイヤー 1 が D，プレイヤー 2 が H を選ぶ

均衡 2 プレイヤー 1 が H，プレイヤー 2 が D を選ぶ

均衡 3 両プレイヤーが D を 2/3 で選び，H を 1/3 で選ぶ

1＼2	D	H
D	(3 , 3)	(2 , 4)
H	(4 , 2)	(0 , 0)

図 9: タカハトゲームを 2 人ゲームで表した利得行列

均衡 1, 均衡 2 は確率を使わないナッシュ均衡（純粋戦略のナッシュ均衡）であり，$x_t = 0$，$x_t = 1$ の定常状態にそれぞれ対応する．均衡 3 は確率を使うナッシュ均衡（混合戦略のナッシュ均衡）で $x_t = 1/3$ の定常状態に対応している．

デファクトスタンダードの進化ゲームと同様に，ナッシュ均衡は進化ゲームの定常状態に対応するが，安定な定常状態と不安定な定常状態の対応は，対照的であり，均衡 1，均衡 2 の純粋戦略のナッシュ均衡（確率を使わないナッシュ均衡）が不安定な定常状態に対応し，ただ 1 つの混合戦略のナッシュ均衡が安定な定常状態に対応することが分かる．

3.3　支配戦略があるときの進化ゲーム

最後に支配戦略があるようなゲームの進化ゲームとして，囚人のジレンマの進化ゲームを，以下のモデルによって，考察してみよう．

モデル 48 (囚人のジレンマの進化ゲーム)**.** 社会にたくさんの人がいて，そこから 2 人が出会いゲームを行う．ここでは出会うたびに，囚人のジレンマをプレイするような状況を考える．

各個人は，協力戦略 C，と非協力戦略 D のどちらかを選ぶとし，これはあらかじめ決まっていて，ほとんど変わることはない．しかし各期に個人の 5% だけが戦略を変更する．このとき戦略を変えるすべての個人は「その前の期において，個人の平均利得が高い方の戦略」に変えるものとする．

2 人の利得は以下のように決まる．

- お互いに協力戦略 C を選ぶと利得は 3.
- 一方が協力戦略 C を選び，一方が非協力戦略 D を選ぶと，協力戦略 C を選んだ方は利得は 0，非協力戦略を選んだ方は利得は 4.
- お互いに非協力戦略 D を選ぶと利得は 1.

各個人をプレイヤー 1 と考えると，プレイヤー 1 の利得は以下の図 *10* で表せる．

1 \ 2	C	D
C	2	0
D	3	1

図 10: 囚人のジレンマにおけるプレイヤー 1 の利得

現時点で協力戦略 C を選ぶ人の比率が 0.3，タカ戦略非協力戦略 D を選ぶ人の比率が 0.7 であるとする．

このゲームは，相手が戦略 C を選んでも，戦略 D を選んでも，自分は戦略 C を選ぶより戦略 D を選んだほうが良い．すなわち戦略 D は支配戦略であるが，双方が戦略 D を選ぶよりも戦略 C を選んだほうが良い囚人のジレンマゲームになっていることが分かる．

t 期 $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ において，協力戦略 C を選ぶ個人の比率を x_t（D を選ぶ個人の比率は $1 - x_t$）とする．

$t - 1$ 期の各戦略を選んでいる個人の平均利得を計算すると，戦略 C を選ぶ個人の平均利得は

$$2 \times x_{t-1} + 0 \times (1 - x_{t-1}) = 2x_{t-1}$$

であり，戦略 D を選ぶ個人の平均利得は

$$3 \times x_{t-1} + 1 \times (1 - x_{t-1}) = 2x_{t-1} + 1$$

である．$x_{t-1} \geq 0$ であればどんな比率であっても，個人は戦略 D を選ぶほうが利得が高く，t 期に戦略を変更する全員が，戦略を D に変える．このことから動学方程式はすべての x_{t-1} で

$$x_t = 0.95x_{t-1} \tag{3}$$

となる．

図 11 は，$x_0 = 0.15$ から 0.90 に対して $t = 0$ から $t = 80$ までの x_t をグラフに表しているすべての x_0 に対して，t が増加すると x_t は 0 に近づいてゆく．

囚人のジレンマの進化ゲームでは，初期状態に依存せず定常状態は同じで $x_t = 0$ であると言える．

この場合は，定常状態 $x_t = 1$ は安定である．

このゲームの利得行列は図 12 で表わされ，ナッシュ均衡は両プレイヤーが D を選ぶ均衡しかない．

この唯一のナッシュ均衡は，唯一の安定な定常状態 $x_t = 0$ に対応している．

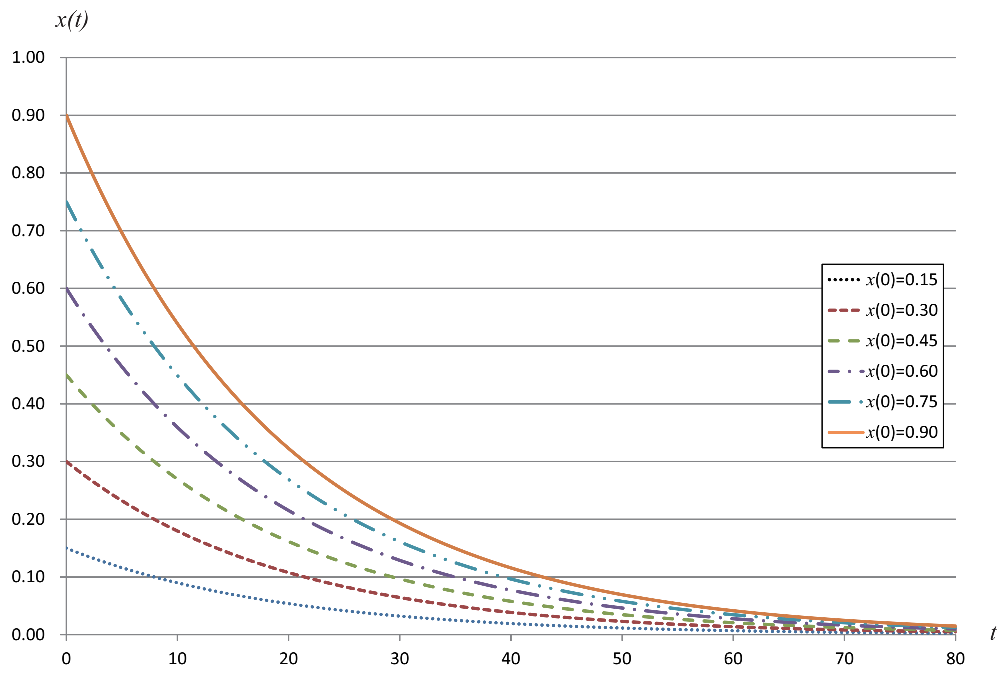

図 11: 異なる初期状態による t と x_t の関係

1 \ 2	C	D
C	(3 , 3)	(0 , 4)
D	(4 , 0)	(1 , 1)

図 12: 囚人のジレンマの利得行列

3.4 まとめ

戦略が 2 つの進化ゲームを 3 種類に分けて検討した．それは次の表にまとめられるだろう．

呼び方	支配戦略があるゲーム	調整ゲーム	反調整ゲーム
特徴	支配戦略がある	支配戦略がなく，相手と同じ戦略を選ぶほうが利得が高い	支配戦略がなく，相手と異なる戦略を選ぶほうが利得が高い
代表的な例	囚人のジレンマ	デファクトスタンダードのゲーム	タカーハトゲーム
ナッシュ均衡	純粋戦略の均衡が 1 つ	純粋戦略の均衡が 2 つと混合戦略の均衡	純粋戦略の均衡が 2 つと混合戦略の均衡
安定な定常状態	純粋戦略の均衡	純粋戦略の均衡 2 つ	混合戦略の均衡
初期状態と定常状態	初期状態に依存しない	初期状態に依存	初期状態に依存しない

表 2: 戦略が 2 つの進化ゲームのまとめ